Università degli Studi di Ferrara

2014-2015 – Corso TFA - A048 – Matematica applicata

Didattica della matematica applicata all'economia e alla finanza

18 marzo 2015

Appunti di didattica della matematica applicata

Funzioni in due o più variabili; problemi di massimo e di minimo

Luigi Tomasi
luigi.tomasi@unife.it

Prerequisiti didattici

- Limiti, continuità e calcolo differenziale per le funzioni in una variabile
- Studio di funzione in una variabile
- Disequazioni in due variabili
- Elementi di geometria analitica dello spazio

Strumenti

- Uso della calcolatrice scientifica
- Foglio elettronico (Excel, Calc, GeoGebra,..)
- Uso di software 3D come ad es. GeoGebra

Obiettivi di apprendimento

Competenze

- Avere buona padronanza del concetto di funzione reale in due variabili reali, sapendo utilizzare le proprietà di continuità e di derivabilità
- Essere in grado di utilizzare le conoscenze dell'analisi e delle linee di livello per interpretare e rappresentare graficamente le funzioni di due variabili
- Comprendere l'importanza della ricerca dei massimi e dei minimi nei fenomeni del mondo reale e dell'economia e saperli determinare mediante i metodi e procedimenti opportuni.

3

Obiettivi di apprendimento

Conoscenze

- Sapere determinare nei casi più semplici il dominio delle funzioni in due (o più) variabili
- Concetto di continuità di funzioni in due variabili
- Significato di derivata parziale e di differenziale totale
- Concetto di massimo e di minimo di funzioni in due variabili
- Distinzione tra massimi e minimi relativi, assoluti, vincolati
- Metodi per individuare i massimi e i minimi nei diversi contesti.

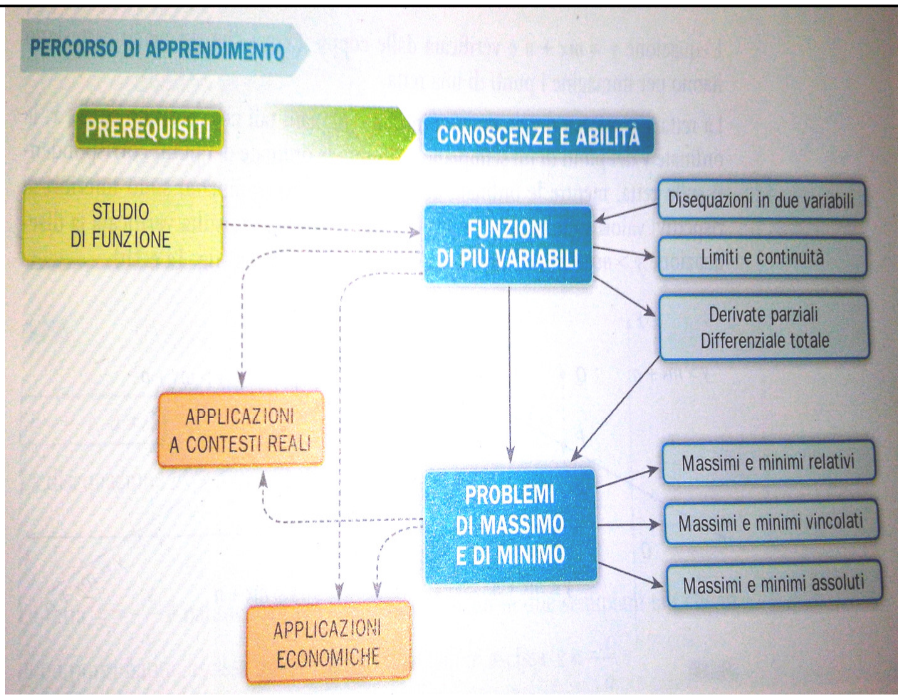
4

Obiettivi di apprendimento

Abilità

- Saper risolvere (semplici) disequazioni e sistemi di disequazioni in due variabili
- Saper utilizzare le linee di livello per le funzioni in due variabili
- Saper calcolare limiti e derivate parziali per le funzioni in due variabili
- Saper calcolare massimi e minimi relativi di funzioni in due variabili tramite le linee di livello e con le derivate
- Saper determinare massimi e minimi vincolati e assoluti con i metodi opportuni
- Riconoscere i diversi contesti applicativi e adottare procedimenti risolutivi adeguati.

