

Università degli Studi di Ferrara

2014-2015 – Corso TFA - A048 – Matematica applicata

Didattica della matematica applicata all'economia e alla finanza

18 marzo 2015

**Appunti di didattica della Matematica finanziaria**  
**Rendite, costituzione di un capitale,**  
**ammortamenti e leasing**

Luigi Tomasi  
[luigi.tomasi@unife.it](mailto:luigi.tomasi@unife.it)

1

## **Prerequisiti didattici**

- Capitalizzazione composta
- Progressioni geometriche
- Funzioni esponenziali ed equazioni exp
- Logaritmi ed equazioni log.
- Grafici di funzioni

### Strumenti

- Uso della calcolatrice scientifica/finanziaria
- Foglio elettronico (Excel, Calc, GeoGebra,..)

## Obiettivi di apprendimento

### Competenze

- Avere buona padronanza dei concetti di rendita certa, sapendo come utilizzarlo nei problemi di costituzione di un capitale e di ammortamento di un prestito
- Interpretare i problemi finanziari elaborando il confronto tra soluzioni possibili basate su impostazioni diverse
- Essere in grado di risolvere problemi finanziari eseguendo i calcoli in modo manuale e con gli strumenti di calcolo, sapendo presentare report numerici e grafici.
- Risolvere problemi finanziari tipici applicando modelli efficaci mediante gli strumenti adeguati (Foglio elettronico: Excel, Calc, GeoGebra,..)

3

## Obiettivi di apprendimento

### Conoscenze

- Concetto di rendita certa
- Relazione tra rendite anticipate e rendite posticipate

4

## Obiettivi di apprendimento

### Abilità

- Saper operare nei diversi regimi determinando i parametri in gioco
- Saper risolvere problemi di capitalizzazione e di attualizzazione nei tre regimi
- Saper applicare le regole a casi applicativi, effettuando simulazioni diverse
- Utilizzare appropriati supporti informatici per rappresentare graficamente le leggi finanziarie e usare gli strumenti di calcolo più adeguati

5



Si dice *rendita* qualsiasi successione o flusso di somme di denaro, tutte da incassare o tutte da pagare, ciascuna dopo una diversa durata.

Le somme di denaro sono chiamate *rate*.

Le date si chiamano *scadenze*.

Intervallo di tempo tra due rate si chiama *periodo*.

6

## Le rendite a rata costante immediata posticipata

Rate costanti

Periodo costante

La prima rata scade alla fine del primo periodo.

Immediata significa che la decorrenza si ha il primo periodo.

Posticipata: ogni rata scade alla fine di ogni periodo.



7

## Classificazione delle rendite

Rispetto all'importo della rata:

- Rata costante
- Rata variabile

Rispetto al periodo (se costante)

- Annuale
- Frazionata
- Poliennale

Rispetto alla scadenza delle rate

- Anticipata
- Posticipata

Rispetto alla durata

- Temporanea
- Perpetua

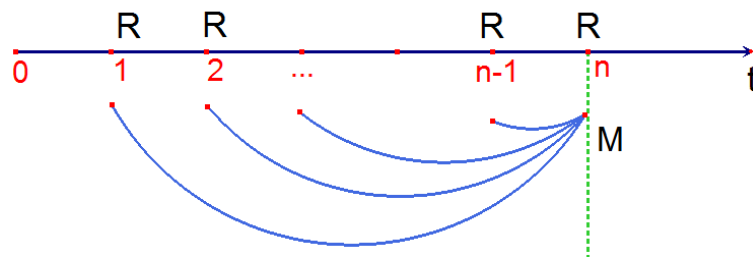
Rispetto alla decorrenza

- Immediata
- Differita

8

## Montante di una rendita immediata posticipata

È la somma  $M$  dei montanti di ciascuna rata, calcolati a partire dalla loro scadenza e fino a  $t = n$ , cioè fino alla scadenza dell'ultima rata.



