Università degli Studi di Ferrara

2014-2015 – Corso TFA - A048 – Matematica applicata

Didattica della matematica applicata all'economia e alla finanza

1 aprile 2015

Appunti di didattica della matematica applicata all'economia e alla finanza

Programmazione lineare (PL)

Luigi Tomasi
luigi.tomasi@unife.it

Prerequisiti didattici

- Geometria analitica del piano
- Funzioni lineari (in una, due, n variabili)
- Sistemi lineari (matrici e determinanti)
- Disequazioni in due variabili
- Elementi di geometria analitica dello spazio

Strumenti

- Uso della calcolatrice scientifica
- Foglio elettronico (Excel, Calc, GeoGebra,..)
- Uso di software 2D e 3D come ad es. GeoGebra

Obiettivi di apprendimento

Competenze

- Saper usare lo strumento dei sistemi lineari di equazioni e disequazioni per costruire modelli di programmazione lineare nei vari ambiti del mondo reale ed economico-sociale
- Padroneggiare i metodi risolutivi di programmazione lineare sapendo scegliere il metodo più efficace ed efficiente tra quelli noti
- Essere in grado di affrontare la risoluzione dei problemi con un approccio grafico, manuale e con gli strumenti informatici opportuni.

Obiettivi di apprendimento

Conoscenze

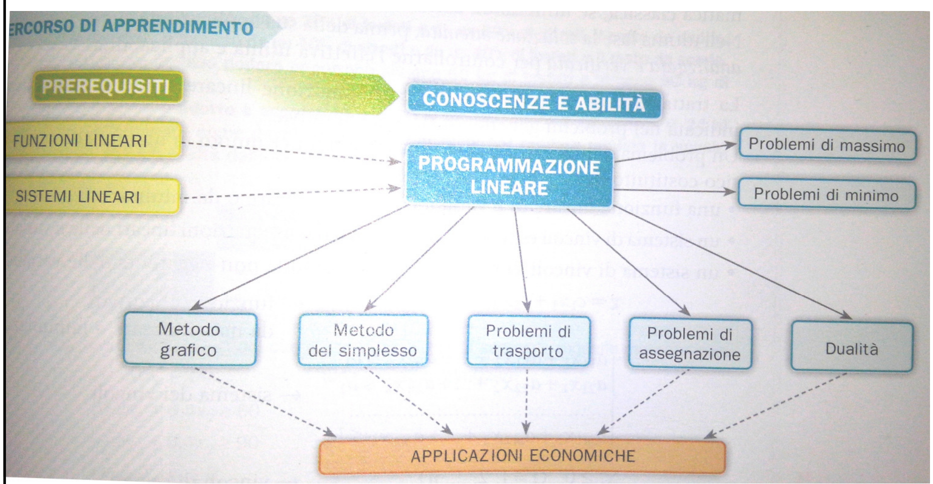
- Metodo risolutivo dei problemi di PL
- Metodo grafico per la risoluzione dei problemi di PL
- Metodo del simplesso per la risoluzione dei problemi di PL
- Metodi risolutivi per risolvere problemi di trasporto e di assegnazione.

Obiettivi di apprendimento

Abilità

- Saper costruire modelli risolutivi di PL per i vari contesti applicativi
- Saper applicare il metodo grafico ai problemi di PL in due variabili oppure riconducibili a due variabili
- Saper applicare il metodo del simplesso ai problemi di programmazione lineare
- Saper risolvere problemi di trasporto e di assegnazione usando il metodo più opportuno
- Saper utilizzare gli strumenti informatici per affrontare problemi del mondo reale o nel contesto economico

5



6

Cosa dicono le Linee Guida per gli Istituti Tecnici – settore Economico? Quinto anno

Conoscenze

Problemi e modelli di programmazione lineare.

Ricerca operativa e problemi di scelta.

Abilità

Risolvere e rappresentare in modo formalizzato problemi finanziari ed economici.

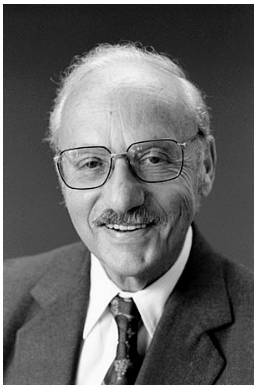
Utilizzare strumenti di analisi matematica e di ricerca operativa nello studio di fenomeni economici e nelle applicazioni alla realtà aziendale.

