I linguaggi della matematica a scuola. Esperienze e riflessioni di un insegnante/ricercatore.

Summary
The present paper considers the mathematical discourse in classroom from the perspective of the work of Anna Sfard. After a brief introduction, I reflect about some features of the mathematical discourse which constitute obstacles for beginners.
Then I consider the process of reification, the importance of routine and imitation of experts in the evolution of mathematical discourse, and the role of metaphors. Before some brief considerations about the importance of visualization in mathematical discourse, I analyze in particular algebraic language and its features in mathematical classroom discourse.
Finally some brief conclusions are given.

Domingo Paola

I linguaggi della matematica a scuola. Esperienze e riflessioni di un insegnante/ricercatore.

Domingo Paola, Liceo Issel, Finale Ligure

Introduzione

Anna Sfard scrive che ci sono vari motivi "per cui considerare la matematica un discorso non equivale a dire che essa sia un linguaggio […] discorso e linguaggio appartengono a categorie ontologiche distinte anche se non prive di relazioni fra loro: il primo termine designa un'attività umana; il secondo un sistema simbolico; essendo forme di attività umana, i discorsi non possono essere certo ridotti a vocabolari e regole grammaticali e possono differire l'uno dall'altro anche quando usano le stesse parole […]; i discorsi […] comprendono anche molte forme di comunicazione non verbali: i discorsi possono utilizzare vocabolari diversi, per esempio inglese ed ebraico e, ciò nonostante, possono essere considerati sostanzialmente uguali […], ma soprattutto le asserzioni matematiche scritte in forma simbolica – spesso considerate l'essenza della matematica – restano le stesse a prescindere dal linguaggio naturale in cui avviene il discorso" (Sfard, 2009, pag. 161-162). Sembra di poter affermare, quindi, che il discorso matematico sia meno sensibile di altri discorsi al cambiamento di linguaggio naturale.
Poiché mi è stato chiesto di parlare dei *linguaggi della matematica a scuola* dal punto di vista di un insegnante che fa ricerca, limiterò le mie considerazioni al discorso matematico in aula, con finalità comunicative rivolte a favorire l'apprendimento da parte degli studenti.
Come ricorda Anna Sfard nel passo sopra citato, la comunicazione scritta e quella orale non sono gli unici mezzi mediante i quali insegnanti e studenti comunicano: le immagini, la gestualità, l'espressione del volto, la postura, il movimento, gli sguardi, sono tutti strumenti di comunicazione importanti, soprattutto nelle ore di

matematica in cui si fa riferimento a oggetti non concreti. Ciò suggerisce che la didattica della matematica debba prestare particolare attenzione alla comunicazione verbale, evitando però di trascurare o, peggio, inibire altre forme comunicative, che possono essere particolarmente adatte al fine di accrescere costantemente e significativamente il sapere matematico in aula e le stesse competenze linguistiche degli studenti.

Alcune caratteristiche del discorso matematico in aula che sono ostacoli per i principianti

Il discorso matematico in aula si caratterizza, in genere, per alcune specificità che costituiscono spesso forti ostacoli per gli studenti, perché contrastano con lo stile comunicativo narrativo che sono soliti utilizzare. Queste specificità sono, per esempio, la ricerca costante e sistematica di precisione e concisione, l'atemporalità, l'uso sempre più spinto di simboli. Inoltre le funzioni del discorso matematico appaiono per certi versi simili a quelle di altri discorsi più familiari per lo studente, ma, a un'analisi più attenta, risultano profondamente differenti. Si pensi, per esempio, alle particolari e specifiche argomentazioni che stanno al cuore del discorso matematico, le *dimostrazioni*. Apparentemente sembrano avere come obiettivo quello di convincere l'interlocutore che una certa affermazione è vera, per esempio che gli angoli alla base di un triangolo isoscele sono congruenti. In realtà una dimostrazione ha come obiettivo quello di precisare la nozione di conseguenza logica tra ipotesi e tesi all'interno di una teoria ben precisata. Si tratta di una funzione ben diversa da quella di convincere, tanto è vero che Polya affermava che convincersi del fatto che una congettura funziona è una condizione necessaria per essere motivati a cercarne una dimostrazione, ossia a spiegare *perché* quella congettura funziona.
Infine, se è vero che l'apprendimento è sempre basato su qualche esperienza, come è possibile apprendere davvero una disciplina come la matematica i cui discorsi vertono intorno a oggetti astratti, con cui non è così scontato dire che si possa fare esperienza? "La

matematica comincia dove finiscono gli oggetti tangibili della vita reale e dove inizia la riflessione sul nostro discorso a proposito di questi oggetti. In realtà il discorso matematico, specialmente quando è fissato in forma di testo scritto, può essere considerato una struttura a più livelli, in cui ogni livello può dare origine a un altro strato discorsivo e divenirne oggetto. La matematica emerge da questa descrizione come un discorso *autopoietico* – un sistema che comprende sia il discorso che i suoi oggetti e che cresce incessantemente dall'interno man mano che si aggiungono nuovi oggetti" (Sfard, 2009, pag. 161). Si pensi, per esempio, ai numeri, che sono prima utilizzati per far riferimento alla numerosità di oggetti concreti o per ordinarli o per misurare; poi i numeri diventano oggetto di discorsi che hanno a che vedere con gli insiemi numerici; poi tali insiemi diventano oggetto dei discorsi che, per esempio, hanno a che vedere con strutture; quindi le strutture stesse diventano oggetto di discorsi relativi a categorie … e così via, in un crescendo di astrazione e generalità dei discorsi.
L'apprendista si trova così in una situazione paradossale che non può non essere oggetto di ricerca, analisi e attenzioni didattiche: per partecipare ai discorsi egli deve avere una certa dimestichezza con gli argomenti e, al tempo stesso, questa dimestichezza può maturare soltanto attraverso la partecipazione al discorso. Questa è una difficoltà con cui si scontrano gli studenti che devono apprendere, gli insegnanti che devono favorire l'apprendimento e gli stessi autori dei libri di testo che, dovendo introdurre un'idea matematica, non possono utilizzare a piacere quella lingua formalizzata che la matematica ha costruito per trasmettere il suo pensiero indipendentemente da ogni contesto. Gli autori dei manuali scolastici e gli insegnanti devono utilizzare discorsi che mantengano un opportuno equilibrio dinamico tra stile narrativo e formale, tra rigore e comprensibilità; devono utilizzare metafore, rappresentazioni, immagini che siano evocative, ma che non creino eccessivi equivoci.
Per esempio, in un famoso testo per la scuola secondaria di primo grado che è stato per molto tempo il più adottato dai docenti, nel

primo volume di aritmetica si dà una definizione di numero naturale come classe di equivalenza di insiemi equipotenti: che cosa può comprendere uno studente di 11-12 anni, oltre a ciò che già sa sui numeri naturali, leggendo e ripetendo tale definizione? Su un'altra edizione dello stesso testo, nel volume di algebra, sulla seconda delle pagine dedicate alla geometria analitica viene data la seguente definizione di funzione: "Date due grandezze variabili x (variabile indipendente) e y (variabile dipendente) diciamo che y è funzione di x, $y = f(x)$, se esiste una relazione che fa corrispondere a ogni valore di x uno e un solo valore di y. Una funzione $y = f(x)$ si dice matematica se la relazione che lega le due variabili si può esprimere con una formula matematica". A parte la "chicca" della precisazione sulla *funzione matematica*, che cosa può comprendere, relativamente al concetto di funzione, uno studente di 12-13 anni da una definizione formulata con un linguaggio che, già nelle pagine introduttive di un discorso sulla geometria analitica, scimmiotta quello della matematica sistemata? Analogamente, nel volume di geometria si dà la seguente caratterizzazione di retta: "La retta è il secondo ente fondamentale; possiamo immaginarla come un insieme consecutivo e infinito di punti allineati lungo la stessa direzione". Quale contributo ulteriore può dare questa caratterizzazione all'idea di retta che lo studente può formarsi tracciando diversi segmenti con righe da disegno e utilizzando software di geometria dinamica?

Gli autori di libri di testo e gli insegnanti che propongono un'anticipazione eccessivamente precoce dello stile dei discorsi tipici della matematica matura (definizioni, assiomi, teoremi, …), rischiano di indurre negli studenti comportamenti imitativi caricaturali che si realizzano con discorsi formalmente e stilisticamente simili a quelli usati dall'insegnante o dal libro di testo, ma in cui il significato, invece che condensarsi nei simboli utilizzati, pronto per essere recuperato quando ve ne sia la necessità, evapora completamente. Gli studenti, in questo caso, scimmiottano il discorso matematico degli esperti, senza averne il minimo controllo.