9

## Calcolo del montante di una rendita immediata posticipata

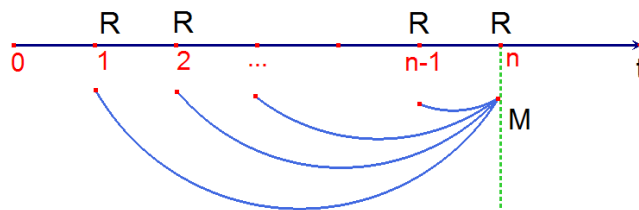
Il calcolo fornisce:

$$M = R + Ru + Ru^2 + \dots + Ru^{n-1}$$

$$M = R(1 + u + u^2 + \dots + u^{n-1}) = R \left( \frac{u^n - 1}{u - 1} \right)$$

$$M = R \frac{(1+i)^n - 1}{i} = R \cdot s_{\overline{n}|i}$$

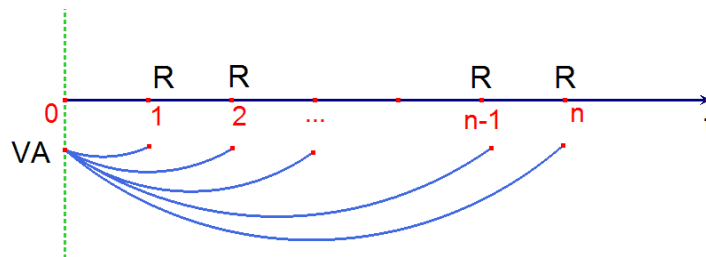
s figurato  $n$ , al tasso  $i$ , posticipato



10

## Valore attuale di una rendita immediata posticipata

È la somma VA dei valori attuali di ciascuna rata, calcolati a partire dalla loro scadenza e fino  $t = 0$ , cioè fino a un periodo prima della *scadenza della prima rata*.



11

## Calcolo del valore attuale di una rendita immediata posticipata

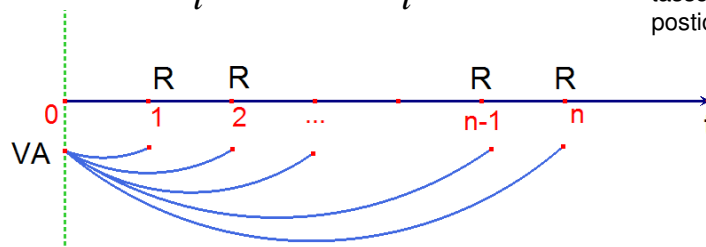
Il calcolo fornisce:

$$V_A = Rv + Rv^2 + \dots + Rv^n$$

$$V_A = R(v + v^2 + \dots + v^n) = Rv \left( \frac{1 - v^n}{1 - v} \right)$$

$$V_A = R \frac{1 - v^n}{i} = R \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i} = R \cdot a_{\overline{n}|i}$$

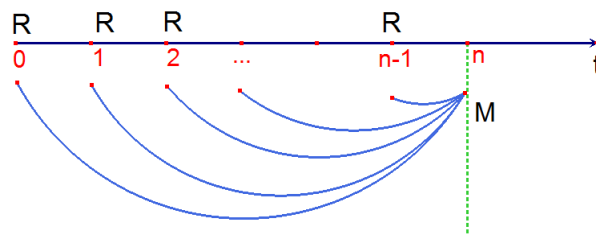
a figurato n, al tasso i, posticipato



12

## Montante di una rendita immediata anticipata

È la somma  $M$  dei montanti di ciascuna rata, calcolati a partire dalla loro scadenza e fino a  $t = n$ , cioè fino alla scadenza dell'ultima rata.



13

## Calcolo del montante di una rendita immediata anticipata

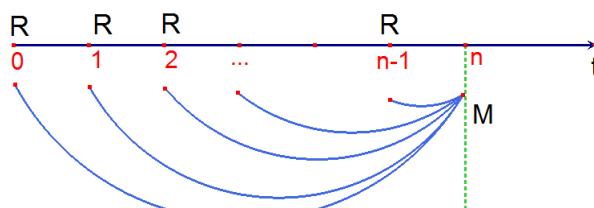
Il calcolo fornisce:

$$M = Ru + Ru^2 + \dots + Ru^n$$

$$M = R(u + u^2 + \dots + u^n) = Ru \left( \frac{u^n - 1}{u - 1} \right)$$

$$M = R \frac{(1+i)^n - 1}{i} (1+i) = R \cdot \ddot{s}_{\overline{n}|i}$$

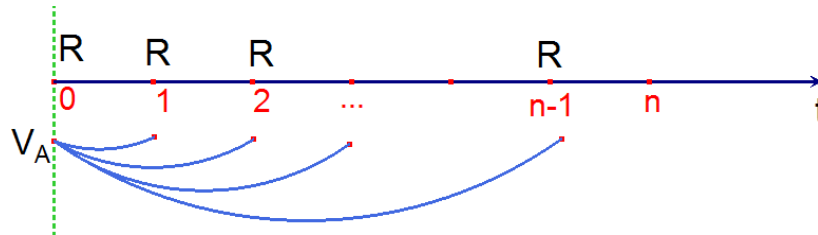
s figurato n, al tasso  $i$ , anticipato