5



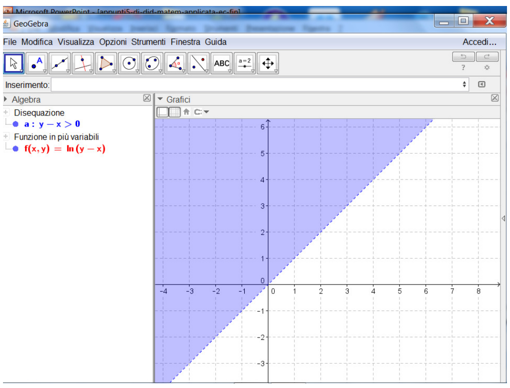
Definizione e dominio delle funzioni z = f(x,y)

- Definizione e dominio delle funzioni in due variabili (vedi presentazione)
- Esempi con GeoGebra
- Grafico delle funzioni in due variabili: esempi con GeoGebra

7

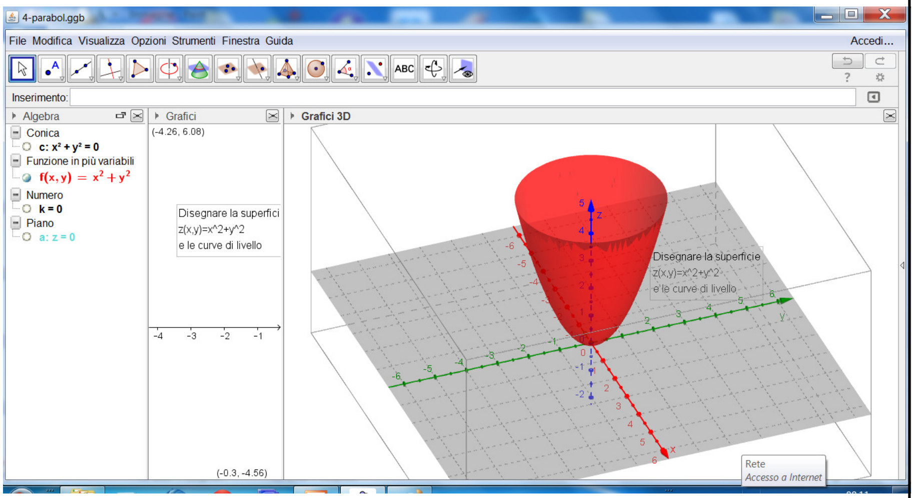
Definizione e dominio delle funzioni z = f(x,y)

- Trovare il dominio della funzione
- f(x,y)= ln (y-x)