Giustificare scelte didattiche, evidentemente inopportune, con l'esigenza di abituare gli studenti *al rigore del linguaggio matematico* vuol dire non essere in grado di riconoscere che, come suggerisce la storia della matematica, il concetto di rigore è strettamente legato al contesto, in modo naturale a quello storico e prescrittivamente a quello cognitivo, in quanto dipende dalla maturità e, soprattutto, all'esperienza degli studenti. Per esempio, gli *Elementi* di Euclide, che sono stati esempio di sommo rigore per secoli e secoli, di fronte all'analisi hilbertiana, hanno evidenziato molte carenze; a tal proposito si potrebbero citare esempi anche in altri campi della matematica. Scrive Anna Sfard: "Il rigore intransigente dei discorsi matematici professionali va a detrimento della loro accessibilità. Oggi i discorsi praticati dai matematici professionisti sono notoriamente frammentati e la stessa comunità matematica è spesso deplorata per la sua frammentazione in piccole sottocomunità che comunicano difficilmente tra loro" (Sfard, 2009, pag. 164).
Queste prime riflessioni dovrebbero condurci a condividere la seguente *regola aurea* per un uso efficace ed efficiente, per quel che riguarda l'apprendimento, del discorso matematico in classe: produrre molti esempi e controesempi, utilizzare diverse rappresentazioni (grafiche, numeriche e simboliche) degli oggetti del discorso, passando frequentemente dall'una all'altra, usare metafore adeguate, non preoccupandosi eccessivamente del problema del rigore. Inoltre non stancarsi di usare la lingua naturale per parlare di matematica richiedendo, però, sempre maggiore consapevolezza, da parte degli studenti, alla necessità di prestare attenzione, in un discorso, all'aspetto epistemico (un discorso deve strutturarsi e articolarsi su conoscenze, altrimenti gira a vuoto), a quello teleologico (si parla con obiettivi e finalità che vanno sempre chiaramente precisati, altrimenti si rischia di disorientare) e a quello retorico (la cura dello stile comunicativo è fondamentale per farsi capire e quindi per discutere).
Finora ho considerato principalmente la comunicazione in aula che avviene tra esperto (insegnante o autore del libro di testo) e studen-

te; è però necessario che la comunicazione matematica avvenga anche fra pari. Gli studenti devono scrivere, parlare di matematica, comunicare; infatti la capacità di comunicare correttamente contenuti matematici è un obiettivo didattico di fondamentale importanza (il suo conseguimento sancisce l'ingresso degli studenti nei discorsi degli adulti-esperti). Inoltre, comunicando, gli studenti costruiscono e consolidano abilità argomentative e, impegnati nella scelta delle rappresentazioni più efficaci per farsi meglio capire, corrono minori rischi di confondere una rappresentazione con l'oggetto del discorso. L'insegnante deve quindi prestare particolare attenzione alla costruzione di attività e, più in generale, di ambienti d'insegnamento-apprendimento che favoriscano la discussione fra pari, scritta e orale, nei piccoli gruppi e alla presenza dell'intera classe, dedicando a tali attività tutto il tempo necessario, liberandosi dall'ossessione del numero di interrogazioni e di verifiche formali tradizionali che talvolta risultano utili solo a verificare la capacità dello studente di simulare apprendimento.

Per valutare il rendimento di uno studente durante una discussione matematica in classe e, quindi, in attività che hanno come fine lo sviluppo di competenze legate sia alla cognizione, sia alla comunicazione, è possibile utilizzare schede per raccolte di osservazioni che abbiano come criteri di riferimento:

a) l'uso corretto, adeguato e chiaro di sintassi e simboli;
b) l'organizzazione del discorso e l'efficacia della sua struttura;
c) l'impegno nel dialogo;
d) la considerazione degli argomenti altrui (indicata dalla pertinenza delle reazioni);
e) la ricchezza e l'efficacia dell'argomentazione.

Una lettura affrettata di quanto ho scritto finora potrebbe portare il lettore a pensare che io non ritenga importante avviare gli studenti alla formalizzazione e all'uso di un linguaggio sempre più preciso e adeguato a parlare degli oggetti matematici. Desidero precisare che l'avvio graduale, ragionevole e sostenibile dello studente al discorso matematico sempre più maturo deve essere obiettivo prioritario di ogni azione didattica. Tale obiettivo, però, deve essere conseguito senza rinunciare alla costruzione di significato, alla sempre maggiore comprensione degli oggetti dei discorsi, altrimenti si tratta, per ben che vada, di simulazione di apprendimento. L'avvio alla formalizzazione è fondamentale in matematica: si formalizza per liberarsi dal labirinto del concreto, per orientarsi con maggiore sicurezza e perizia nei vari problemi. Si pensi, per esempio, alla seguente questione:

è di più, il 50% di 17 euro o il 17% di 50 euro?

La risposta, se non si prescinde dal contesto delle compravendite o del valore delle monete, può non essere banale. Provate a proporla e vedrete che molte persone, anche di media cultura matematica fanno riferimento a situazioni di compravendita e, proprio per questo, faticano a fornire la risposta, talvolta sbagliando dopo la considerazione di alcuni casi concreti.

La risposta diventa invece banale se si formalizza:

$$50/100 \cdot 17 = 17/100 \cdot 50$$

per la proprietà commutativa della moltiplicazione. La formalizzazione aiuta a riconoscere l'uguaglianza dei risultati dei due calcoli e a non perdersi nei meandri del concreto.

L'oggettificazione nei discorsi matematici

Una delle domande che molti insegnanti si pongono senza riuscire a dare una risposta soddisfacente è:

Come è possibile che studenti capaci di risolvere un problema in un determinato contesto non riescano ad affrontarlo quando tale problema viene decontestualizzato?"

Secondo Anna Sfard "Risolvere lo *stesso* problema in situazioni diverse significa essere capaci di vedere le due situazioni come se fossero, in un certo senso, le stesse […] La capacità di notare la *stessità* (o anche solo la somiglianza) è la sostanza dell'astrazione e la capacità di astrarre è considerata parte della facoltà umana di trasferire la conoscenza – di riciclare vecchie procedure per la soluzione di problemi in situazioni nuove" (Sfard, 2009, pag. 36).

Il problema è che mentre i principianti fanno molta fatica a individuare gli invarianti di una situazione, essendo naturalmente portati a individuare differenze, gli esperti talvolta perdono la capacità di vedere quelle differenze che catturano l'attenzione dei principianti.

Sono noti molti esempi di ragazzi e adulti che, in contesti familiari di situazioni concrete di compravendita, riescono ad adottare strategie di calcolo efficaci ed efficienti, mentre non sono in grado di eseguire correttamente gli stessi calcoli e anche altri meno complessi in assenza di contesto o in contesti poco familiari.

Anche nel discorso matematico decontestualizzato ci vuole molto allenamento prima che gli studenti riescano a vedere la stessa cosa, per esempio a riconoscere che le seguenti espressioni hanno lo stesso significato:

3/7 * 14;   3*2 ;
42/7;   (3:7) * 14 ;
0,(428571)*14

Già da molto tempo, tutti gli anni in cui mi affidano una prima liceo, propongo agli studenti un'attività con un software di geometria dinamica sulle possibili definizioni dei quadrilateri. Quando gli studenti osservano, grazie al trascinamento dei punti liberi, le immagini dinamiche di un particolare tipo di quadrilateri, per esempio rettangoli o parallelogrammi, sono catturati soprattutto dalle differenze delle diverse immagini, piuttosto che dagli invarianti. Così, per esempio, fanno più fatica a riconoscere, nei rettangoli, la perpendicolarità dei lati che non a vedere il cambiamento, durante il trascinamento, delle misure dei lati; analogamente sono portati a caratterizzare i parallelogrammi come quei quadrilateri che "hanno due angoli e due lati diversi" invece che come quadrilateri che hanno i lati paralleli. La capacità di rilevare ciò che varia in una determinata situazione ha costituito, per *homo sapiens*, un vantaggio evolutivo di primaria importanza: nel buio della savana l'abilità di cogliere per tempo variazioni nell'orizzonte visivo poteva voler di-

re sottrarsi al destino di preda. Per la ferrea legge dell'evoluzione siamo *naturalmente* portati a individuare differenze; la matematica richiede, invece, di riconoscere soprattutto invarianti. Vedere con occhio matematico richiede allenamento, molta attenzione e, in un certo senso, andare oltre quello che potremo chiamare un nostro istinto. Questa difficoltà a rilevare analogie e somiglianze potrebbe essere alla base della difficoltà che incontriamo nel trasferire ad altri contesti concetti e procedimenti appresi in contesti specifici, ma anche della difficoltà di trasferire in contesti specifici procedimenti appresi in astratto. Come scrive Sfard "Secondo molti ricercatori, la gran mole di dati che evidenziano la forte dipendenza delle azioni umane dalle situazioni in cui esse hanno luogo sembra indebolire l'assunto alla base dei curricoli scolastici, secondo il quale i concetti e i procedimenti astratti, una volta appresi, saranno facilmente trasferiti a situazioni nuove ogni qualvolta se ne presenti la possibilità" (Sfard, 2009, pag. 40).
La capacità di riconoscere analogie e somiglianze è alla base del processo di *oggettificazione*, ossia di costruzione dei concetti, necessario per rendere il discorso più efficace ed efficiente per quel che concerne la comunicazione. Naturalmente c'è una grande differenza tra i concetti concreti, come quelli di sedia o cane, e quelli astratti, come numero o funzione. I concetti concreti si formano in seguito a esperienze con oggetti che esistono indipendentemente dalla comunicazione. I concetti astratti, invece, sono "un prodotto della nostra consapevolezza di certe somiglianze in alcuni dei nostri atti comognitivi[1] precedenti" (Sfard, 2009, pag. 142).
Il processo di "oggettificazione", ossia di costruzione dei concetti, avviene, nel discorso matematico, mediante due azioni discorsive strettamente correlate: "la *reificazione*, che consiste nel sostituire

[1] Sfard utilizza il termine *comognizione* per "comprendere il pensiero (la cognizione individuale) e la comunicazione (interpersonale)" (Sfard, 2009, pag. 336). Questo termine richiama l'attenzione sul fatto che cognizione e comunicazione sono manifestazioni diverse, una intrapersonale e l'altra interpersonale, di uno stesso fenomeno.