14

## Valore attuale di una rendita immediata anticipata

È la somma VA dei valori attuali di ciascuna rata, calcolati a partire dalla loro scadenza e fino  $t = 0$ , cioè fino alla scadenza della prima rata.



15

## Calcolo del valore attuale di una rendita immediata anticipata

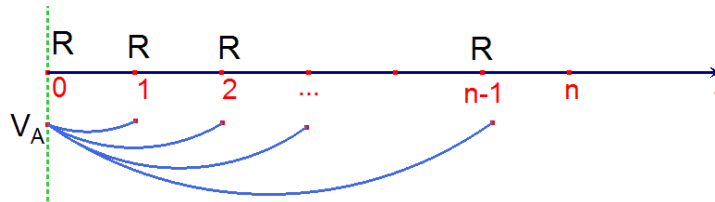
Il calcolo fornisce:

$$V_A = R + Rv + Rv^2 + \dots + Rv^{n-1}$$

$$V_A = R(1 + v + v^2 + \dots + v^{n-1}) = R \left( \frac{1 - v^n}{1 - v} \right)$$

$$V_A = R \frac{1 - v^n}{i} u = R \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i} (1+i) = R \cdot \ddot{a}_{\overline{n}|i}$$

a figurato  
n, al tasso  
i,  
anticipato

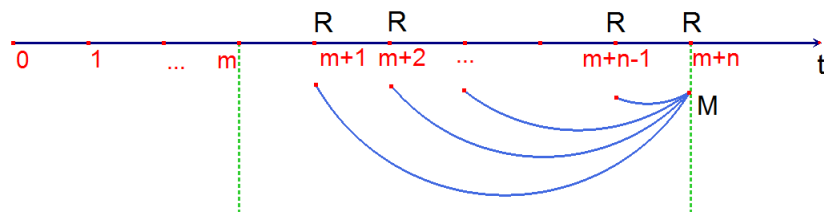


16



## Montante di una rendita differita

Una rendita è differita quando la prima rata non scade immediatamente, cioè non viene pagata entro il primo periodo. Inutile distinguere tra rendite differite posticipate e anticipate. Differimento =  $m$ . Il montante non cambia.



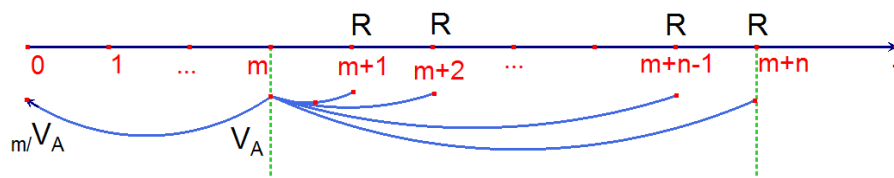
17

## Calcolo del valore attuale di una rendita differita

Il calcolo del valore attuale fornisce:

$${}_mV_A = R \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i} (1+i)^{-m} = R \cdot {}_m|a_{\overline{n}|i}$$

a figurato  $n$ , al tasso  $i$ , differito  $m$



18

## Problemi sulle rendite: calcolo della rata

Sappiamo che una rendita immediata, posticipata di 10 rate costanti, semestrali, in  $t=0$  equivale a 8000 euro. Calcola la rata al tasso semestrale del 2,6%.

$$V_A = R \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i} = R \cdot a_{\overline{n}|i} \rightarrow$$

$$R = \frac{V_A}{a_{\overline{n}|i}} = V_A \frac{i}{1 - (1+i)^{-n}} = 8000 \cdot \frac{0,026}{1 - (1 + 0,026)^{-10}} = 916,80 \text{ euro}$$