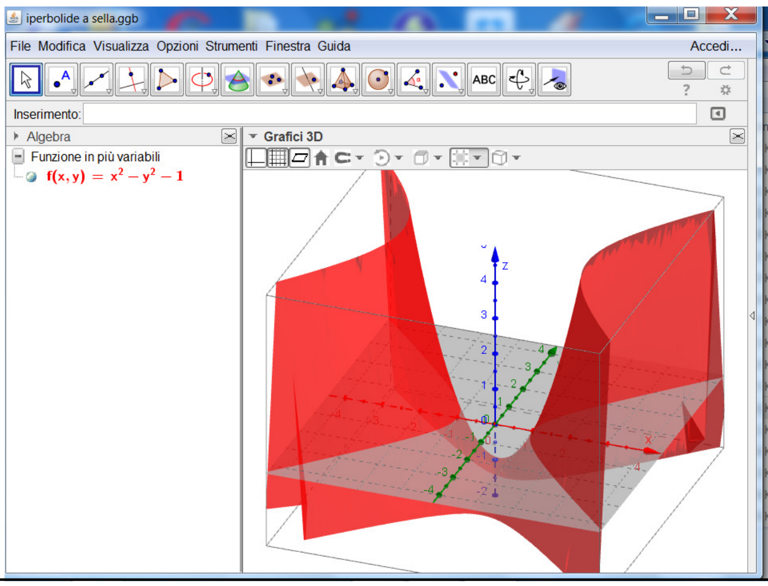
8

Grafico di funzioni in due variabili z = f(x,y) paraboloide



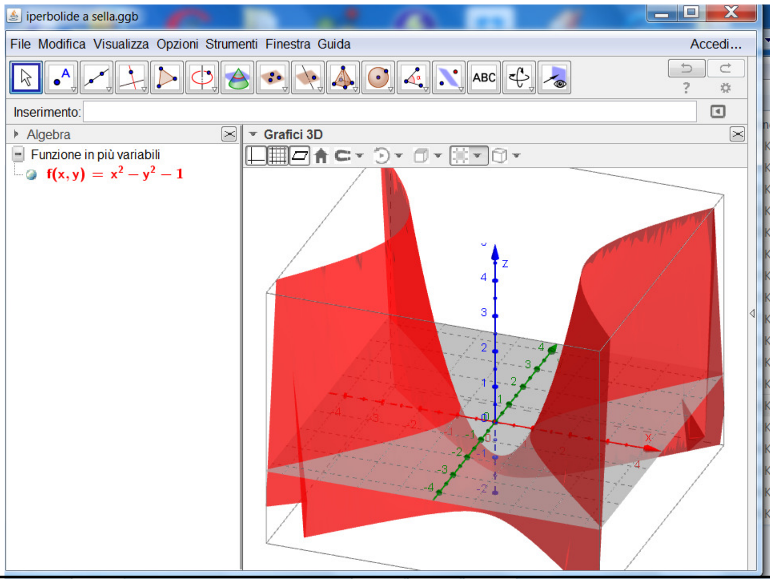
9

Grafico di funzioni in due variabili z = f(x,y): iperboloide



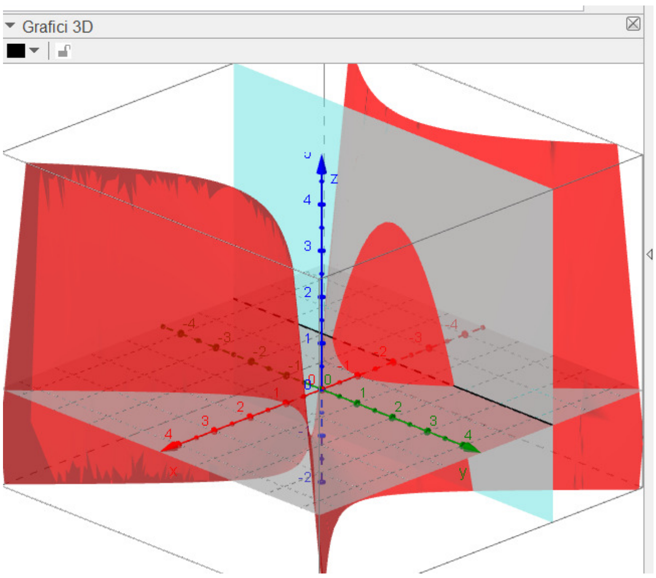
10

