Università degli Studi di Ferrara

2014-2015 – Corso TFA - A048 – Matematica applicata

Didattica della matematica applicata all'economia e alla finanza

18 febbraio 2015

Appunti di didattica della Matematica finanziaria

Leggi di capitalizzazione

Luigi Tomasi
luigi.tomasi@unife.it

Prerequisiti didattici

- Funzioni lineari
- Funzioni razionali fratte (iperboli)
- Progressioni aritmetiche e geometriche
- Funzioni esponenziali ed equazioni exp
- Logaritmi ed equazioni log.
- Grafici di funzioni

Strumenti

- Uso della calcolatrice scientifica
- Foglio elettronico (Excel, Calc, GeoGebra,..)

Obiettivi di apprendimento

Competenze

- Avere buona padronanza dei concetti di montante, valore attuale, interesse, tempo e delle reciproche relazioni (prestazione finanziaria)
- Affrontare lo studio dei fenomeni finanziari sapendo determinare le leggi di crescita
- Interpretare i problemi finanziari sapendo elaborare modelli matematici con opportune simulazioni
- Risolvere problemi finanziari tipici applicando modelli efficaci mediante gli strumenti adeguati (Foglio elettronico: Excel, Calc, GeoGebra,..)

3

Obiettivi di apprendimento

Conoscenze

- Interesse, montante, valore attuale, sconto
- Caratteristiche dei regimi finanziari più utilizzati
- Modelli utilizzati
- Concetto di equivalenza finanziaria
- Metodi di risoluzione dei problemi tipici della matematica finanziaria

4

Obiettivi di apprendimento

Abilità

- Saper operare nei diversi regimi determinando i parametri in gioco
- Saper risolvere problemi di capitalizzazi-one e di attualizzazione nei tre regimi
- Saper applicare le regole a casi applicativi, effettuando simulazioni diverse
- Utilizzare appropriati supporti informatici per rappresentare graficamente le leggi finanziarie e usare gli strumenti di calcolo più adeguati

5

Argomenti

- Introduzione all'insegnamento della matematica finanziaria
- Le principali leggi finanziarie, tassi equivalenti,
- Rendite, ammortamenti, prestiti
- Utilizzo di software per l'insegnamento (foglio elettronico Excel, GeoGebra,…)

6

La matematica finanziaria si occupa dello studio delle operazioni finanziarie

- In generale, un'operazione finanziaria è una qualsiasi operazione che dà origine allo scambio <u>non contemporaneo</u> tra almeno due somme di denaro, cioè tra due capitali.
- Ci sono due contraenti, A e B, debitore e creditore, mutuante e mutuatario, e ci sono delle *prestazioni* (da A a B) e delle *controprestazioni* (da B ad A).

7

Operazioni finanziarie semplici e operazioni finanziarie complesse

- Un'operazione finanziaria semplice dà origine a uno scambio di una sola prestazione con una sola controprestazione.
- Un'operazione finanziaria complessa è data dallo scambio di una sola prestazione con più *controprestazioni* (o viceversa), oppure tra più prestazioni e più controprestazioni.

8

Operazioni finanziarie certe e operazioni finanziarie aleatorie

In base all’orizzonte di una data operazione finanziaria, si parla di

- Un’operazione finanziaria certa, se i dati che la definiscono sono conosciuti in modo certo
- Un’operazione finanziaria aleatoria se i dati che definiscono questa operazioni non sono conosciuti con certezza a priori.