un discorso sulle azioni con un discorso sugli oggetti e l'*alienazione*, che consiste nel presentare i fenomeni in modo impersonale, come se essi accadessero da sé, senza la partecipazione di esseri umani" (Sfard, 2009, pag.71).
La tecnica con cui avviene la reificazione è l'introduzione, in un discorso, di un sostantivo che possa condensare un insieme di processi e azioni. In questo senso i numeri possono essere pensati come reificazioni dei procedimenti di conteggio (per esempio si ha reificazione quando si passa da "tre biglie e cinque biglie fanno otto biglie" a "tre più cinque uguale otto"; oppure da " tre (biglie) sono meno di cinque" a " tre è minore di cinque").
L'alienazione, infine, completa il processo di oggettificazione: "Una volta reificati, i presunti prodotti delle azioni della mente possono subire l'*oggettificazione* definitiva attraverso una completa dissociazione o *alienazione* dall'attore […]. Reificati e inseriti all'interno di proposizioni impersonali, i numeri sembrano avere una vita propria. Ritornano ai loro creatori umani camuffati da padroni esclusivi del loro destino, mentre il partecipante al discorso aritmetico comincia a sperimentarli come qualcosa che accade alle persone anziché come qualcosa di prodotto dalle persone e come preesistenti al discorso, anziché come un effetto di esso". (Sfard, 2009, pag. 77).
I vantaggi dell'*oggettificazione* sono molteplici e, quindi, si tratta di un'attività importante per l'evoluzione della conoscenza matematica, anche perché aumenta l'efficacia comunicativa e pratica del discorso. Si pensi all'efficacia dell'uso di certi simboli in sostituzione di processi e alla possibilità di interpretare certe espressioni algebriche non solo come processi, ma anche come prodotti. Per esempio è un vantaggio non indifferente considerare $2n – 1$, $2n + 1$ e $2n + 3$ come prodotti (tre numeri dispari consecutivi) e poi considerare $2n – 1 + 2n + 1 + 2n + 3$ come processo che porta al prodotto $6n + 3$ ossia $3(2n + 1)$ per dimostrare che la somma di tre numeri dispari consecutivi è un numero dispari multiplo di 3.

Il discorso matematico maturo, quello dei manuali per esempio, è il risultato di continui processi di oggettificazione a partire dalla reificazione e successiva alienazione di processi e azioni su oggetti via via più astratti. Si tratta quindi di un discorso particolarmente efficace ed efficiente per parlare di matematica, ma non per il principiante, non per chi non sia già dentro al discorso. Le sue narrazioni, infatti, sembrano essere prodotte da un'unica voce non umana e ciò può creare problemi allo studente che è abituato alla pluralità delle voci in classe. Spesso, nell'apprendimento – insegnamento della matematica i due discorsi, quello monologico della matematica sistemata e quello a più voci dell'attività in classe si alternano, si attraversano, non sempre in modo armonico e coerente. Chi si aspetta che lo studente possa essere in grado di leggere e comprendere i discorsi sistemati dei manuali ha una visione della matematica di tipo platonico: in qualche modo deve immaginare che in un iperuranio ci siano i numeri e che lo studente possa e debba imparare a conoscerli. Probabilmente, invece è vero il contrario: lo studente si costruisce un senso numerico facendo pratica di discorsi intorno ai numeri; lo studente si inserisce in un ambiente in cui è già disponibile una teoria dei numeri, che è un prodotto culturale umano, non qualche entità esistente in un iperuranio.
Si pensi alle difficoltà in cui si trovano gli studenti nei primi incontri con i numeri razionali. Fino ad allora conoscono i numeri naturali, 1 , 2, 3, ….. Quindi iniziano a operare sui numeri naturali con l'operazione di divisione e questa attività li mette a contatto con i rapporti 1/2, 1/3 come operatori su quantità e come processi. Il discorso matematico maturo vuole che questi processi possano essere pensati essi stessi come numeri su cui eseguire operazioni simili a quelle che si eseguono sui numeri interi. Però gli studenti devono ora essere disposti a rinunciare a narrazioni che hanno ormai fatto proprie, come il discorso che la moltiplicazione fra due numeri dà un risultato che è maggiore dei due numeri se i fattori non sono 1 o 0. "La persistenza delle vecchie approvazioni discorsive e la loro ricomparsa all'interno dei discorsi in cui sono destinate a creare

contraddizioni costituiscono il noto fenomeno da cui ha avuto origine la teoria delle misconcezioni" (Sfard, 2009, pag. 221).

Il discorso matematico si basa su tecniche ben precise per realizzare l'*oggettificazione*. Si pensi alle definizioni: invece di dire

chiamiamo triangolo un poligono se e solo se esso ha tre lati

si dice

un triangolo è un poligono di tre lati

In questo modo gli oggetti discorsivi *triangoli* sembrano appartenere alla stessa categoria degli oggetti extradiscorsivi concreti, ossia alla stessa categoria delle cose del mondo e, come queste, appaiono dotati di un'esistenza indipendente dalla mente umana. Questo porta a conseguenze molto importanti per l'insegnamento – apprendimento della matematica. Infatti, se si crede che i numeri e, in generale, gli oggetti discorsivi, abbiano le stesse caratteristiche degli oggetti concreti extradiscorsivi, allora gradualmente ci si convince che sia possibile fare con i numeri esperienze analoghe a quelle che si fanno con le cose del mondo. A questo punto ci si illude che il concetto di numero sia appreso in forma completamente decontestualizzata, anzi che sia appreso se e solo se si riesce renderlo indipendente dalle attività realizzate in determinati contesti. Questa illusione porta a perdere la capacità di considerare diverso ciò che i principianti non riescono a considerare uguale (Sfard, 2009). Si perde di vista il fatto che un'operazione simbolica come per esempio $4 \cdot 7$ e trovare il costo di 4 biglietti del cinema (ciascuno dei quali costa 7 euro) sono due procedimenti molto diversi fra loro e che possono essere considerati gli stessi solo dopo molto allenamento e molte attività volte a insegnare a *guardare con occhio matematico*. "Insomma, solo se riusciamo a disoggettivare il nostro discorso *adulto* possiamo renderci conto che ciò che il bambino nota per default è la differenza e non l'identità" (Sfard, 2009, pag. 87).

Si è detto che la reificazione porta a una riduzione di complessità del discorso e a una maggiore generalità, perché ciò che prima era visto come diverso, mediante la reificazione ora viene unificato. Per esempio, la tabella, la formula e il grafico seguenti possono essere considerate come tre differenti rappresentazioni della stessa funzione:

x	y
– 3	9
– 2	4
– 1	1
0	0
1	1
2	4
3	9

$$f(x) = x^2$$

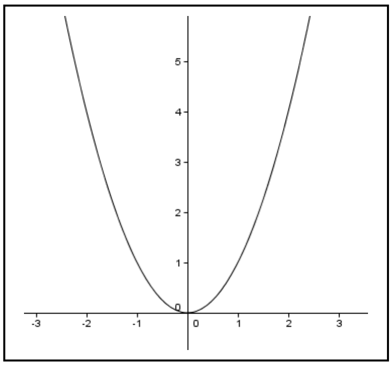

Figura 1

Pensare ai tre precedenti insiemi di segni come a differenti rappresentazioni di uno stesso oggetto comporta un significativo aumento nell'economia del discorso, ma può comportare il rischio, per il principiante, di non cogliere le differenze che consentono di capire che dal grafico e dalla tabella non sarebbe possibile risalire con certezza, senza altre informazioni, alla formula e quindi al tipo di funzione rappresentata.

L'importanza dei rituali e dell'imitazione per l'evoluzione dei discorsi matematici

Secondo Anna Sfard (Sfard, 2009) quattro sono le proprietà principali che caratterizzano il discorso matematico e che guidano l'organizzazione della comunicazione in aula:

a) un uso particolare e organizzato, anche se non esclusivo, di parole che designano quantità e forme e che sono il risultato dell'*oggettificazione*;
b) l'uso di mediatori visivi, come grafici e artefatti simbolici che non fanno riferimento a oggetti materiali esistenti indi-

pendentemente dal discorso, ma che sono creati specificamente per la comunicazione matematica;

c) la scelta di organizzare il sapere matematico colto in *teorie*, ossia in narrazioni che parlano soprattutto di relazioni tra oggetti e che devono essere sottoposte ad approvazione dall'intera comunità mediante tecniche condivise;

d) il ricorso sistematico a *routine*, ossia a modelli ripetitivi caratteristici di un certo discorso. Molto spesso la capacità di riconoscere e ripetere una routine è la via che consente l'accesso ai discorsi matematici, quella via che lo studente deve inizialmente percorrere per diventare capace di comprendere il discorso matematico colto.

Nei discorsi matematici dei principianti si trovano pochi segni di "oggettificazione", poca flessibilità nel passare da un registro di rappresentazione a un altro (grafico-numerico-simbolico), tendenza a esprimersi, in prima persona, in termini di azioni e processi; inoltre si rilevano segni di routine: per esempio nei discorsi dei bambini le parole che indicano i numeri compaiono prima in ripetizioni ritmiche e rituali di sequenze numeriche (le cantilene delle conte) e solo in seguito esse sono usate come soggetto oppure come oggetto nei discorsi numerici. I discorsi matematici colti, invece, si caratterizzano per una forte flessibilità nell'uso di registri di rappresentazione diversi e nel passaggio dall'uno all'altro e per "la strutturalità dell'uso lessicale - l'opposto della processualità- che è conseguenza della reificazione e l'uso impersonale del discorso, che è una conseguenza dell'alienazione" (Sfard, 2009, pag. 177).