Grafico di funzioni in due variabili z = f(x,y): iperboloide



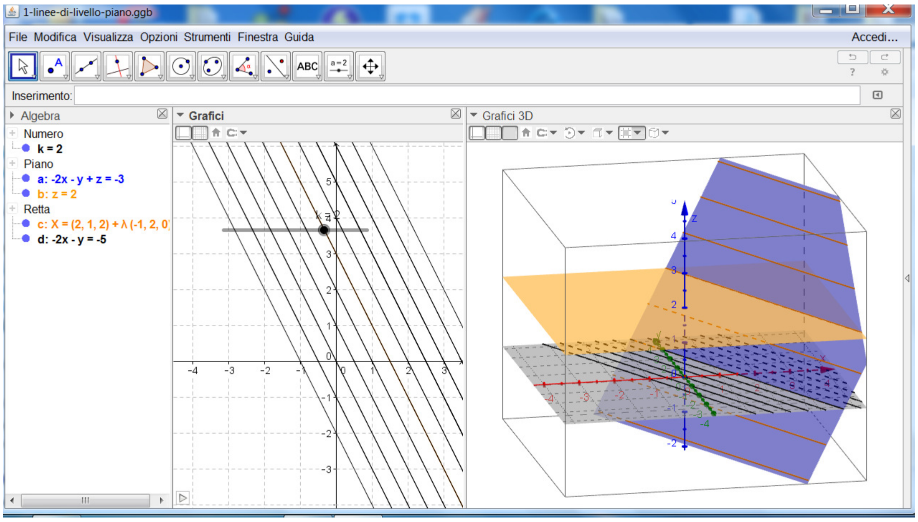
11

Grafico di sezione di z = f(x,y): iperboloide

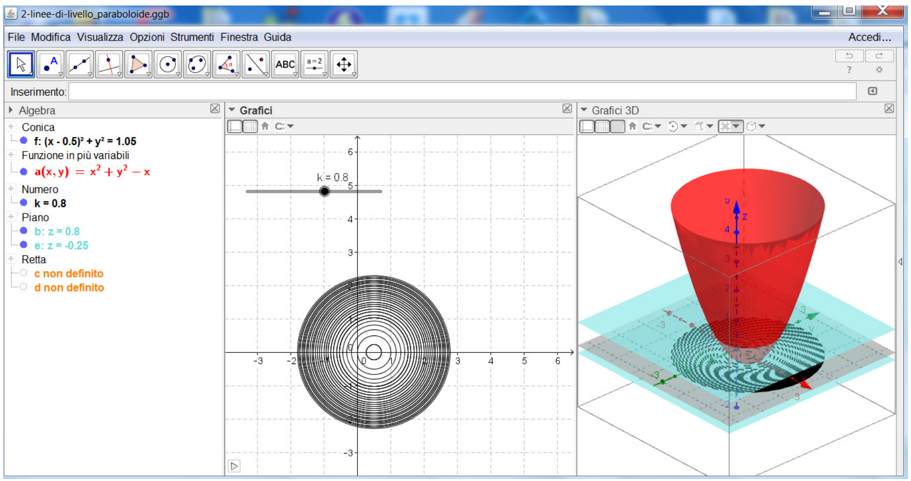


12

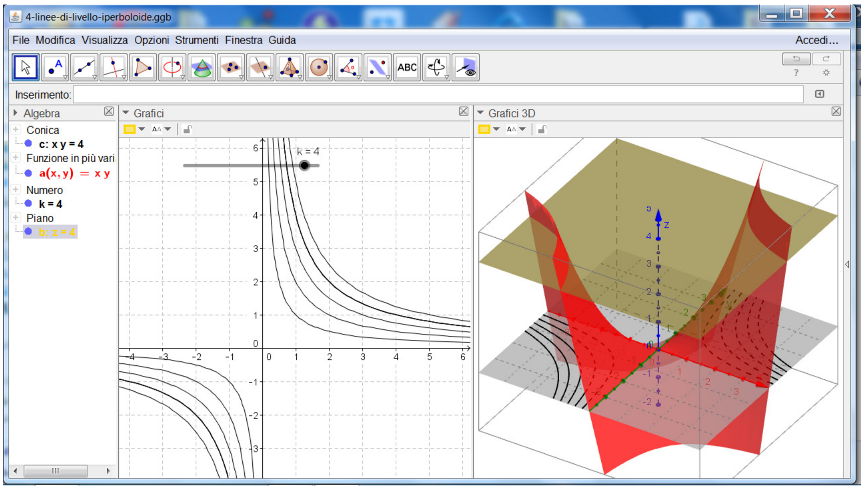
Linee di livello di z = f(x,y)



