Università degli Studi di Ferrara

2014-2015 – Corso TFA - A048 – Matematica applicata

Didattica della matematica applicata all'economia e alla finanza

11 marzo 2015

Appunti di didattica della Matematica finanziaria

Rendite, ammortamenti

Luigi Tomasi
luigi.tomasi@unife.it

1

Prerequisiti didattici

- Capitalizzazione composta
- Progressioni geometriche
- Funzioni esponenziali ed equazioni exp
- Logaritmi ed equazioni log.
- Grafici di funzioni

Strumenti

- Uso della calcolatrice scientifica/finanziaria
- Foglio elettronico (Excel, Calc, GeoGebra,..)

2

Obiettivi di apprendimento

Competenze

- Avere buona padronanza dei concetti di rendita certa, sapendo come utilizzarlo nei problemi di costituzione di un capitale e di ammortamento di un prestito
- Interpretare i problemi finanziari elaborando il confronto tra soluzioni possibili basate su impostazioni diverse
- Essere in grado di risolvere problemi finanziari eseguendo i calcoli in modo manuale e con gli strumenti di calcolo, sapendo presentare report numerici e grafici.
- Risolvere problemi finanziari tipici applicando modelli efficaci mediante gli strumenti adeguati (Foglio elettronico: Excel, Calc, GeoGebra,..)

3

Obiettivi di apprendimento

Conoscenze

- Concetto di rendita certa
- Relazione tra rendite anticipate e rendite posticipate

4

Obiettivi di apprendimento

Abilità

- Saper operare nei diversi regimi determinando i parametri in gioco
- Saper risolvere problemi di capitalizzazione e di attualizzazione nei tre regimi
- Saper applicare le regole a casi applicativi, effettuando simulazioni diverse
- Utilizzare appropriati supporti informatici per rappresentare graficamente le leggi finanziarie e usare gli strumenti di calcolo più adeguati

Si dice *rendita* qualsiasi successione o flusso di somme di denaro, tutte da incassare o tutte da pagare, ciascuna dopo una diversa durata.

Le somme di denaro sono chiamate *rate*.

Le date si chiamano *scadenze*.

Intervallo di tempo tra due rate si chiama *periodo*.

Le rendite a rata costante immediata posticipata

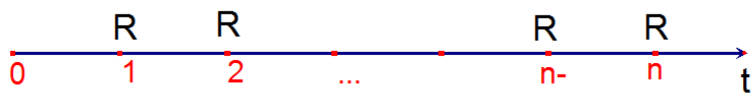
Rate costanti

Periodo costante

La prima rata scade alla fine del primo periodo.

Immediata significa che la decorrenza si ha il primo periodo.

Posticipata: ogni rata scade alla fine di ogni periodo.



Classificazione delle rendite

Rispetto all'importo della rata:
- Rata costante
- Rata variabile

Rispetto al periodo (se costante)
- Annua
- Frazionata
- Poliennale

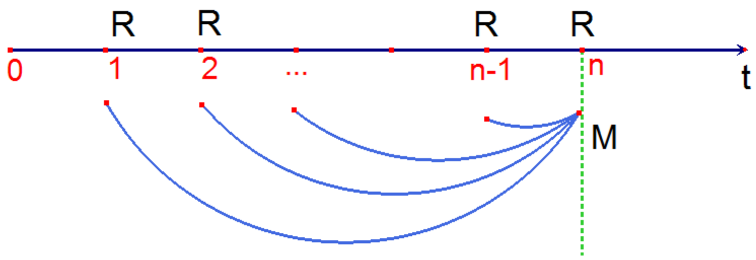
Rispetto alla scadenza delle rate
- Anticipata
- Posticipata

Rispetto alla durata
- Temporanea
- Perpetua

Rispetto alla decorrenza
- Immediata
- Differita

Montante di una rendita immediata posticipata

È la somma M dei montanti di ciascuna rata, calcolati a partire dalla loro scadenza e fino $t = n$, cioè fino alla *scadenza dell'ultima rata.*