19

## Problemi sulle rendite: calcolo del numero delle rate

Sappiamo che una rendita immediata, posticipata a rate costanti, semestrali, in  $t=0$  equivale a 8000 euro con una rata di 918,80 euro. Calcola il numero di rate semestrali al tasso semestrale del 2,6%.

$$V_A = R \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i} = R \cdot a_{\overline{n}|i} \rightarrow$$

$$iV_A = R(1 - (1+i)^{-n})$$

$$1 - (1+i)^{-n} = \frac{iV_A}{R}$$

$$(1+i)^{-n} = 1 - \frac{iV_A}{R} \rightarrow n \log(1+i) = -\log\left(1 - \frac{iV_A}{R}\right) \dots$$

20

## Problemi sulle rendite: calcolo del tasso di interesse

Nello stesso esempio, chiediamoci a quale tasso di interesse semestrale 10 rate posticipate immediate di 918,80 euro equivalgono oggi ( $t = 0$ ) a 8000 euro.

Dobbiamo risolvere, rispetto ad  $i$ , l'equazione:

$$V_A = R \frac{1 - (1 + i)^{-n}}{i}$$

che equivale a trovare gli zeri della funzione:

$$f(i) = V_A - R \cdot \frac{1 - (1 + i)^{-n}}{i}$$

21

## Problemi sulle rendite: calcolo del tasso di interesse

Per trovare lo zero della funzione

$$f(i) = V_A - R \cdot \frac{1 - (1 + i)^{-n}}{i}$$

si può procedere per interpolazione lineare o con uno dei metodi di analisi numerica (ad esempio bisezione).

22

**Problemi sulle rendite:  
calcolo del numero delle rate  
caso non intero**

Il prestito di 10000 euro oggi può essere saldato con versamenti di 1200 euro a partire dall'anno prossimo. Quanti devono essere i versamenti se il tasso è del 2,5 annuo?

Facendo il calcolo si trova  $n \sim 9,46$ .

Poiché  $n$  risulta non intero, conviene scegliere o 9 rate oppure 10 rate. Rifacendo il calcolo, per 9 rate si trova  $R=1254,57$  euro, e per 10 rate si trova  $R'=1142,59$  euro.

23

**Una applicazione delle rendite:  
calcolo di TAN e TAEG:  
literacy finanziaria per il cittadino**

Può capitare negli opuscoli informativi e nelle pubblicità riguardanti beni venduti a rate, di leggere le parole TAN e TAEG, ad esempio "TAN = 5 % e TAEG = 5,87%"..

Che significato hanno queste sigle?

24

## TAN

E' l'acronimo di *tasso annuale nominale*.

E' il tasso d'interesse che rende il prezzo di un bene equivalente alla successione di rate necessarie per pagarlo.

Se il periodo delle rate è diverso dall'anno, si moltiplica il tasso periodale ottenuto in questo modo per il numero di rate previste in un anno.

$$\begin{cases} V = R \cdot \frac{1 - (1 + i_k)^{-n}}{i_k} \\ TAN = k \cdot i_k \end{cases}$$

25

## TAEG

**(è obbligatorio indicarlo per Legge)**

E' l'acronimo di *tasso annuale effettivo globale* e si calcola come il TAN, ma tenendo conto però anche dei costi amministrativi (costo dell'istruttoria  $C$ , e commissioni di incasso  $c$ ). L'eventuale calcolo e passaggio dal tasso periodale al tasso annuale, si calcola a regime composto.

$$\begin{cases} V - C = (R + c) \cdot \frac{1 - (1 + i_k)^{-n}}{i_k} \\ TAEG = (1 + i_k)^k - 1 \end{cases}$$

26

## TAN e TAEG un esempio

Un garage del valore di 40000 euro viene acquistato con mutuo quinquennale TAN del 5%. Le rate posticipate sono versate semestralmente.

- Determiniamo la rata  $R$  e il tasso effettivo  $i$ .
- Calcolare il TAEG nel caso in cui la banca richieda 400 euro di spese iniziali e, ogni semestre, 3 euro per la polizza assicurazione antincendio e 2 euro per le spese di incasso.

27

## TAN e TAEG un esempio

a)

Il tasso periodale  $i_2 = 2,5\%$ .

Il tasso effettivo annuo  $i = 5,06\%$ .