Il passaggio da un discorso tipico dei principianti a un discorso da esperti è un processo lungo e non lineare. Esso, secondo Anna Sfard (Sfard, 2009, pag. 216), può essere individuato osservando come cambia l'uso di parole che denotano forme e quantità e che, abbiamo detto, sono caratteristiche dei discorsi matematici. L'evoluzione nell'uso di tali parole può essere pensata come caratterizzata da quattro momenti successivi: il primo è l'uso passivo della parola, che si ha quando il principiante non utilizza ancora la parola nel discorso, ma, se la sente pronunciare da altri, è in grado di mettere in opera certe reazioni routinarie (per esempio operazioni di conta quando sente la parola numero). Il secondo momento è quello dell'uso guidato dalla routine, che avviene quando i principianti iniziano a usare la parola, ma solo all'interno di discorsi particolari quando eseguono particolari routine. Il terzo momento è quello guidato dalla frase, in cui si usa la parola all'interno di intere frasi ed è il significato dell'intera frase che guida l'uso della parola. Infine si ha l'uso guidato dall'oggetto in cui l'ex principiante, ormai esperto utilizza la parola in modo appropriato in differenti contesti, guidato dall'oggetto che quella parola significa.

Per quanto detto, le routine hanno una grande importanza nei processi di oggettificazione e, quindi, nel passaggio dai discorsi dei principianti ai discorsi matematici colti.

Secondo Anna Sfard, "per molti bambini alcune routine matematiche […] nascono […] come *rituali*, cioè come sequenze di azioni discorsive il cui obiettivo primario non è la produzione di una narrazione approvata o di un cambiamento negli oggetti, ma la creazione e il mantenimento di un legame con altre persone […] L'esecuzione di una routine è un modo per ottenere l'attenzione e l'approvazione altrui ed entrare a far parte di un gruppo sociale" (Sfard, 2009, pag. 280 e 281). La ritualità è quindi componente importante dell'apprendimento del discorso matematico e si realizza come volontà di far parte di una certa comunità, come interesse a parlare la stessa lingua: quando questa condizione manca o si perde diventa difficile, se non impossibile, per l'insegnante comunicare con lo studente. Si tratta di un punto a mio avviso assai importante che mette in risalto come fattori non esclusivamente cognitivi, ma più legati alla sfera emozionale-affettiva siano fondamentali nei processi di comunicazione e cognizione. Naturalmente la mera ritualità, che fa parte dell'apprendimento in matematica, va superata: gli studenti devono diventare consapevoli delle proprie attività e dei propri discorsi e gli insegnanti non possono accontentarsi del rituale, ossia della produzione inconsapevole di azioni che possono solo simulare acquisizione di conoscenze e competenze da parte degli studenti. Ciò non toglie che l'apprendimento possa e anzi debba passare anche attraverso la ritualità. Come scrive Anna Sfard, " nel loro percorso verso nuove routine […] i discenti devono passare, anche solo per pochissimo, attraverso lo stadio della prestazione ritualizzata. In questo stadio transitorio, possono acquisire una buona familiarità con il *come* della nuova routine, ma saranno molto meno consapevoli del suo *quando*. A questo punto viene spontaneo chiedersi come faccia il bambino, che ancora non ha un'idea chiara di quando la routine possa essere implementata o del motivo per cui funzioni, a collaborare alle sue implementazioni collettive e a essere, alla fine, perfino capace di implementarla in modo autonomo. La risposta, a quanto pare, sta nella propensione infantile all'imitazione. L'imitazione, che evidentemente è una facoltà umana naturale, è il modo ovvio per introdursi in un nuovo discorso e forse l'unico immaginabile. La tendenza di imitare gli altri va di pari passo con il bisogno di comunicare" (Sfard, 2009, pag. 289).

L'imitazione, la deissi, i gesti, alcune routine, l'uso di immagini che evochino esperienze ricche e significative stanno alla base dell'evoluzione del discorso matematico dei principianti verso i discorsi degli esperti (Arzarello, Paola, Robutti, Sabena, 2008). Naturalmente è anche fondamentale prestare molta attenzione, fin dall'inizio del ciclo primario, a costruire esplicitamente una sintassi adeguata e corretta di rappresentazioni potenti, che possono avere sviluppi importanti nel prosieguo degli studi, come le tabelle, i diagrammi ad albero e i grafici. La sintassi di una rappresentazione, però, non è naturale e non può essere appresa spontaneamente in tempi ragionevoli: è necessario l'intervento dell'insegnante o di un *apprendista* più esperto che *mostri* e non solo *racconti* come leggere e costruire una tabella. L'insegnante non si limita mai all'uso delle parole: la sua comunicazione linguistica è accompagnata da gesti, soprattutto da gesti che indicano dove e come mettere un opportuno simbolo per riempire adeguatamente la tabella. La comuni-

cazione orale si appoggia su altri registri comunicativi, fatti di cenni, sguardi, gesti, sorrisi. Gli studenti, in questo contesto ricco, possono apprendere; ecco perché quasi sempre il contatto con l'insegnante, anche quando si limita a ripetere quello che è scritto su un manuale, è essenziale per l'apprendimento. Come scrive Radford, la stessa "presa di coscienza che una spiegazione è rivolta a una persona e che si pensi che questa persona debba poterla capire, apre una nuova prospettiva nella comunicazione" (Radford, 2007, pag. 63).
Uno dei termini più utilizzati dagli studenti nelle comunicazioni fra pari o con l'esperto nelle fasi di osservazione, scoperta e produzione di congetture o di risoluzione di problemi è *questo*. Si tratta di un termine accompagnato in genere da deissi o sguardi ben mirati; è un termine particolarmente adatto nelle fasi che precedono la giustificazione e il controllo, perché è sufficientemente generico da designare qualunque oggetto o fenomeno che cade nel campo visivo delle persone coinvolte nell'attività. Al tempo stesso, sempre per la sua genericità, può essere causa di ambiguità ed equivoci. Il fatto che lo stesso termine sia anche utilizzato nelle fasi di giustificazione e validazione della congettura o del procedimento risolutivo, suggerisce la possibilità che lo studente non sia ancora preparato a giustificare o validare le congetture prodotte o la strategia risolutiva scelta; in altri termini, potrebbe non essersene ancora impossessato a sufficienza. Infatti termini linguistici e simboli corretti e adeguati sono essenziali per oggettivare il sapere: un uso ancora inadeguato di simboli e parole suggerisce che l'*oggettificazione* e quindi la consapevolezza non siano ancora pienamente raggiunte.

Le metafore

Il problema di *come* si genera nuova conoscenza è un problema spinoso e sempre presente, fin dall'antichità: come è possibile acquisire conoscenza di qualche cosa che non conosciamo ancora? Tutti coloro che si sono occupati dello sviluppo della conoscenza hanno condiviso l'idea che la nuova conoscenza abbia origine e si radichi nell'esperienza, ossia nelle conoscenze già acquisite e strutturate. Ma la questione di *come* l'esperienza possa trasformarsi in nuova conoscenza è ancora un problema sulla cui soluzione non c'è accordo. Ciò vale soprattutto in matematica, dove si parla di oggetti che non cadono direttamente sotto i nostri sensi e di cui bisognerebbe precisare che cosa vuol dire *avere esperienza*. Mentre degli oggetti concreti del mondo è possibile costruirsi una conoscenza enciclopedica che supporti quella del dizionario, per quel che riguarda gli oggetti matematici non è scontato dire che ci si può costruire, su essi, un sapere enciclopedico. Secondo Sfard "il recente lavoro sulle metafore in quanto agenti del cambiamento discorsivo suggerisce una via per uscire da questo pasticcio. Le metafore devono la loro efficacia di precursori e catalizzatori del cambiamento discorsivo al fatto che le parole familiari, anche se trapiantate in un nuovo contesto discorsivo, possono ancora essere utilizzate secondo quelle vecchie regole che sembrano consone al nuovo contesto […] [Però] quando un nuovo termine viene introdotto metaforicamente, la nostra impressione di comprendere è ingannevole, in quanto nulla garantisce che altri stiano utilizzando questa parola allo stesso modo […] Le metafore sono un'arma a doppio taglio: da un lato, in quanto meccanismo fondamentale alla base di ogni concettualizzazione, esse sono ciò che rende possibile il nostro discorso di ricerca; dall'altro esse mantengono l'immaginazione umana entro i confini delle nostre esperienze e concezioni precedenti e, se non sono operazionalizzate, possono portare i diversi interlocutori a utilizzare in modo differente le stesse parole" (Sfard, 2009, pag. 67). Quello che emerge da queste parole è che, in ogni caso, una ricca esperienza consente, almeno in linea di principio, conoscenze più articolate e ricche. Come insegnanti interessati all'incremento delle conoscenze matematiche dei nostri studenti dovremmo quindi essere particolarmente attenti a favorire esperienze ricche e diversificate e a utilizzare con molta attenzione il linguaggio adatto a descrivere, organizzare e strutturare queste esperienze in modo tale che su esse sia possibile favorire la produzione di nuova conoscen-