Calcolo del montante di una rendita immediata posticipata

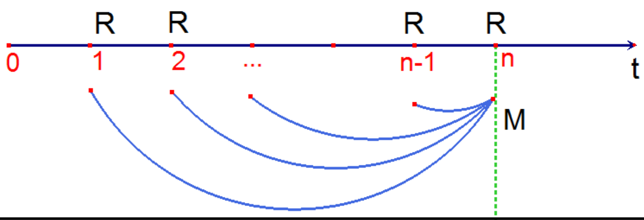
Il calcolo fornisce:

$$M = R + Ru + Ru^2 + \ldots + Ru^{n-1}$$

$$M = R\left(1 + u + u^2 + \ldots + u^{n-1}\right) = R\left(\frac{u^n - 1}{u - 1}\right)$$

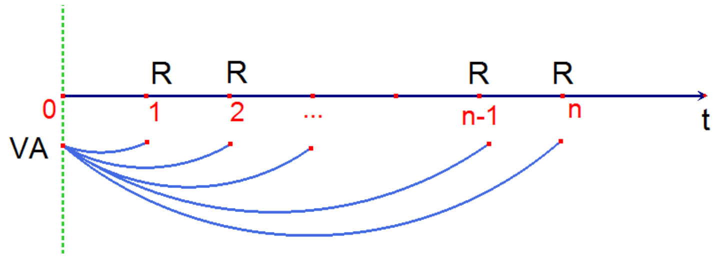
$$M = R\frac{(1+i)^n - 1}{i} = R \cdot s_{\overline{n|}\,i}$$

s figurato n, al tasso i, posticipato



Valore attuale di una rendita immediata posticipata

È la somma VA dei valori attuali di ciascuna rata, calcolati a partire dalla loro scadenza e fino $t = 0$, cioè fino a un periodo prima della *scadenza della prima rata.*



11

Calcolo del valore attuale di una rendita immediata posticipata

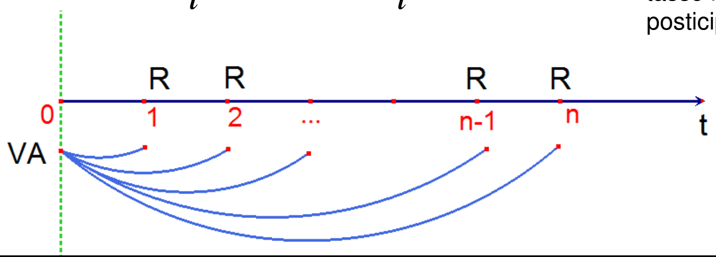
Il calcolo fornisce:

$$V_A = Rv + Rv^2 + ... + Rv^n$$

$$V_A = R\left(v + v^2 + ... + v^n\right) = Rv\left(\frac{1 - v^n}{1 - v}\right)$$

$$V_A = R\frac{1 - v^n}{i} = R\frac{1 - (1 + i)^{-n}}{i} = R \cdot a_{\overline{n}|i}$$

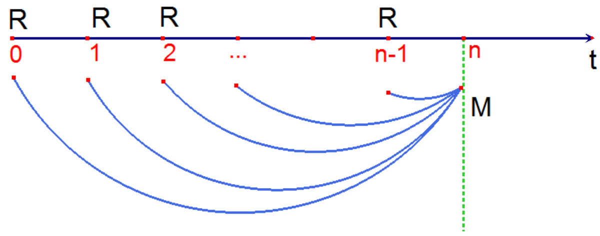
a figurato n, al tasso i, posticipato



12

Montante di una rendita immediata anticipata

È la somma M dei montanti di ciascuna rata, calcolati a partire dalla loro scadenza e fino *t* = *n*, cioè fino alla *scadenza dell'ultima rata.*