Calcoliamo la rata risolvendo l'equazione

$$V_A = R \frac{1 - (1 + i)^{-n}}{i}$$

Si ottiene  $R \approx 4570,35$  euro ogni semestre.

28

## TAN e TAEG un esempio

b)  $V = 40000$  euro

$R = 4570,35$  euro

$n = 10$  rate

$C = 400$  euro

$c = 5$  euro assicurazione e spese di incasso

Si risolve per tentativi l'equazione:

$$V - C = (R + c) \cdot \frac{1 - (1 + i_k)^{-n}}{i_k}$$

Si trova TAEG  $\approx 5,51\%$ .

29

## Le rendite perpetue

Rate costanti

Periodo costante

La prima rata scade alla fine del primo periodo.

Perpetue significa che  $n$  tende all'infinito

Posticipata: ogni rata scade alla fine di ogni periodo.



30

## Calcolo del valore attuale di una rendita perpetua posticipata

Non ha senso calcolare il montante.

$$V_A = R \frac{1-v^n}{i} = R \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} = R \cdot a_{\overline{n}|i}$$

se  $n \rightarrow \infty$

$$V = R \frac{1-0}{i} = R \cdot \frac{1}{i} = R \cdot a_{\overline{\infty}|i}$$



31

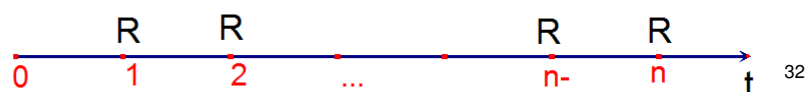
## Costituzione di un capitale

Vogliamo costituire, ad es., un capitale di 100000 euro tra 6 anni in regime composto del 2% semestrale.

Una prima possibilità potrebbe essere investire oggi il valore attuale di questo capitale.

L'altra possibilità, più interessante, è investire ogni sei mesi una somma costante di 7455,96 euro.

Questa si chiama costituzione graduale di un capitale



32



## Piano di costituzione di un capitale

Nel caso dei versamenti rateali costanti si usa compilare una tabella, che costituisce il piano di costituzione graduale del capitale ([foglio Excel](#)).

Periodo	Rata	Fondo iniziale	Interessi	Fondo finale
1	7455,96	0	0	7455,96
2	7455,96	7455,96	149,12	15061,04
3	7455,96	15061,04	301,22	22818,22
	----			
12	7455,96			<b>100000,00</b>

33

## Piani di ammortamento

Sono una importante applicazione delle rendite.

Ammortamento = processo mediante il quale il debitore restituisce il prestito (un finanziamento)

Piano di ammortamento = ripartizione nel tempo e scadenziario dei versamenti

$S$  = importo prestato

$R_h$  = rata

$C_h$  = quota capitale

$I_h$  = quota interessi

$D_h$  = debito che rimane dopo aver versato  $C_h$

$n$  = numero delle rate

$i_k$  = tasso di interesse

34

## Ammortamento graduale

Tra le varie possibilità quella più utilizzata è l'ammortamento graduale

- a quote capitali costanti (**ammortamento italiano**), poco usato
- con rata costante, o **ammortamento francese**, il più usato

35

## Ammortamento italiano

A quote capitali costanti (**ammortamento italiano**), poco usato, perché all'inizio le rate sono maggiori. [Vedi foglio Excel](#)

$$\text{quota capitale} = C_1 = C_2 = \dots = C_n = C \quad C = \frac{S}{n}$$

$$\text{debito residuo} = D_h = (n - h) \cdot \frac{S}{n}$$

$$\text{rata} = R_h = C_h + I_h \quad \rightarrow \quad R_h = \frac{S}{n} + i_k \cdot D_{h-1}$$

36

## Ammortamento francese

A rate costanti: è il più usato in pratica. E' detto anche progressivo. Rate costanti e quote capitale decrescenti. [Vedi foglio Excel](#)

$$rata = R_1 = R_2 = \dots = R_n = R \quad \rightarrow \quad R = S \cdot \frac{i_k}{1 - (1 + i_k)^{-n}}$$

$$debito \text{ residuo} = D_h = R \cdot \frac{1 - (1 + i_k)^{h-n}}{i_k}$$

$$quota \text{ capitale} = C_h = R - I_h \quad \rightarrow$$

$$C_h = R - I_h = R - i_k R \cdot \frac{1 - (1 + i_k)^{h-n-1}}{i_k} = R(1 + i_k)^{h-n-1}$$

37

## Leasing

Il *Leasing* è un contratto con cui un soggetto, spesso un'azienda, ottiene in uso da un altro soggetto un bene per un certo periodo.