za. Ma che cosa è l'esperienza matematica? È noto che in matematica si ha accesso unicamente a rappresentazioni; anzi si può dire che ogni oggetto matematico sia fondato su un dizionario che definisce il termine insieme all'uso che se ne fa e da un'enciclopedia che si basa sull'esperienza che abbiamo fatto con le rappresentazioni di quell'oggetto e con il suo uso in problemi. Le nuove tecnologie offrono risorse un tempo inimmaginabili per consentire agli studenti esperienze ricche con rappresentazioni diverse: un sistema di manipolazione numerico grafico simbolica immerge lo studente in ambienti di lavoro in cui è molto facile passare attraverso diversi registri di rappresentazione come quelli, appunto, grafico, numerico e simbolico e favorisce l'uso di metafore spesso appropriate per i discorsi matematici e per la transizione verso discorsi sempre più maturi e vicini a quelli degli esperti (Paola, 2004; 2005). Per capire meglio il ruolo delle metafore nella costruzione di conoscenza matematica e, quindi, nella formazione del discorso matematico maturo, riporto alcune considerazioni dovute a una fortunata e interessante opera di Lakoff e Nunez (Lakoff e Nunez, 2000).
Prendiamo, per esempio, in esame uno dei concetti più elementari che la matematica considera: la retta. La grande idea di René Descartes, ossia la geometria analitica, si basa su una metafora fondante: *i numeri come punti su una retta*. Questa metafora consente di concettualizzare l'aritmetica e l'algebra nei termini della geometria e, quindi, di visualizzare, in termini spaziali, le funzioni e le equazioni. La metafora cartesiana consente inoltre di evocare per la coppia ordinata di numeri reali (x; y) un punto del piano. Questa metafora consente anche un calcolo di grandezze fortemente percettive legate al movimento, come la velocità e l'accelerazione, mediante l'evocazione della pendenza della retta tangente in un punto a una curva. La metafora *i numeri come punti su una retta* è quindi all'origine della geometria analitica e poi dell'analisi matematica, una delle più raffinate e potenti costruzioni dell'intelletto umano, che ha avuto e ha ancora innumerevoli applicazioni di carattere tecnico e i cui rudimenti si imparano nelle scuole secondarie

di secondo grado. In questa meravigliosa costruzione del pensiero matematico furono cruciali due processi: l'associazione di numeri a punti e la successiva associazione di questi a simboli che consentirono lo sviluppo dei procedimenti di calcolo caratteristici dell'analisi. Lo spazio e la variazione, naturalmente continui, furono riconcettualizzati, mediante la metafora di Cartesio, in termini di concetti discreti: numeri, punti discreti, simboli e regole di calcolo su essi (Lakoff & Nunez, 2000).
La metafora della *retta come insieme di punti* evoca una concezione dei punti e delle rette del tutto diversa dalla nostra concezione ordinaria, anzi, per certi aspetti in contraddizione con quella ordinaria. Infatti in quella ordinaria le rette hanno un'esistenza che è indipendente dai punti, mentre nella concezione moderna le rette sono costituite da punti. Nella concezione ordinaria le rette hanno proprietà intrinseche; nella concezione moderna le proprietà della retta sono espresse mediante le relazioni fra i due oggetti primitivi *punto* e *retta* ("due punti appartengono a una e una sola retta" ; "un punto appartiene a infinite rette"). Nella concezione ordinaria le rette sono inevitabilmente legate a un moto uniforme, mentre nella concezione moderna ogni riferimento al moto viene espunto, visto che i punti sono legati allo stare fermi, qui e ora (Lakoff & Nunez, 2000). Quella che ho chiamato concezione ordinaria dello spazio, della retta e dei punti deriva dal modo in cui il nostro sistema motorio interagisce con l'ambiente e quindi deriva dalla nostra biologia ed è in un certo senso inconscia e automatica, ineludibile. La concezione dello spazio propria della matematica moderna è una riconcettualizzazione di quella originaria resa possibile dalla metafora *i numeri come punti sulla retta*. Nella vita quotidiana, probabilmente anche in quella dei matematici professionisti, domina la concezione ordinaria della retta e dello spazio: serve un allenamento speciale per pensare in termini della metafora dell'*insieme di punti*.
Un piccolo esempio può aiutare a capire meglio perché: appoggiamo il dito indice sulla punta del nostro naso. Possiamo immaginare, senza troppa fatica, che esiste un certo punto del naso in cui è nulla

la distanza tra questo e il dito lì appoggiato. Ciò vuol dire che l'indice e il naso hanno una parte in comune? Ovviamente no: indice e naso sono oggetti distinti e anche le parti in contatto rimangono distinte, solo che la loro distanza è nulla. Intendiamo la stessa cosa quando affermiamo che due curve *si toccano in un punto* o che *sono tangenti in un punto*? La risposta è un sonoro e secco "no". Immaginiamo, per esempio, che una retta e una curva siano tangenti in un punto. Se si adotta la metafora "*gli spazi sono insiemi di punti*", allora la curva e la retta sono insiemi di punti dello spazio in cui vivono, per esempio insiemi di punti del piano. Il punto del piano in cui retta e curva si toccano è un punto del piano che appartiene a entrambe. Non esistono, come invece accade per l'indice e il naso, due zone, una della retta e una della curva, che si toccano: retta e curva hanno un punto in comune che è un punto del piano. Noi in genere concettualizziamo le figure geometriche come se fossero poste sul piano; la metafora *il piano è un insieme di punti* prevede invece che le figure siano pensate come insiemi di punti del piano.
Come già detto, non è facile pensare in termini della potente metafora della *retta come insieme di punti*, perché richiede una riconcettualizzazione di schemi mentali profondamente radicati: siamo di fronte a uno dei problemi dell'insegnamento – apprendimento della matematica, se non altro perché questa riconcettualizzazione è necessaria per comprendere gli oggetti elementari della matematica e lavorare consapevolmente con essi.
Gli insegnanti oggi possono trarre molto vantaggio dalla presenza di tecnologie che offrono risorse, un tempo inimmaginabili, per favorire la sostituzione della concezione ordinaria con quella dello spazio come insieme di punti: si pensi, infatti, allo schermo come al piano e alle figure come insiemi di pixel[2]. Le tecnologie offrono

---

[2] Naturalmente ciò richiede altre azioni metaforiche, per esempio immaginare schermi grandi quanto vogliamo e pixel piccoli quanto si vuole: qui entra in gioco un'altra metafora caratteristica della matematica, quella dell'infinito che viene

quindi risorse per aiutare a dare concretezza, senso e significato alle metafore ardite del pensiero matematico e, più in generale, di ogni pensiero astratto.
Vediamo, mediante un altro esempio, come le nuove tecnologie possano fornire esse stesse nuove metafore, nuove possibilità di concettualizzazione in genere improbabili in un ambiente tradizionale come quello della carta e della matita.
Soffermiamoci sul concetto di retta tangente in un punto a una curva. Spesso si dice che una retta è tangente a una curva in un punto se essa ha due intersezioni coincidenti con la curva. Lo studente difficilmente riesce a capire che cosa vuol dire *due intersezioni coincidenti*: se sono due sono distinte; se sono coincidenti è una. L'insegnante, allora, usa una delle metafore dell'infinito considerando una retta secante, passante per due punti distinti della curva A e B; poi, avvicinando B ad A fa immaginare allo studente che cosa accade alla secante quando A e B tendono a coincidere. Lo studente in genere pensa che quando A e B coincidono, la retta e la curva hanno un solo punto in comune. Il problema è che *essere tangente* per una retta a una curva e *avere un solo punto in comune* con la curva sono due cose ben diverse. Per esempio la retta e la curva di figura hanno un solo punto in comune, ma sono secanti:

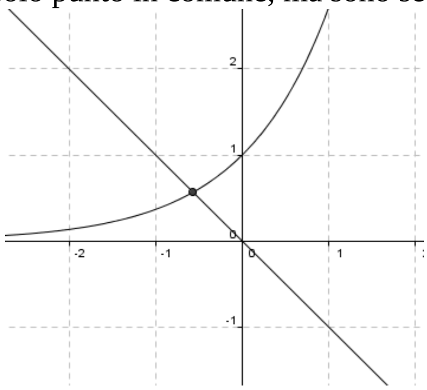

Figura 2

---

considerato come una sorta di chiusura (metaforica) di un processo indefinito, che può andare avanti quanto si vuole.

Il *solo punto in comune* della retta tangente con la curva è qualche cosa di ben diverso dal *solo punto in comune* di una secante. Quando si parla di retta tangente a una curva in un punto *P*, si fa riferimento al grafico della funzione lineare che, fra i grafici di tutte le infinite funzioni lineari passanti per *P*, approssima meglio la curva in *P*. Il concetto di *miglior approssimazione in P* non è banale, ma gli studenti possono essere aiutati nella costruzione di senso e di significato grazie all'uso delle funzioni di zoom[3] che un qualunque software di manipolazione grafico-simbolica mette oggi a disposizione e che la seguente successione di figure statiche può solo evocare[4].

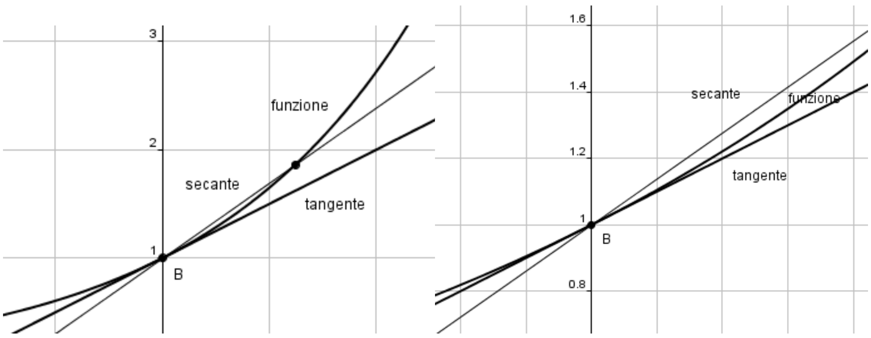

Figura 3

[3] Si tratta di comandi che consentono di effettuare cambiamenti di scala, ossia ingrandimenti e riduzioni, a piacere. Possono quindi essere utilizzati come veri e propri microscopi e telescopi per studiare le caratteristiche locali e globali di una funzione.