Realizzare ricerche e indagini di comparazione, ottimizzazione, andamento, ecc., collegate alle applicazioni d'indirizzo.

7

George B. Dantzig

George Bernard Dantzig (Portland, 8 novembre 1914 – Palo Alto, 13 maggio 2005) è stato un matematico e statistico statunitense, noto soprattutto per avere introdotto l'algoritmo del simplesso e per essere considerato il padre della programmazione lineare.



La programmazione lineare

- Funzione obiettivo (lineare)

$$z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_{n-1} x_{n-1} + c_n x_n$$

- vincoli

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1\,n-1}x_{n-1} + a_{1n}x_n \le b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2\,n-1}x_{n-1} + a_{2n}x_n \le b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{n\,n-1}x_{n-1} + a_{nn}x_n \le b_n \\ x_i \ge 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \end{cases}$$

PL metodo grafico problemi in due variabili

- Funzione obiettivo

$$z = c_1 x_1 + c_2 x_2$$

- vincoli

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \le b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \le b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 \le b_n \\ x_i \ge 0 \quad (i = 1, 2) \end{cases}$$

PL metodo grafico problemi in due variabili

- La soluzione del sistema dei vincoli (di solito un poligono…) si chiama dominio dei vincoli.
- Si disegnano le linee di livello della funzione z (un fascio di rette)
- vincoli $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \le b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \le b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 \le b_n \\ x_i \ge 0 \quad (i = 1,2) \end{cases}$

11

PL metodo grafico problemi in due variabili

Il metodo grafico consiste

- Si determina il dominio dei vincoli (regione delle soluzioni ammissibili)
- Se il dominio dei vincoli è un poligono, si calcola la funzione z nei vertici e si prende il valore massimo.
- Se il dominio dei vincoli è illimitato si esamina l'andamento delle linee di livello per dedurre se esiste un vertice che orrimizza la funzione.

12

Problema 1 con metodo grafico

Rendere massima la funzione con i vincoli dati

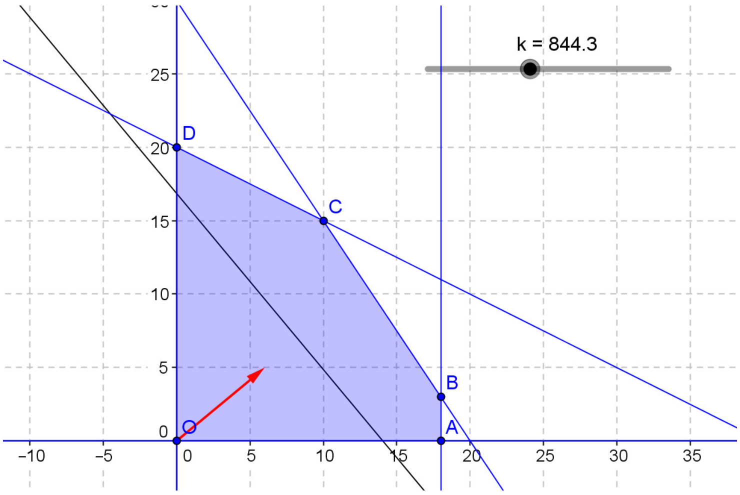
$$z = 60x_1 + 50x_2$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 40 \\ 3x_1 + 2x_2 \le 60 \\ x_1 \le 18 \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0 \end{cases}$$