13

Calcolo del montante di una rendita immediata anticipata

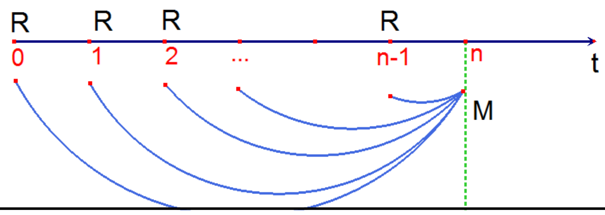
Il calcolo fornisce:

$$M = Ru + Ru^2 + \ldots + Ru^n$$

$$M = R\left(u + u^2 + \ldots + u^n\right) = R\,u\left(\frac{u^n - 1}{u - 1}\right)$$

$$M = R\frac{(1+i)^n - 1}{i}(1+i) = R \cdot \ddot{s}_{\overline{n}|\,i}$$

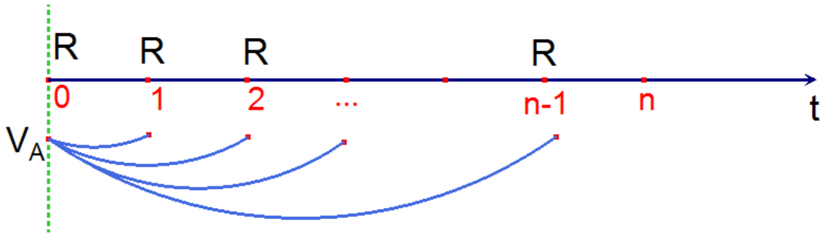
s figurato n, al tasso i, anticipato



14

Valore attuale di una rendita immediata anticipata

È la somma VA dei valori attuali di ciascuna rata, calcolati a partire dalla loro scadenza e fino $t = 0$, cioè fino alla *scadenza della prima rata.*



15

Calcolo del valore attuale di una rendita immediata anticipata

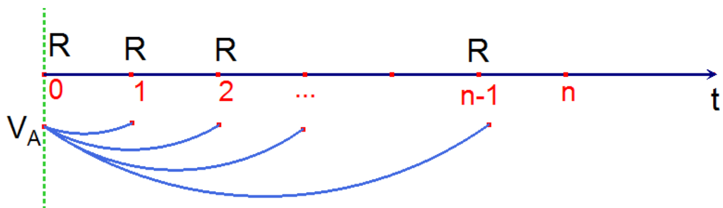
Il calcolo fornisce:

$$V_A = R + Rv + Rv^2 + ... + Rv^{n-1}$$

$$V_A = R\left(1 + v + v^2 + ... + v^{n-1}\right) = R\left(\frac{1-v^n}{1-v}\right)$$

$$V_A = R\frac{1-v^n}{i}u = R\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}(1+i) = R \cdot \ddot{a}_{\overline{n|}\,i}$$

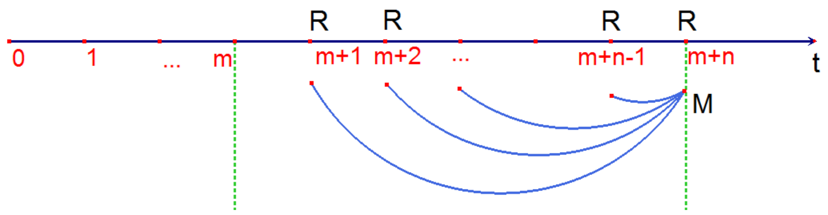
a figurato n, al tasso i, anticipato



16

Montante di una rendita differita

Una rendita è differita quando la prima rata non scade immediatamente, cioè non viene pagata entro il primo periodo. Inutile distinguere tra rendite differite posticipate e anticipate. Differimento = *m.* Il montante non cambia.