[4] In tali figure sono rappresentati zoom successivi, intorno al punto *B*, del grafico di una funzione, di una sua secante in *B* e della sua tangente in *B*. Come si può vedere, la differenza tra la secante e la tangente diviene, a ogni zoom centrato in *B*, sempre più marcata, mentre il grafico della funzione e la tangente tendono a coincidere.

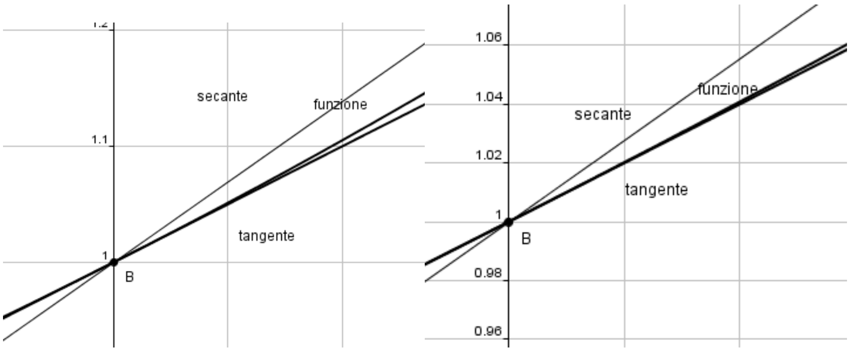

Figura 4

L'algebra

Qualunque riflessione sui discorsi matematici in aula non può non prendere in considerazione il caso dell'algebra per il grande spazio e l'attenzione che essa ha nella prassi didattica.

Il linguaggio algebrico è ostico per i principianti, perché impone una sobrietà nell'espressione che è stata impensabile prima del Rinascimento e che è impensabile anche per studenti molto giovani, più propensi a comunicare con tutte le ricchezze, le ambiguità e i barocchismi dello stile narrativo.

Si è già detto che in algebra una stessa espressione può essere considerata, allo stesso tempo, come processo o come prodotto: nel mondo degli oggetti concreti l'idea di un processo che possa essere pensato come un prodotto è però poco plausibile e ciò può creare difficoltà al principiante. Anche per questo l'algebra è difficile e anche a questo, probabilmente, sono dovuti i classici errori del tipo $2x + 1 = 3$ oppure $2x + 1 = 3x$ e le difficoltà di risolvere equazioni parametriche come, per esempio $3 - kx = x - k$.

Agli insegnanti di matematica risulta più che familiare la tensione fra la trasparenza di un simbolo e la sua capacità di essere manipolato. Si vorrebbe il simbolo più trasparente possibile, nel senso che si vorrebbe che il simbolo rinviasse naturalmente e automaticamente al suo referente, senza bisogno di controllo semantico; al tempo stesso, però, si vorrebbe che il simbolo fosse facilmente manipolabile in modo tale che il ragionamento possa essere incorporato nella manipolazione e reso automatico ed efficiente. Il problema è che, per i principianti, la trasparenza gioca spesso contro la facilità manipolatoria. Per esempio, consideriamo la seguente attività che in genere pongo a studenti di una prima classe di scuola secondaria di secondo grado nei primissimi giorni dell'anno: "che cosa si può dire, rispetto alla divisibilità, della somma di due numeri dispari consecutivi?"[5]

Le strategie utilizzate dagli studenti per rispondere sono abbastanza varie e interessanti. Ci sono studenti che si limitano a qualche verifica empirica, ossia limitata ad alcuni casi particolari; ci sono altri studenti che, dopo avere provato qualche caso particolare e avere individuato la proprietà più interessante ("si ottiene sempre un numero divisibile per 4") cercano di giustificarlo ricorrendo all'uso di lettere per indicare i numeri; ci sono studenti che partono immediatamente con l'uso di lettere.

Spesso la scelta è quella di indicare un numero dispari con d.

Alcuni scrivono $d + d = 2d$, concludendo che si ha un numero pari, perché la somma di due numeri dispari è pari.

Altri scrivono $d + (d + 2)$ e raggiungono la stessa conclusione, giustificando allo stesso modo.

Le due scritture, nonostante consentano di ottenere la stessa conclusione, sono molto diverse: $d + d$ non soddisfa quella che potremmo chiamare la *razionalità epistemica*. Infatti $d + d$ non traduce correttamente le informazioni contenute nel testo del problema. Invece $d + (d + 2)$ traduce correttamente, *la somma di due numeri dispari consecutivi* una volta che si sia stabilito di chiamare il primo d. Quindi $d + (d + 2)$ soddisfa la razionalità epistemica, ma non soddisfa quella che potremmo chiamare la *razionalità teleologica*: infatti non consente di raggiungere il fine di spiegare ciò che

---

[5] L'attività è stata utilizzata anche dal gruppo di ricerca di Paolo Boero e, per l'analisi che qui riporto, mi sono ispirato a un seminario tenuto da Boero a Imperia nel 2008.

l’analisi dei casi particolari suggeriva e cioè la somma di due numeri dispari consecutivi è un multiplo di 4.
Altre scritture, come per esempio

$$2n + 1 + d \text{ consec} = 2n + 1 + 2n + 1 + 2$$

soddisfano le razionalità epistemologica e forse anche quella teleologica (quindi scrittura corretta e buon controllo personale di ciò che si scrive), ma non quella che possiamo definire razionalità *comunicativa* o *retorica*, ossia particolarmente attenta anche all’uso di simboli adatti a favorire la comprensione di quanto si dice.
La razionalità epistemica ha a che fare con le conoscenze utilizzate per giustificare la validità; la razionalità teleologica con le scelte operate per conseguire un fine; quella comunicativa con l’efficacia della comunicazione. Nell’uso del linguaggio algebrico, in particolare, la razionalità epistemica ha a che fare con le espressioni ben formate, ossia con le trasformazioni di espressioni secondo regole sintattiche, con la coerenza tra modellizzazione matematica interna ed esterna, in modo che ci sia corrispondenza tra rappresentato e rappresentante (per esempio, un numero pari si indica con $2n$ e non con $2n+1$). La razionalità teleologica, invece, riguarda la gestione consapevole delle strategie risolutive di un problema, ma tocca anche la scelta di una rappresentazione efficace rispetto allo scopo. La razionalità comunicativa riguarda l’adesione consapevole, nella comunicazione, a regole condivise e la ricerca di espressioni che possano favorire la comprensione e la comunicazione. Spesso, nella fase di giustificazione si vede che le carenze degli studenti sono proprio sul versante della razionalità teleologica: gli studenti che scrivono $d + (d + 2)$ non riescono a conseguire il fine di giustificare che la somma di due numeri dispari consecutivi è divisibile per 4. Ciò invece può essere fatto con molta eleganza, nel registro simbolico, scrivendo $2n - 1 + 2n + 1 = 4n$, oppure nella lingua naturale, pensando alla struttura della semiretta numerica e ragionando sul fatto che la somma di due numeri dispari consecutivi è uguale al doppio del numero pari che sta in mezzo.

L'indicazione didattica è cercare di equilibrare la richiesta di trasformazioni sintattiche di espressioni algebriche, tipica della prassi mediamente operante nella scuola secondaria, con la richiesta di produzione di espressioni e loro successiva interpretazione. Analogamente è importante equilibrare la direzione flessibile e orientata a uno scopo (per esempio per dimostrare, oppure per modellizzare o per risolvere problemi) con la semplificazione meccanica di espressioni.
Si noti che la scrittura $d + (d + 2)$ è quella più trasparente per gli studenti, ma meno manipolabile: ecco un esempio specifico di quella tensione fra la trasparenza di un simbolo e la sua capacità di essere manipolato a cui sopra ho fatto cenno. I simboli d e $d + 2$ rinviano immediatamente ai loro referenti (numeri dispari consecutivi), ma il ragionamento che consente di dimostrare che la somma di due numeri dispari consecutivi è un multiplo di 4 non è incorporato nella manipolazione $d + d + 2$ e quindi non è reso automatico ed efficiente.
Un altro punto molto delicato dei discorsi algebrici è la dialettica tra i diversi *sensi* di espressioni che hanno lo stesso *significato* (per un approfondimento su questo punto di veda Arzarello, Bazzini, Chiappini, 1994). Consideriamo, per esempio, le due espressioni:

$$n^2 + n \qquad \text{e} \qquad n(n+1)$$

La proprietà distributiva della moltiplicazione rispetto all'addizione garantisce che le due scritture abbiano lo stesso significato, ossia, considerandole come funzioni,

$$\text{per ogni } n \text{ si ha che } n^2 + n = n(n + 1)$$

Può però capitare che alcune proprietà, come per esempio il fatto che le due espressioni diano sempre luogo a un numero pari, siano più evidenti in una delle due forme piuttosto che nell'altra. Per esempio, per quella che è la mia esperienza, posso dire che la maggior parte degli studenti non ha difficoltà a dire che $n(n+1)$ è pari perché o n oppure $n+1$ è pari e il prodotto fra un pari e un dispari è pari. Molti studenti, invece, trovano diverse difficoltà a vedere la stessa proprietà nell'espressione $n^2 + n$ che richiede di riconoscere

che l'elevamento al quadrato non modifica la parità di un numero e che due numeri entrambi pari o entrambi dispari danno come somma un numero pari.
Un'altra difficoltà che i principianti incontrano nei discorsi algebrici, in particolare nella risoluzione delle equazioni, è la tecnica di operare sull'incognita come se fosse un oggetto noto. In fondo l'algebra è il regno del simbolo e si simbolizza quando si desidera qualche cosa che è assente o dimenticata; non a caso, forse, il nome indiano per l'incognita è *frutto* (o *oggetto*) *del desiderio*. In algebra si lavora sul simbolo come sostituto dell'oggetto assente; come dice Pimm, si tratta di "un'occasione di consolazione. Attraverso il lavoro sul simbolo acquisiamo esperienza con il suo referente" (Pimm, 1995, pag. 109). Sarà anche un'occasione di consolazione dal punto di vista dell'esperto, ma per i principianti il discorso algebrico comporta più frustrazione che non consolazione, forse anche perché in algebra i simboli sembrano più distanti dal referente che non in aritmetica e in geometria. Per esempio, costruire modelli concreti per fare bene geometria e aritmetica non è semplice, perché gli oggetti matematici sono astratti; però costruire manipolativi algebrici è ancora più difficile, perché l'algebra è astrazione al secondo livello, visto che tratta di relazioni tra oggetti. D'altra parte può diventare concreto anche ciò che, pur astrato, è stato reso familiare dall'esperienza e dal tempo: la concretezza è relativa quindi alla nostra esperienza con certi discorsi e ciò garantisce che opportune scelte didattiche, attente ai contesti, ai tempi, ai problemi, alle rappresentazioni, possano rendere realizzabile il difficile compito di introdurre tutti gli studenti ai discorsi algebrici.