13

Problema 1 con metodo grafico

Rendere massima la funzione con i vincoli dati



14

Problema 2 con metodo grafico

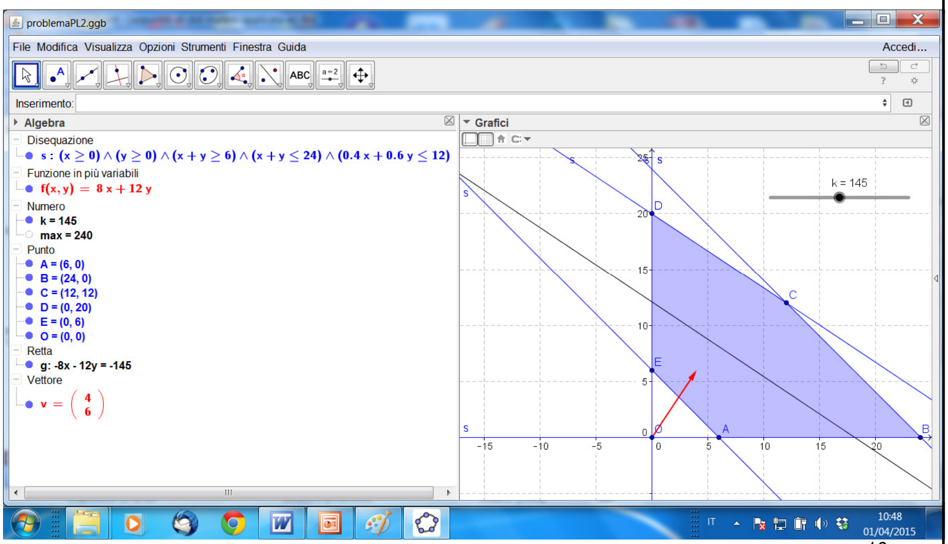
Rendere massima la funzione con i vincoli dati

$$z = 8x_1 + 12x_2$$

$$\begin{cases} 0,4x_1 + 0,6x_2 \leq 12 \\ x_1 + x_2 \leq 24 \\ x_1 + x_2 \geq 6 \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \end{cases}$$

15

Problema 2 con metodo grafico



16

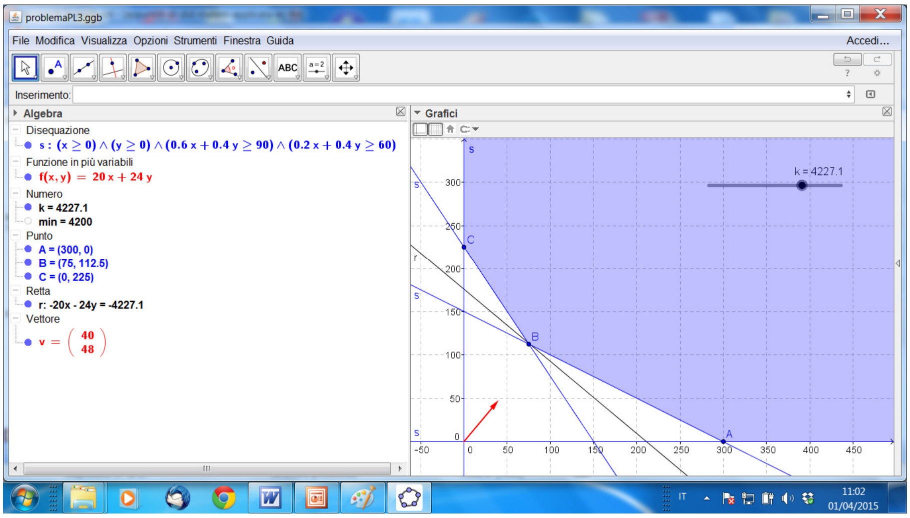
Problema 3 con metodo grafico

Rendere minima la funzione con i vincoli dati

$$z = 20x_1 + 24x_2 \text{ funzione da minimizzare}$$

$$\begin{cases} 0,2x_1 + 0,4x_2 \geq 60 \\ 0,6x_1 + 0,4x_2 \geq 90 \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Problema 3 con metodo grafico



Problema 4 con metodo grafico

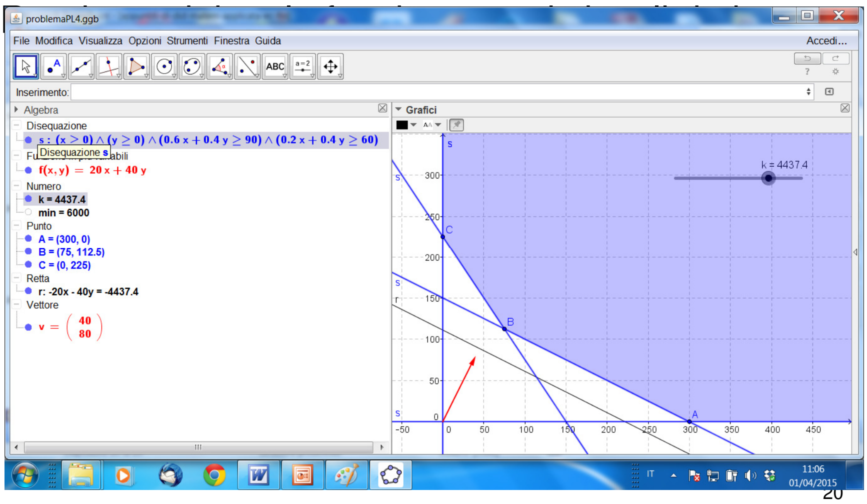
Rendere minima la funzione con i vincoli dati (variante del 3, stessi vincoli, cambia z)