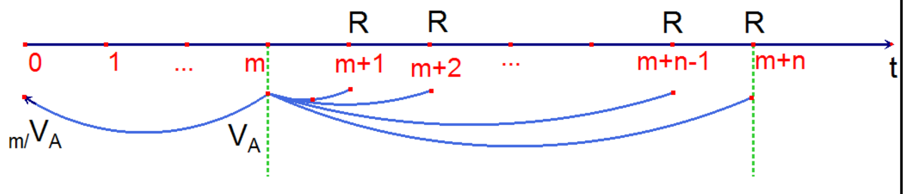
17

Calcolo del valore attuale di una rendita differita

Il calcolo del valore attuale fornisce:

$$_{m/}V_A = R\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}(1+i)^{-m} = R \cdot {}_{m/}a_{\overline{n|}\,i}$$

a figurato n, al tasso i, differito m



18

Problemi sulle rendite: calcolo della rata

Sappiamo che una rendita immediata, posticipata di 10 rate costanti, semestrali, in t=0 equivale a 8000 euro. Calcola la rata al tasso semestrale del 2,6%.

$$V_A = R\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} = R\cdot a_{\overline{n}|i} \rightarrow$$

$$R = \frac{V_A}{a_{\overline{n}|i}} = V_A\frac{i}{1-(1+i)^{-n}} = 8000\cdot\frac{0,026}{1-(1+0,026)^{-10}} = 916,80\ euro$$

19

Problemi sulle rendite: calcolo del numero delle rate

Sappiamo che una rendita immediata, posticipata a rate costanti, semestrali, in t=0 equivale a 8000 euro con una rata di 918,80 euro. Calcola il numero di rate semestrali al tasso semestrale del 2,6%.

$$V_A = R\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} = R\cdot a_{\overline{n}|i} \rightarrow$$

$$iV_A = R\left(1-(1+i)^{-n}\right)$$

$$1-(1+i)^{-n} = \frac{iV_A}{R}$$

$$(1+i)^{-n} = 1-\frac{iV_A}{R} \quad\rightarrow\quad n\ \log(1+i) = -\log\left(1-\frac{iV_A}{R}\right)\ ....$$

20

Problemi sulle rendite: calcolo del tasso di interesse

Nello stesso esempio, chiediamoci a quale tasso di interesse semestrale 10 rate posticipate immediate di 918,80 euro equivalgono oggi ($t = 0$) a 8000 euro.

Dobbiamo risolvere, rispetto ad i, l'equazione:

$$V_A = R\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

che equivale a trovare gli zeri della funzione:

$$f(i) = V_A - R\cdot\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

21

Problemi sulle rendite: calcolo del tasso di interesse

Per trovare lo zero della funzione

$$f(i) = V_A - R\cdot\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

si può procedere per interpolazione lineare o con uno dei metodi di analisi numerica (ad esempio bisezione).

22

Problemi sulle rendite: calcolo del numero delle rate caso non intero

Il prestito di 10000 euro oggi può essere saldato con versamenti di 1200 euro a partire dall'anno prossimo. Quanti devono essere i versamenti se il tasso è del 2,5 annuo?

Facendo il calcolo si trova n~9,46.

Poiché n risulta non intero, conviene scegliere o 9 rate oppure 10 rate. Rifacendo il calcolo, per 9 rate si trova R=1254,57 euro, e per 10 rate si trova R'=1142,59 euro.

Una applicazione delle rendite: calcolo di TAN e TAEG: literacy finanziaria per il cittadino

Può capitare negli opuscoli informativi e nelle pubblicità riguardanti benei venduti a rate, di leggere le parole TAN e TAEG, ad esempio "TAN = 5 % e TAEG = 5,87%"..

Che significato hanno queste sigle?

TAN

E' l'acronimo di *tasso annuale nominale.*

E' il tasso d'interesse che rende il prezzo di un bene equivalente alla successione di rate necessarie per pagarlo.