Linee di livello di z = f(x,y)



Linee di livello di z = f(x,y)



Limiti e continuità delle funzioni z = f(x,y)

$$\lim_{P \to P_0} f(P) = l$$

$$\lim_{P \to P_0} f(P) = f(P_0)$$

Incrementi parziali della funzione $z = f(x,y)$

$$\Delta_x f = f\left(x_0 + \Delta x, y_0\right) - f\left(x_0, y_0\right)$$

incremento parziale di f rispetto a x

$$\Delta_y f = f\left(x_0, y_0 + \Delta y\right) - f\left(x_0, y_0\right)$$

incremento parziale di f rispetto a y

$$\frac{\Delta_x f}{\Delta x} = \frac{f\left(x_0 + \Delta x, y_0\right) - f\left(x_0, y_0\right)}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta_x f}{\Delta y} = \frac{f\left(x_0, y_0 + \Delta y\right) - f\left(x_0, y_0\right)}{\Delta y}$$

Derivate parziali della funzione $z = f(x,y)$

$$f'_x(P_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x f}{\Delta x} = \lim_{x \to x_0} \frac{f\left(x, y_0\right) - f\left(x_0, y_0\right)}{x - x_0}$$

$$f'_y(P_0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_x f}{\Delta y} = \lim_{y \to y_0} \frac{f\left(x_0, y\right) - f\left(x_0, y_0\right)}{y - y_0}$$

Esempio: calcolare le derivate parziali prime della funzione $z = x^2 + \ln y$ nel punto P(-2,1)

$$f'_x(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x} = 2x \qquad f'_y(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{y}$$

Nel punto dato si ha:

$$f'_x(-2,1) = -4$$

$$f'_y(-2,1) = 1$$

19

Significato geometrico delle derivate parziali prime

Nel piano di equazione $y=y_0$ il valore -4 è la pendenza della retta tangente al grafico della curva sezione della superficie.
Nel piano di equazione $x=x_0$, il valore 1 è la pendenza della retta tangente al grafico della curva sezione della superficie.

Nel punto dato si ha:

$$m = f'_x(-2,1) = -4$$

$$n = f'_y(-2,1) = 1$$

20

Piano tangente alla superficie z=f(x,y) in un suo punto

Se una funzione z=f(x,y) è derivabile nel suo dominio e le derivate parziali prime sono continue, allora f è continua e si può definire il piano tangente alla superficie nel punto P_0

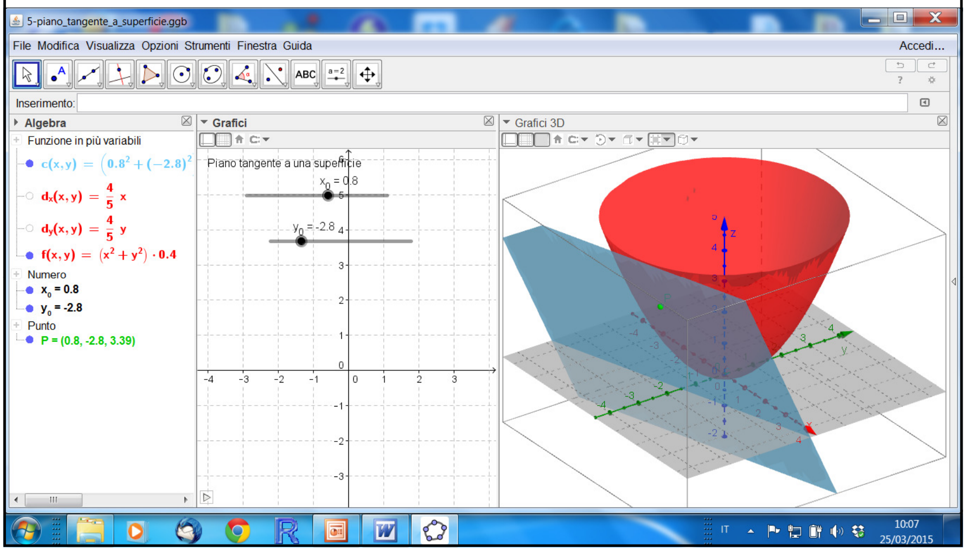
$$z = m\,x + n\,y + q$$

$$z - f(x_0, y_0) = f'_x(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + f'_y(x_0, y_0) \cdot (y - y_0)$$