$$z = 20x_1 + 40x_2 \text{ funzione da minimizzare}$$

$$\begin{cases} 0,2x_1 + 0,4x_2 \geq 60 \\ 0,6x_1 + 0,4x_2 \geq 90 \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \end{cases}$$

19

Problema 4 con metodo grafico



20

Problema 5 (discreto) con metodo grafico

Rendere max la funzione con i vincoli dati

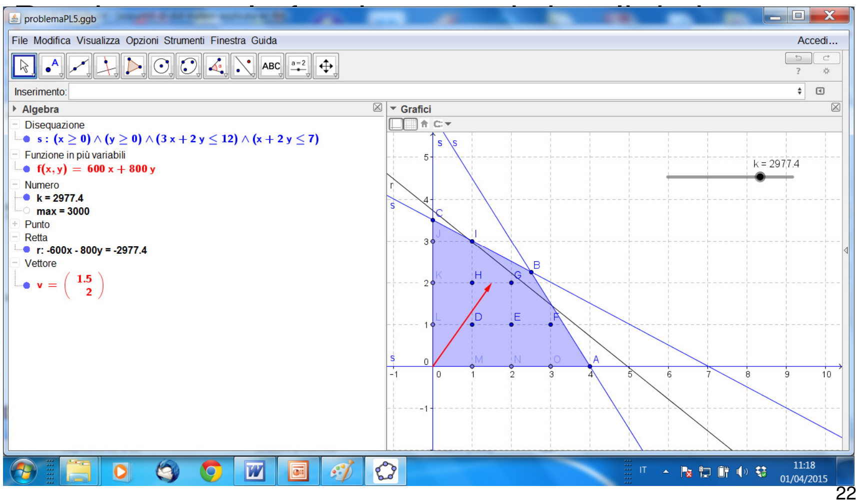
$$z = 600x_1 + 800x_2 \text{ funzione da massimizzare}$$

nel discreto

$$\begin{cases} 3x_1 + 2 \leq 12 \\ x_1 + 2x_2 \leq 7 \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{N} \end{cases}$$

21

Problema 5 (discreto) con metodo grafico



22

PL: il metodo del simplesso (dovuto a Dantzig)

- Funzione obiettivo

$$z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_{n-1} x_{n-1} + c_n x_n$$

- Vincoli

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1\,n-1}x_{n-1} + a_{1n}x_n \le b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2\,n-1}x_{n-1} + a_{2n}x_n \le b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{n\,n-1}x_{n-1} + a_{nn}x_n \le b_n \\ x_i \ge 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \end{cases}$$

- Si trasformano le disequazioni in equazioni mediante le variabili **scarto** (non negative).

23

PL: il metodo del simplesso esempio di variabile scarto

- Data la disequazione

$$2x_1 + 3x_2 + x_3 \le 10$$

- Si indica con

$$x_4 = 10 - (2x_1 + 3x_2 + x_3)$$

- Quindi si ottiene la equazione

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 10 \\ x_4 \ge 0 \end{cases}$$

24

PL: il metodo del simplesso esempio di variabile scarto

- Invece, data la disequazione

$$2x_1 + 3x_2 + x_3 \geq 8$$

- Si indica con

$$x_4 = (2x_1 + 3x_2 + x_3) - 8$$

- Quindi si ottiene la equazione

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 = 8 \\ x_4 \geq 0 \end{cases}$$

25

PL: il metodo del simplesso (dovuto a Dantzig)

- Funzione obiettivo "modificata"

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n + 0x_{n+1} + 0x_{n+2} + \ldots + 0x_{n+m}$$