Se il periodo delle rate è diverso dall'anno, si moltiplica il tasso periodale ottenuto in questo modo per il numero di rate previste in un anno.

$$\begin{cases} V = R \cdot \dfrac{1-(1+i_k)^{-n}}{i_k} \\ TAN = k \cdot i_k \end{cases}$$

25

TAEG
(è obbligatorio indicarlo per Legge)

E' l'acronimo di *tasso annuale effettivo globale* e si calcola come il TAN, ma tenendo conto però anche dei costi amministrativi (costo dell'istruttoria *C*, e commissioni di incasso *c*). L'eventuale calcolo e passaggio dal tasso periodale al tasso annuale, si calcola a regime composto.

$$\begin{cases} V - C = (R + c) \cdot \dfrac{1-(1+i_k)^{-n}}{i_k} \\ TAEG = (1+i_k)^k - 1 \end{cases}$$

26

TAN e TAEG un esempio

Un garage del valore di 40000 euro viene acquistato con mutuo quinquennale TAN del 5%. Le rate posticipate sono versate semestralmente.

a) Determiniamo la rata R e il tasso effettivo *i.*

b) Calcolare il TAEG nel caso in cui la banca richieda 400 euro di spese iniziali e, ogni semestre, 3 euro per la polizza assicurazione antincendio e 2 euro per le spese di incasso.

27

TAN e TAEG un esempio

a)

Il tasso periodale $i_2 = 2{,}5\%$.

Il tasso effettivo annuo i = 5,06%.

Calcoliamo la rata risolvendo l'equazione

$$V_A = R\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

Si ottiene R ≈ 4570,35 euro ogni semestre.

28

TAN e TAEG un esempio

b) V = 40000 euro
R= 4570,35 euro
n = 10 rate
C= 400 euro
c=5 euro assicurazione e spese di incasso
Si risolve per tentativi l'equazione:

$$V - C = (R + c) \cdot \frac{1 - (1 + i_k)^{-n}}{i_k}$$

Si trova TAEG ≈ 5,51%.

Le rendite perpetue

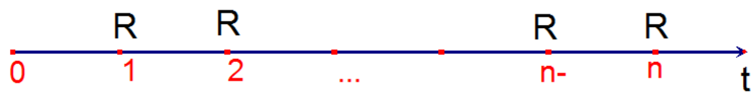
Rate costanti

Periodo costante

La prima rata scade alla fine del primo periodo.

Perpetue significa che *n* tende all'infinito

Posticipata: ogni rata scade alla fine di ogni periodo.



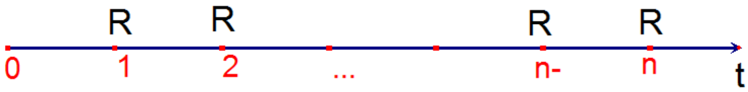
Calcolo del valore attuale di una rendita perpetua posticipata

Non ha senso calcolare il montante.

$$V_A = R\frac{1-v^n}{i} = R\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} = R \cdot a_{\overline{n}|\,i}$$

$$se \quad n \to \infty$$

$$V = R\frac{1-0}{i} = R \cdot \frac{1}{i} = R \cdot a_{\overline{\infty}|\,i}$$



Costituzione di un capitale

Vogliamo costituire, ad es., un caoitale di 100000 euro tra 6 anni in regime composto del 2% semestrale.

Una prima possibilità potrebbe essere investire oggi il valore attuale di questo capitale.

L’altra possibilità, più interessante, è investire ogni sei mesi una somma costante di 7455,96 euro.

Questa si chiama costituzione graduale di un capitale

Piano di costituzione di un capitale

Nel caso dei versamenti rateali costanti si usa compilare una tabella, che costituisce il piano di costituzione graduale del capitale.

Periodo	Rata	Fondo iniziale	Interessi	Fondo finale
1	7455,96	0	0	7455,96
2	7455,96	7455,96	149,12	15061,04
3	7455,96	15061,04	301,22	22818,22

12	7455,96			**100000,00**

33