$$z - f(P_0) = f'_x(P_0) \cdot (x - x_0) + f'_y(P_0) \cdot (y - y_0)$$

21

Piano tangente alla superficie z=f(x,y) in un suo punto



Differenziale totale della funzione z=f(x,y) in un suo punto

Se una funzione z=f(x,y) è derivabile nel suo dominio e le derivate parziali prime sono continue, allora f è continua e si può definire il differenziale totale, una funzione in due variabili.

Il calcolo del differenziale permette di calcolare l'incremento della funzione per incrementi molto piccoli delle variabili indipendenti x e y.

L'incremento viene calcolato sul piano tangente.

Se una funzione è derivabile e in ogni punto ha il piano tangente, allora è differenziabile.

$$df = f'_x(x_0, y_0) \cdot \Delta x + f'_y(x_0, y_0) \cdot \Delta y$$

$$df = f'_x(x_0, y_0) \cdot dx + f'_y(x_0, y_0) \cdot dy$$

23

Il gradiente di una funzione z=f(x,y) in un punto

$$\overrightarrow{\nabla f(P_0)} = \left(f'_x(P_0), f'_y(P_0) \right)$$

Se una funzione z=f(x,y) è derivabile nel suo dominio e le derivate parziali prime sono continue, allora f è continua e si può definire il differenziale totale, una funzione in due variabili.

Se una funzione è derivabile e in ogni punto ha il piano tangente, allora è differenziabile.

Il gradiente è un vettore del piano Oxy definito come sopra.

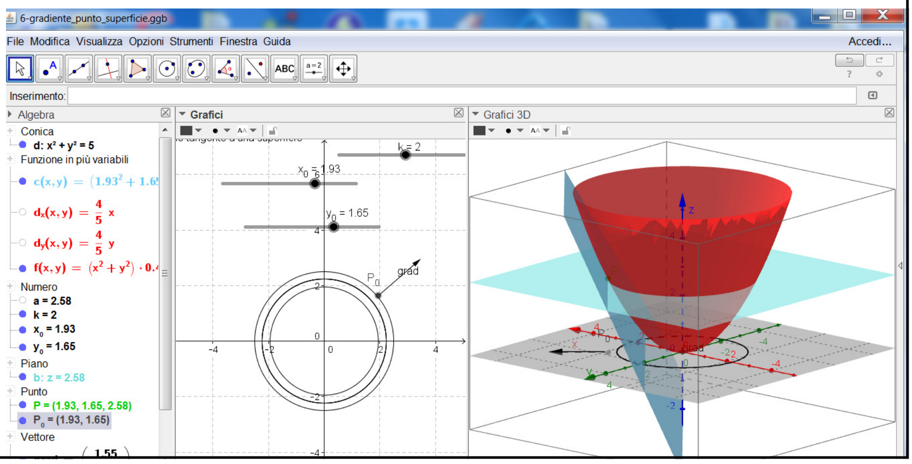
Il gradiente rappresenta geometricamente la direzione e il verso nel piano Oxy per cui si ha il massimo incremento della funzione z=f(z,y).

Il gradiente è perpendicolare alla linea di livello che passa per il punto P_0.