- Vincoli modificati

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1\,n-1}x_{n-1} + a_{1n}x_n + x_{n+1} & = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2\,n-1}x_{n-1} + a_{2n}x_n \qquad + x_{n+2} & = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{n\,n-1}x_{n-1} + a_{nn}x_n \qquad\qquad + x_{n+m} & = b_n \\ x_i \geq 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n+m) & \end{cases}$$

26

PL: il metodo del simplesso significato geometrico

Ottimizzare la funzione obiettivo z

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n + 0x_{n+1} + 0x_{n+2} + \ldots + 0x_{n+m}$$

con l'iperpunto appartenente alla superficie dell'iperpoliedro definito dal sistema di equazioni

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1\,n-1}x_{n-1} + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2\,n-1}x_{n-1} + a_{2n}x_n + x_{n+2} = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{n\,n-1}x_{n-1} + a_{nn}x_n + x_{n+m} = b_n \\ x_i \geq 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n+m) \end{cases}$$

27

PL: il metodo del simplesso significato geometrico

Teorema. I massimi e i minimi della funzione z, se esistono, si trovano sui vertici dell'iperpoliedro definito dal sistema:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1\,n-1}x_{n-1} + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2\,n-1}x_{n-1} + a_{2n}x_n + x_{n+2} = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{n\,n-1}x_{n-1} + a_{nn}x_n + x_{n+m} = b_n \\ x_i \geq 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n+m) \end{cases}$$

28

PL: il metodo del simplesso per via algebrica

Se il sistema non ha molte variabili, per trovare i vertici del (iper)poliedro occorre risolvere

$$\binom{n+m}{m}$$

sistemi

29

PL: il metodo del simplesso per via algebrica: esempio

Rendere max la funzione con i vincoli dati

$$z = 5x_1 + 3x_2 + x_3 \text{ funzione da massimizzare}$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 \leq 15 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 \leq 10 \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0 \end{cases}$$

30

PL: il metodo del simplesso per via algebrica: esempio

Rendere max la funzione con i vincoli dati

$$z = 5x_1 + 3x_2 + x_3 \text{ funzione da massimizzare}$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 \le 15 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 \le 10 \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0, \quad x_3 \ge 0 \end{cases}$$

31

PL: il metodo del simplesso per via algebrica: esempio

Trasformiamo il problema con i vincoli scritti come equazioni

$$z = 5x_1 + 3x_2 + x_3 + 0x_4 + 0x_5 \quad \text{funzione da massimizzare}$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 \qquad = 15 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 \qquad + x_5 = 10 \\ x_i \ge 0 \end{cases}$$

Poi si annullano le variabili a 3 a 3, risolvendo 10 sistemi. Si trovano i 10 vertici. Il max si ha in (0,25,35).

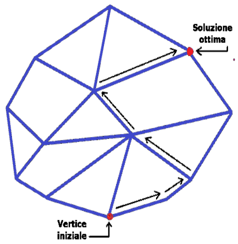
Laborioso, soprattutto con molte variabili!

32

PL: il metodo del simplesso

Il metodo del simplesso è un algoritmo che permette, attraverso un numero finito di iterazioni, di passare da una soluzione ammissibile di base alla soluzione ottima.

Geometricamente, si parte da un vertice e ci si muove sugli spigoli di un poliedro, arrivando in un vertice per cui si ha f massima.

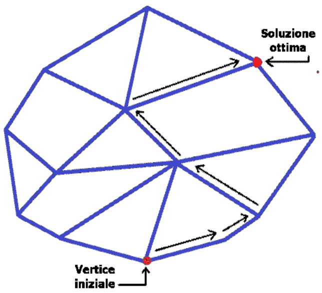


33

PL: il metodo del simplesso

Un sistema di disequazioni lineari definisce come regione ammissibile un politopo (o iperpoliedro).

L'algoritmo del simplesso inizia da un vertice iniziale e si sposta lungo i lati del politopo fin quando non raggiunge il vertice della soluzione ottima.



34

PL: il metodo del simplesso

Se il sistema di vincoli è nella forma standard, con tutti i coefficienti $b_i > 0$, una prima soluzione ammissibile di base si trova annullando le variabili di azione del problema e ricavando i valori delle variabili di scarto.