La visualizzazione

Mi limito a un brevissimo cenno a un argomento che richiederebbe interi libri per essere trattato adeguatamente. Volevo evitare di parlare della visualizzazione, ossia dell'uso delle immagini, che ha un'importanza essenziale nel discorso matematico in classe, proprio per l'eccessiva ampiezza dell'argomento; alcune brevi osser-

vazioni, però, mi sembrano necessarie, anche se mi rendo conto che, in questo modo, corro il rischio di banalizzare un tema assai delicato e importante.
La mediazione visiva è essenziale nel discorso matematico; non si tratta solo delle immagini che accompagnano problemi, ragionamenti e dimostrazioni in geometria. Si pensi anche all'efficacia della mediazione simbolica nel discorso computazionale: anche quando si calcola a mente una semplice espressione è probabile che si immagini la sequenza delle operazioni scritte da qualche parte e condotte secondo le usuali routine. L'automatizzazione delle routine e delle immagini associate ai procedimenti routinari è centrale nel discorso matematico, non solo per i principianti. Per esempio, è probabile che anche molti insegnanti e non solo gli studenti, una volta rappresentate le frazioni 2/3 e 5/13 con le coppie (2,3) e (5,13), siano indotti a tornare alla consueta scrittura non lineare per eseguire l'addizione (2,3)+(5,13): "attraverso anni di esercizio la sequenza dei movimenti oculari da eseguire su questo simbolo verticale canonico è diventata la vostra seconda natura e a/b è diventato la vostra realizzazione principale delle frazioni semplici" (Sfard, 2009, pag. 191).
Alcuni hanno teorizzato l'opportunità di passare, dalla scrittura simbolica tradizionale della matematica che ha carattere ideografico (si pensi alle espressioni frazionarie, agli integrali), a una scrittura lineare, tipica, per esempio, dei comandi dei sistemi di manipolazione simbolica. Secondo Anna Sfard il passaggio comporta rischi, perché la linearità della scrittura fonetica "è ingombrante, mentre la notazione simbolica, che è per sua natura ideografica, trasforma segmenti discorsivi consistenti in totalità concise e atemporali, dando la possibilità di percepire facilmente la loro struttura ordinata" (Sfard, 2009, pg. 192).
La mediazione iconica dovrebbe essere quasi ovunque presente nei discorsi matematici in classe. Si pensi, per esempio, ai grafici che aiutano a risolvere e a dare significato a equazioni e disequazioni: un conto è risolvere una disequazione di secondo grado basandosi

su una memorizzazione delle regole del segno del trinomio $ax^2 + bx + c$ e un altro è dare *senso* a queste regole aiutandosi con la rappresentazione grafica della funzione $f(x) = ax^2 + bx + c$.
L'uso di grafici è un ausilio molto importante per far capire, sia per l'insegnante, quando deve spiegare agli studenti, sia per lo studente, quando deve descrivere le proprie strategie risolutive o giustificare le proprie risposte.
Prendiamo per esempio il seguente problema assegnato a diverse classi di studenti del biennio di scuola secondaria di secondo grado:

Considerare, su un segmento AB di lunghezza fissata, un punto C. Costruire su AC e su CB, da una stessa parte rispetto ad AB, due quadrati di lati AC e CB. Che cosa è possibile dire dell'area e del perimetro della figura formata dai due quadrati al variare di C su AB? Giustificare la risposta.

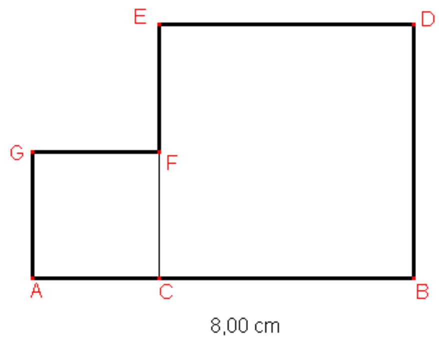

Figura 5

Se gli studenti hanno a disposizione un software di geometria dinamica, come Cabri o Geogebra o TI-*n*spire, per risolvere il problema, attivano in genere strategie che fanno riferimento alle risorse che tali software mettono a disposizione dell'utente. Ciò porta spesso a una sorta di effetto ombra sul linguaggio simbolico. Inoltre, spesso, le immagini che compaiono sullo schermo non sono vi-

ste con occhio matematico: gli studenti si limitano a percepire figure che variano.
Per esempio, nel problema ora presentato, gli studenti costruiscono il poligono di cui si chiede di studiare perimetro e area. A un primo livello, unicamente percettivo, osservano che *se C si muove, allora il poligono cambia*. Inseriscono quindi le misure del perimetro e dell'area del poligono e ciò permette loro di passare dal livello puramente percettivo a un livello relazionale: *se C varia, allora perimetro e area cambiano, quindi perimetro e area dipendono, per esempio, dalla misura di AC*. Alcuni studenti dimostrano una buona sensibilità numerica e la capacità di associarla alle proprie percezioni quando osservano che il numero che esprime la variazione dell'area non varia con velocità costante. Ciò li porta a produrre qualche congettura più raffinata sulle modalità di variazione dell'area (per esempio non varia linearmente con *AC*). In tal modo passano da un livello puramente relazionale a uno che possiamo dire variazionale, ossia attento a come variano le grandezze oggetto di attenzione (*crescono o decrescono ? Come crescono e come decrescono?*).
In genere, grazie anche ai suggerimenti dell'insegnante, gli studenti verificano le proprie congetture introducendo un sistema di riferimento cartesiano e aiutandosi con il software per disegnare il grafico delle funzioni *area* e *perimetro.* In queste strategie risolutive non compare, in genere, l'uso del linguaggio algebrico e, spesso, rimangono escluse anche le esplorazioni dinamiche mentali, così importanti per lo sviluppo del pensiero matematico. È come se le enormi risorse messe a disposizione dal software inibissero certe capacità molto importanti per il pensiero matematico. Da una parte l'uso del software innesta strategie interessanti e originali e consente a tutti di partecipare attivamente alla risoluzione del problema; dall'altra il software sembra una sorta di protesi al quale non si vuole più rinunciare, con il rischio di inibire certe funzioni vitali per l'evoluzione verso un discorso matematico maturo. Non volendo rinunciare alle risorse offerte dal software per effettuare

esplorazioni e favorire la produzione di congetture e, al tempo stesso, essendo preoccupato per il rischio di favorire l'inibizione di facoltà importanti per lo sviluppo del discorso matematico, ho pensato di introdurre alcune varianti nell'attività proposta. Innanzitutto ho pensato di richiedere una fase iniziale, molto breve, di lavoro individuale sulla situazione problematica, senza l'uso del software e nemmeno della carta e della matita. In seguito gli studenti avevano una quindicina di minuti per provare a risolvere il problema individualmente solo con carta e matita. Quindi potevano lavorare in gruppo, discutendo e condividendo le diverse strategie sempre per una quindicina di minuti solo con carta e matita. Infine, dopo queste prime fasi potevano passare, se lo desideravano, all'uso del software, o per verificare la correttezza delle proprie strategie risolutive o per farsi aiutare nella fase esplorativa. Infine gli studenti, in gruppo, dovevano giustificare la strategia risolutiva al fine scelta e condivisa. È interessante osservare che il ricorso alla mediazione visiva, per alcuni studenti, avviene già nella primissima fase individuale, senza l'uso di carta e matita: non è raro osservare gesti degli studenti che descrivono nell'aria situazioni corrispondenti a casi particolari della configurazione oggetto di studio. In genere sono proprio gli studenti che hanno questa capacità anticipatoria ed esplorativa senza l'uso di alcuno strumento che producono le prestazioni migliori nella risoluzione del problema. Qui però voglio soffermarmi sull'uso della mediazione visiva da parte degli studenti nel lavoro di gruppo. Le immagini seguenti, tratte da una videoregistrazione dell'attività, mostrano gli studenti che spiegano all'insegnante un fatto che li aveva inizialmente stupiti e cioè che il grafico del perimetro è costituito da due segmenti.

a) b) c) d)