24

Il gradiente di una funzione z=f(x,y) in un punto

$$\overrightarrow{\nabla f(P_0)} = \left(f'_x(P_0), f'_y(P_0) \right)$$



Il gradiente di una funzione z=f(x,y) in un punto

$$\overrightarrow{\nabla f(P_0)} = \left(f'_x(P_0), f'_y(P_0) \right)$$

Esempio

Funzione = xy

Punto P_0= (3/2, 2)

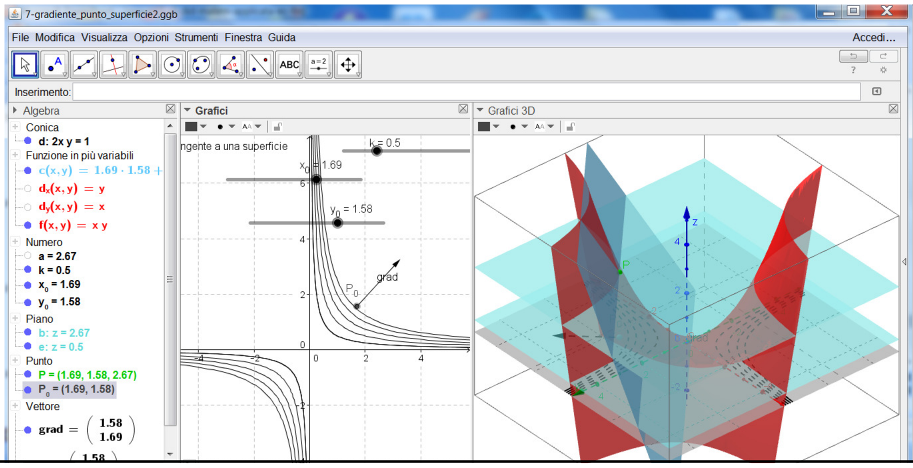
Trovare il gradiente **v** e la linea di livello per P_0.

Dimostrare che **v** è perpendicolare alla linea di livello passante per P_0.

26

Il gradiente di una funzione z=f(x,y) in un punto

$$\overrightarrow{\nabla f(P_0)} = \left(f'_x(P_0), f'_y(P_0) \right)$$



Derivate parziali seconde e matrice hessiana di una funzione z=f(x,y) in un punto

$$H(x,y) = \begin{bmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{bmatrix}$$

$$es. \quad f''_{xy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

$$derivata \;\; parziale \; mista$$

28

Massimi e minimi relativi ed assoluti di una funzione z=f(x,y) in un punto

$$se \begin{cases} \det H(x_0, y_0) > 0 \\ f''_{xx}(P_0) < 0 \end{cases} \rightarrow P_0 \; \grave{e} \; un \; massimo \; relativo$$

$$se \begin{cases} \det H(x_0, y_0) > 0 \\ f''_{xx}(P_0) > 0 \end{cases} \rightarrow P_0 \; \grave{e} \; un \; \min \; relativo$$

$$se \begin{cases} \det H(x_0, y_0) < 0 \\ f''_{xx}(P_0) > 0 \end{cases} \rightarrow P_0 \; \grave{e} \; un \; punto \; di \; sella$$

29

Massimi e minimi relativi ed assoluti di una funzione z=f(x,y)

$$se \;\; \det H(x_0, y_0) = 0 \;\; \rightarrow nulla \;\; si \;\; pu\grave{o} \;\; affermare$$

30

Esempio max e min

Determinare massimi e minimi della funzione

$$f(x,y) = (x^2+y^2-1)^2$$

31

Massimi e minimi vincolati di una funzione z=f(x,y)

$$\textit{massimo di} \quad z = f(x, y)$$

$$\textit{con il} \quad \textit{vincolo} \quad g(x, y) = 0$$

32

Esempio: sostituzione

$$Det.\ il\ \ massimo\ di\ \ z = \sqrt{xy}$$
$$con\ il\ \ vincolo\ \ 2x + y = 6$$

33

Esempio: linee di livello

$$Det.\ il\ \ massimo\ di\ \ z = \sqrt{xy}$$
$$con\ il\ \ vincolo\ \ 2x + y = 6$$

34

35