35

PL: il metodo del simplesso esempio

$z = 10x_1 + 8x_2$ funzione da massimizzare

con i vincoli

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 10 \\ 3x_1 + 2x_2 \le 24 \\ x_1 + 2x_2 \le 18 \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0 \end{cases}$$

36

PL: il metodo del simplesso esempio

Scriviamo il sistema in forma standard

$$z = 10x_1 + 8x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5$$

con i vincoli

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 & = 10 \\ 3x_1 + 2x_2 \quad + x_4 & = 24 \\ x_1 + 2x_2 \qquad + x_5 & = 18 \\ x_i \geq 0 \end{cases}$$

37

PL: il metodo del simplesso esempio

Prima soluzione ammissibile di base

(0, 0, 10, 24, 18) , si ottiene ovviamente z_1=0.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 & = 10 \\ 3x_1 + 2x_2 \quad + x_4 & = 24 \\ x_1 + 2x_2 \qquad + x_5 & = 18 \\ x_i \geq 0 \end{cases}$$

38

PL: il metodo del simplesso esempio

Osservando $z=10x_1+8x_2$, si decide di aumentare x_1 .
Seconda soluzione ammissibile di base
(8, 0, 2, 0, 10) , si ottiene z_2= 80
(entra x_1, esce x_4).

39

PL: il metodo del simplesso esempio

Si ricava x_1 nella seconda equazione e si sostituisce in z e nelle altre equazioni.

$$x_1 = 8 - \frac{2}{3}x_2 - \frac{1}{3}x_4$$

$$z = 10x_1 + 8x_2 = 10\left(8 - \frac{2}{3}x_2 - \frac{1}{3}x_4\right) + 8x_2 =$$

$$z = 80 + \frac{4}{3}x_2 - \frac{10}{3}x_4$$

40

PL: il metodo del simplesso esempio

$$z = 80 + \frac{4}{3}x_2 - \frac{10}{3}x_4$$

Per aumentare z, si deve aumentare il più possibile x_2.

Posto x_4=0, si vede, in base ai vincoli, che x_2 può essere aumentato di 6.

Si ottiene allora (4,6,0,0,2), con z_2=88.

Questa è la soluzione che realizza il massimo.

41

PL: il metodo del simplesso esempio

Si riscrive il sistema dei vincoli e la funzione obiettivo sostituendo a x_2 l'espressione ricavata dal secondo vincolo.

$$z = 88 - 4x_3 - 2x_4$$

Il valore di z non si può migliorare ulteriormente in quanto ogni variabile presente in z ha coefficiente negativo.

Quindi (4,6,0,0,2), con z_3=88 è la soluzione ottima.

42

PL: il metodo del simplesso

Il metodo del simplesso si può rendere in modo automatico con l'uso delle matrici e tramite il metodo di Jordan-Gauss (detto anche metodo del pivot).

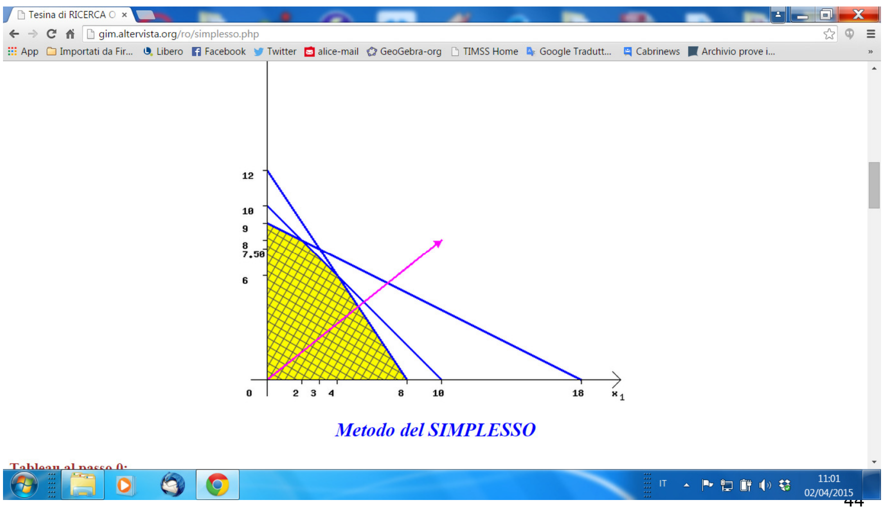
In rete è possibile trovare un'applet a questo indirizzo:

http://gim.altervista.org/ro/index.php

(implementazione nel linguaggio php)