L'azienda che riceve il bene si chiama **locataria**.

L'azienda che concede l'uso del bene, mantenendone la proprietà si dice **locatrice**.

L'azienda locatrice è spesso una società finanziaria specializzata in questo tipo di contratti e acquista il bene da un produttore indicato dal locatario.

38

## Leasing

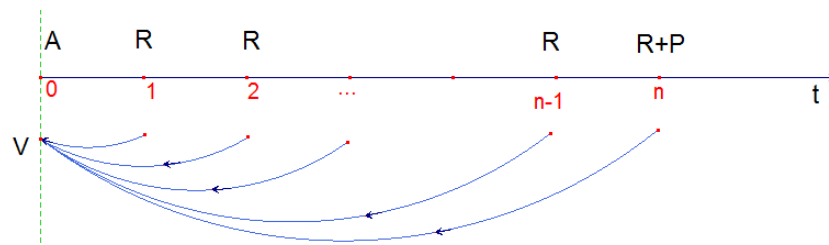
Un contratto di *Leasing* prevede i seguenti elementi:

- Il pagamento di  $n$  canoni specifici di  $R$
- L'anticipo, all'atto della consegna del bene, di una somma  $A$
- Il versamento, alla fine del contratto, di un riscatto  $P$ .

39

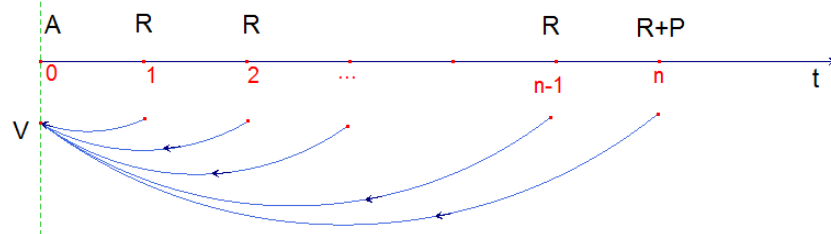
## Schema del Leasing

- Il pagamento di  $n$  canoni specifici di  $R$
- L'anticipo, all'atto della consegna del bene, di una somma  $A$
- Il versamento, alla fine del contratto, di un riscatto  $P$ .



40

## Leasing: equivalenza finanziaria



$$V = A + R \cdot \frac{1 - (1 + i_k)^{-n}}{i_k} + P \cdot (1 + i_k)^{-n}$$

V = valore del bene oggetto del leasing

41

## Leasing: problema 1

- Una impresa ha stipulato un contratto di leasing, durata 3 anni, macchinario del valore di 100000 euro. 36 canoni mensili, 6 vengono anticipati e un riscatto di 5000 euro. Tasso dello 0,75% mensile.
- Trovare l'importo R del canone mensile.

$$V = A + R \cdot \frac{1 - (1 + i_k)^{-n}}{i_k} + P \cdot (1 + i_k)^{-n}$$

Si trova circa R=2934,52 euro

42

## Leasing: problema 2

- Un professionista ha concluso un contratto di leasing di un autoveicolo del valore di 25900 euro. 35 canoni mensili di 232 euro. Anticipo di 6500 euro. Riscatto finale di euro 13199 da versare dopo un mese dall'ultimo canone.
- Qual è il tasso applicato?

$$V = A + R \cdot \frac{1 - (1 + i_k)^{-n}}{i_k} + P \cdot (1 + i_k)^{-(n+1)}$$

43

## Leasing: problema 2

- Si devono trovare gli zeri della seguente funzione

$$f(i) = V - \left( A + R \cdot \frac{1 - (1 + i_k)^{-n}}{i_k} + P \cdot (1 + i_k)^{-(n+1)} \right)$$

- Impostando un foglio di calcolo, si vede che lo zero si trova tra 0,30% e 0,35%.
- Interpolando si ottiene circa 0,326% mensile, che equivale a un tasso annuo di quasi il 4%.

44