Figura 6

M.: "… Si toglie a un lato e si aggiunge all'altro e …."
G.: "Sei d'accordo che sia simmetrico"
M.: " E sì, perché comunque si toglie quando scende si toglie un pezzo (fig. 6a)) … si toglie da un lato e si aggiunge all'altro … quando si arriva dall'altra parte (fig. 6b)) lo si aggiunge dall'altra … e lo si è tolto prima ancora dall'altro lato … Quindi si aggiunge e si toglie (fig. 6c)) … non so come spiegare (fig. 6d)).
Come si può notare, il linguaggio è molto confuso; il grafico viene legato agli aspetti percettivi del movimento del punto C e, in particolare, del movimento dei due quadrati. Le parole di M. non consentono di capire quello che vuole dire, ma i gesti, che il filmato più ancora delle fotografie da esso estratte, mette in evidenza, contengono, in modo implicito, molte informazioni: nel movimento che porta *C* da *A* verso il punto medio *M* di *AB*, la quantità *AC* – *CB* (che è l'unica quantità variabile da cui dipende il perimetro del poligono) sta diminuendo. Naturalmente, se *AC* e *CB* variano linearmente, anche la loro differenza varia linearmente e quindi il perimetro. Il perimetro diminuisce fino a raggiungere un minimo, per cui *AC* = *CB*. Nel successivo movimento di *C* da *M* verso *B*, la quantità *CB* – *AC* aumenta in modo simmetrico a come avveniva la diminuzione di *AC* – *CB* e quindi il perimetro varia linearmente fino a raggiungere un massimo in *B*, quando *CB* – *AC* è massima.
Le immagini di figura 7, tratte da una videoregistrazione dell'attività, mostrano gli studenti che spiegano all'insegnante perché l'area varia quadraticamente.
Insegnante: " E questo ce lo aspettiamo, che le aree non cambiano linearmente? Per quale motivo?
A: "Perché comunque è quadratica";
G: "È Quadratica";
V: È quadratica … c'è una x^2";
M.: "Ci si avvicina sempre più … c'è un minimo (la sua mano si sposta verso destra, lentamente, con pollice e indice che si avvicinano, fig. 7 a)) … ci si avvicina "
Insegnante: "Ci si avvicina .."

M: “Pian piano che si va … che l’area diminuisce (e con la mano percorre più volte una curva con la concavità rivolta verso l’alto) … ci si avvicina a un minimo che poi per un piccolissimo tratto rimane quasi costante (con la mano percorre una arco di parabola con la concavità rivolta verso l’alto nei pressi del vertice, lentamente, fig. 7b)) e poi l’area aumenta di nuovo (muove la mano verso destra percorrendo molto velocemente una curva con la concavità rivolta verso l’alto, fig. 7 c)).

a) b) c)

Fig 7

Anche se il discorso di M. è tutt’altro rispetto a quello che si può chiamare un discorso matematico maturo, non si può negare che esso riveli una certa comprensione della situazione e non sia così inadeguato, grazie anche al ricorso a gesti iconici a descrivere la soluzione del problema proposto. La mediazione iconica e gestuale è in questo caso fortissima e forse marca un passaggio probabilmente importante verso il discorso matematico maturo.
C’è un punto molto delicato nella mediazione iconica, che può incidere negativamente nell’evoluzione dei discorsi matematici scolastici. L’insegnante si aspetta che, come avviene nel discorso matematico maturo, gli studenti identifichino gli oggetti del discorso non direttamente e globalmente, come, per esempio, avviene per il riconoscimento di un volto e, in genere per le immagini. L’insegnante si aspetta che lo studente riconosca, per esempio, un rombo da un conteggio dei suoi lati (quattro) e dalla verifica (non empirica, ma basata sui dati o sulle assunzioni) che tutti i lati siano congruenti. L’insegnante si aspetta, cioè, che lo studente ricorra al-

la definizione di rombo. Tale tipo di identificazione è mediato discorsivamente, perché fa ricorso a una definizione. Gli studenti, invece, spesso riconoscono gli oggetti, per esempio una figura geometrica, non facendo ricorso a una definizione, ma basandosi su stereotipi o, meglio su prototipi. Così un rombo, più che essere semplicemente un quadrilatero con i lati congruenti, è una figura "un po' più stretta che larga", o "poco più larga che stretta", che magari "poggia su un vertice" e che viene riconosciuta, come per i volti, direttamente e globalmente. L'identificazione mediata dal discorso richiede un profondo cambiamento di prospettiva: si tratta di passare da una formulazione del tipo *questo è un rombo*, che è tipicamente un enunciato che esprime una verità su un oggetto di un mondo a formulazioni (più o meno esplicite) del tipo *questa forma può essere chiamata rombo* che è un'affermazione su un oggetto di un discorso e non su un oggetto di un mondo. "La difficoltà della transizione dalle narrazioni determinate dal mondo stesso al discorso sul discorso è stata corroborata sia sul piano teorico che su quello empirico: la ricerca ha dimostrato che questo cambiamento avviene invariabilmente in modo lento" (Sfard, 2009, pag. 268).
Infine, come riportato in (Radford, 2006, pag. 117), Colette Laborde ricorda che "si tratta di far capire agli allievi che, in geometria, devono appoggiarsi a ciò che vedono per formulare idee necessarie alla soluzione di un problema, ma che non hanno più il diritto di utilizzare ciò che vedono quando devono ragionare con *rigore* e collocarsi in tal caso in un inattaccabile livello teorico". Non si tratta certo di richieste semplici!

Conclusioni

Se è vero, come abbiamo sostenuto e argomentato, che l'insegnamento – apprendimento della matematica in classe avviene mediante discorsi a cui partecipano esperti e principianti, allora il suo successo non può realizzarsi senza l'allineamento volontario dei partecipanti, senza la disponibilità degli esperti ad ascoltare il disagio e il disorientamento dei principianti e senza la volontà di questi ultimi di inserirsi nel nuovo discorso. Come ricorda Gadamer (in Sfard, 2009, pag. 323): “ Un aspetto caratteristico di ogni vera conversazione è che ognuno si apre all’altra persona, accetta veramente il suo punto di vista come degno di considerazione ed entra in lui tanto da comprendere non un particolare individuo, ma ciò che egli dice”.

Si tratta di una richiesta non facile da soddisfare, soprattutto per studenti di tredici – sedici anni, che si trovano in una fase della propria esistenza in cui stanno cercando di formarsi una propria identità e sono pertanto poco disposti ad ascoltare i discorsi degli adulti, genitori e insegnanti in particolare. Sfiniti dai profondi cambiamenti innescatisi con la seconda fase dell’adolescenza, sono indisponibili ad altri cambiamenti, quindi poco propensi ad apprendere, perché l’apprendimento richiede disponibilità a cambiare, a ristrutturare le proprie reti concettuali.

È però vero che, come scrive Anna Sfard, “nell’accordo di apprendimento-insegnamento c’è anche un’importante dimensione etica. Se è autentico e solido, quest’accordo promuove valori come il rispetto per gli altri e l’apertura alla differenza. Se il nuovo arrivato, di fronte al discorso sconosciuto accetta il suo ruolo di discente è come se dicesse a se stesso *se queste persone parlano in questo modo, devono avere buone ragioni per farlo [...] allora perché non dovrei mettere da parte la sfiducia e fare del mio meglio per sondare la logica interna del loro discorso?* In modo complementare, l’anziano che assume volontariamente il ruolo di guida chiarisce che il nuovo arrivato è il benvenuto e che le abilità comunicative che egli sta sviluppando meritano seria considerazione e stima anche quando si conformano solo in parte alle sue. L’accordo di apprendimento-insegnamento presuppone quindi tolleranza e solidarietà. Il suo valore va ben al di là del suo contributo ai processi ai apprendimento di un particolare discorso” (Sfard, 2009, pag. 328).

Vale quindi la pena di impegnarsi nel tentativo di catturare la disponibilità dello studente a discorrere, a incuriosirlo, condizione necessaria per l’insorgere dell’interesse, anche perché, "l'educazione in generale e la comunicazione in particolare sono mezzi per apprendere e condividere un mondo culturale formato storicamente, un mondo nel quale la diversità e la differenza sono viste non come mancanza o insufficienza, ma come le qualità fondamentali e vincenti dell'esistenza umana […] La matematica può giocare un ruolo primario nei progetti educativi del Secolo XXI se si promuove un'aula come comunità di apprendimento dove gli allievi lavorano in modo critico e riflessivo verso il compimento di una forma comunitaria possibile di vita" (Radford, 2006, pag. 8).

Bibliografia

Arzarello, F., Bazzini, L. & Chiappini, G. (1994). *L'algebra come strumento di pensiero. Analisi teorica e considerazioni didattiche*, Quaderno 6 del CNR, Progetto strategico ITD, Pavia.

Arzarello, F., Paola, D., Robutti, O. & Sabena, C. (2008). Gestures as semiotic resources in the mathematics classroom, *Educational Studies in Mathematics, Springer Netherlands.*

Lakoff, G. & Nunez, R. (2000). *Where Mathematics come from*, Basic Books, New York, trad. Italiana a cura di Ornella Robutti, (2005). *Da dove viene la matematica*, Bollati Boringhieri, Torino.

Paola, D. (2004). Insegnamento - apprendimento tecnologico, *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, vol. 27A - B n. 6, 671 - 704.

Paola, D. (2005). L'insegnamento apprendimento del *Calculus* e le nuove tecnologie: una rivoluzione a portata di mano, *Progetto Alice*, vol. VI, n. 16 43 - 87.

Pimm, D. (1995) *Symbols and meanings in school mathematics*, Routledge, London & New York.

Radford, L. & Demers, S. (2006), *Comunicazione e apprendimento*, Pitagora, Bologna.

Sfard, A. (2009). *Psicologia del pensiero matematico*, Erickson, Trento.