9

Operazioni di prestito: interesse e montante di un capitale

M=C+I
I= interesse
C= capitale
M= montante

M può essere calcolato

- *a interesse semplice*
- *a interesse composto*

10

Interesse semplice e montante di un capitale

$I = C\,i\,t$

$M = C + I = C + Cit = C(1 + i\,t)$

I= interesse

C= capitale

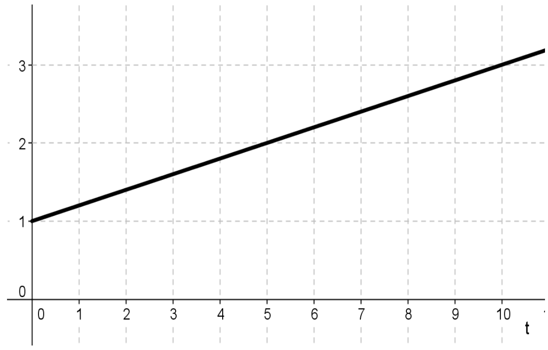
M= montante

$1+it$ =fattore di montante lineare affine

Proprietà del fattore di montante a interesse semplice

$$f(t) = 1 + i\,t$$

è una funzione lineare affine del tempo



Particolari operazioni di prestito

Obbligazioni

BOT

CCT

BTP

13

Capitalizzazione degli interessi

Interesse composto

$M_1= C+Ci=C(1+i)$

$M_2= M_1(1+i) = C(1+i)(1+i) = C(1+i)^2$

$M_3= M_2(1+i) = C(1+i)^2(1+i) = C(1+i)^3$

…

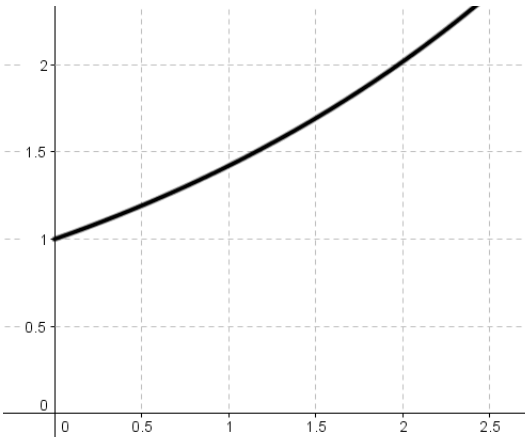
$M_n= C(1+i)^n$

$M = C(1+i)^t$ modello esponenziale

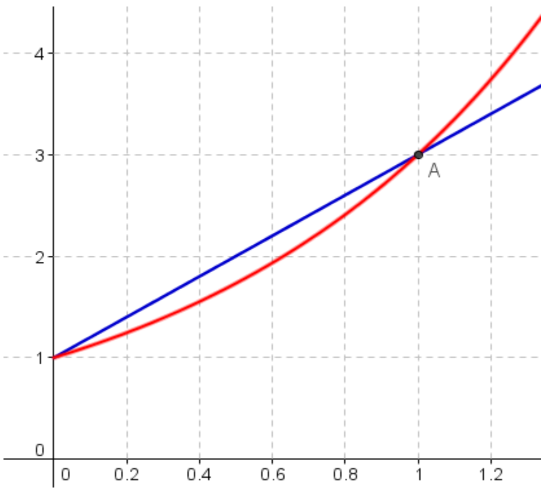
14

Capitalizzazione composta

$M = C(1+i)^t$ modello esponenziale



Confronto tra 1+it e $(1+i)^t$ tra capitalizzazione semplice e capitalizzazione composta



Interesse composto frazionato

i_k = tasso di interesse composto frazionato di frequenza k

es. i_2 = tasso semestrale

i_3 = tasso quadrimestrale

....

Interesse composto

$M_1 = C + Ci_k = C(1+i_k) = C$

…

$M_n = C(1+i_k)^{nk}$ per un numero intero di anni

$M = C(1+i_k)^{tk}$ il tempo t è espresso in anni

17

Tasso annuo convertibile j_k k volte in un anno

$$j_k = k\, i_k$$

Es. i_2 = tasso semestrale

i_3 = tasso quadrimestrale

Ad es. se j_2 = 10%, allora il tasso semestrale è i_2 = 5%.

18

Confronto tra dinamiche relative del montante con diverso periodo di capitalizzazione e stesso valore di j del 12%

$j_k = k\, i_k = 12\%$ $\quad M=C(1+j_k/k)^{kt}$

$i_2 =$ 6% tasso semestrale
$i_3 =$ 4% tasso quadrimestrale
$i_4 =$ 3% tasso trimestrale
$i_6 =$ 2% tasso bimestrale
$i_{12} =$ 1% tasso mensile
$i_{360} =$ 0,033% tasso giornaliero

19

Confronto tra dinamiche relative del montante con diverso periodo di capitalizzazione e stesso valore j del 12%

$j_k = k\, i_k = 12\%$ $\quad$ C=1000 euro $\quad$ t=3 anni

$i =$	12%	tasso annuale	M=1404,53
$i_2 =$	6%	tasso semestrale	M=1418,52
$i_3 =$	4%	tasso quadrimestrale	M=1423,31
$i_4 =$	3%	tasso trimestrale	M=1425,76
$i_6 =$	2%	tasso bimestrale	M=1428,25
$i_{12} =$	1%	tasso mensile	M=1430,77
$i_{360} =$	0,0333 %	tasso giornaliero	M=1433,24

20

Tassi equivalenti (con diversi periodi di capitalizzazione)

Esempio

- Un capitale di 1000 euro viene investito al tasso semestrale dell'1,5%. Trovare il tasso annuo equivalente, che darebbe cioè lo stesso montante.

Si parla di tasso equivalente annuo i; basta risolvere la seguente equazione:

$$C(1+i)= C(1+i_k)^k$$

21

Capitalizzazione continua

In questo caso il periodo di capitalizzazione è infinitesimo e il numero di capitalizzazioni tende all'infinito.

$k \rightarrow \infty$ e invece di scrivere j_∞ si scrive δ (tasso annuo convertibile *istantaneamente*).

Si ottiene (passando al limite) il fattore di capitalizzazione continua $f(t) = e^{\delta t}$:

$$M= C\,e^{\delta t}$$

Nell'esempio fatto in precedenza (t=3 anni):

$M= C\,e^{\delta t} = 1000 \cdot e^{0,12 \cdot 3} = 1433,32$ euro

22

Scindibilità

La capitalizzazione semplice <u>non</u> è scindibile.

Se si deposita in banca un capitale C e lo si impiega al 6% per 3 anni. Si preleva il montante e lo si reimpiega al tasso del 5% per 2 anni, si ottiene un montante che è diverso da quello che si otterrebbe se il capitale fosse stato lasciato in banca per 5 anni al 6%.

La capitalizzazione composta ha invece l'importante proprietà di essere scindibile

$$M = C\,(1+i)^5 = C(1+i)^3(1+i)^2$$

$$M = C\,(1+i)^t = C(1+i)^{t_1}(1+i)^{t_2}$$

23