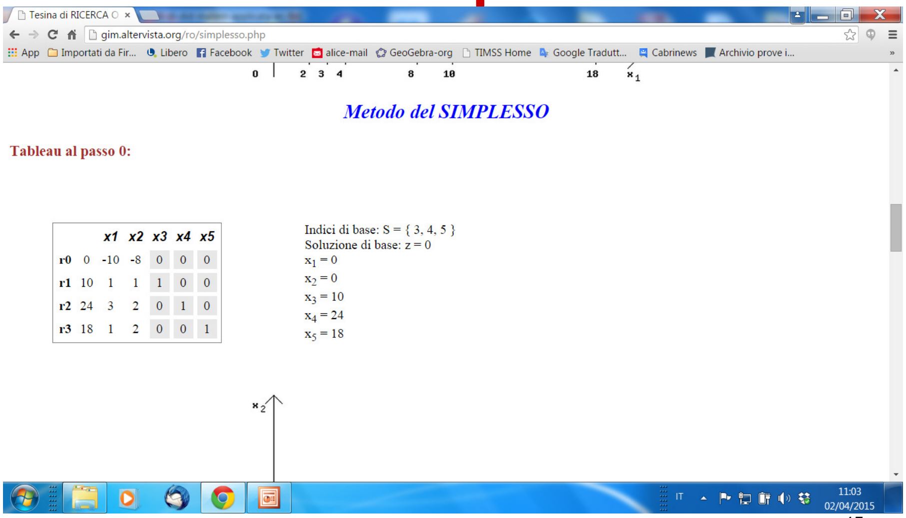
43

PL: il metodo del simplesso esempio

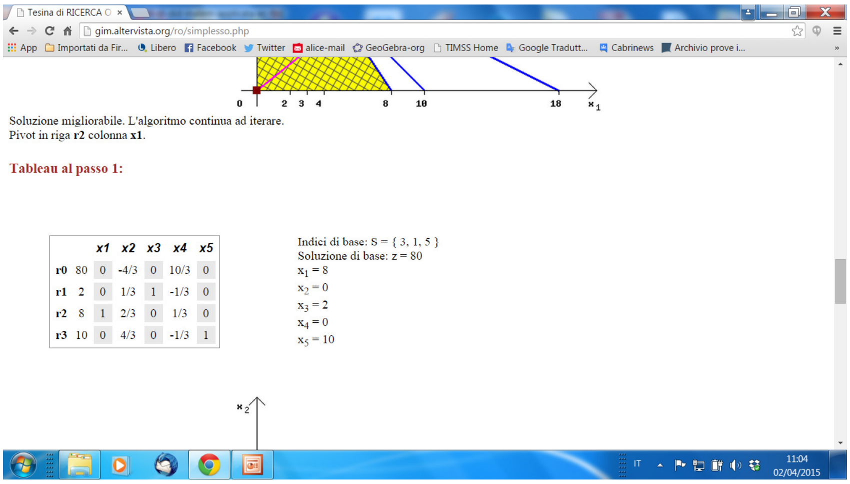


44

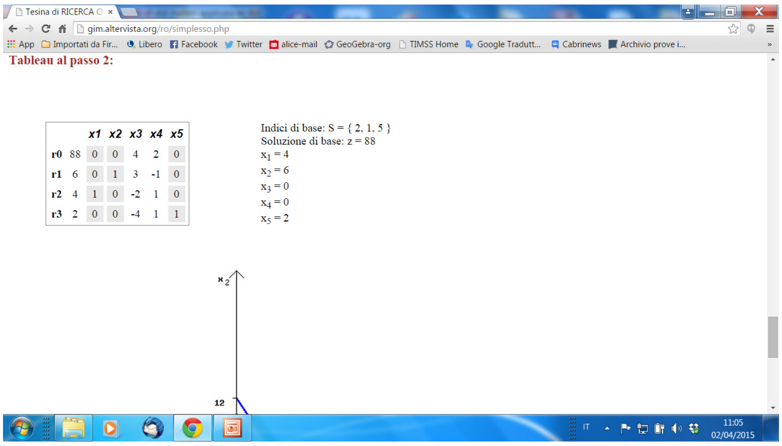
PL: il metodo del simplesso esempio



PL: il metodo del simplesso esempio



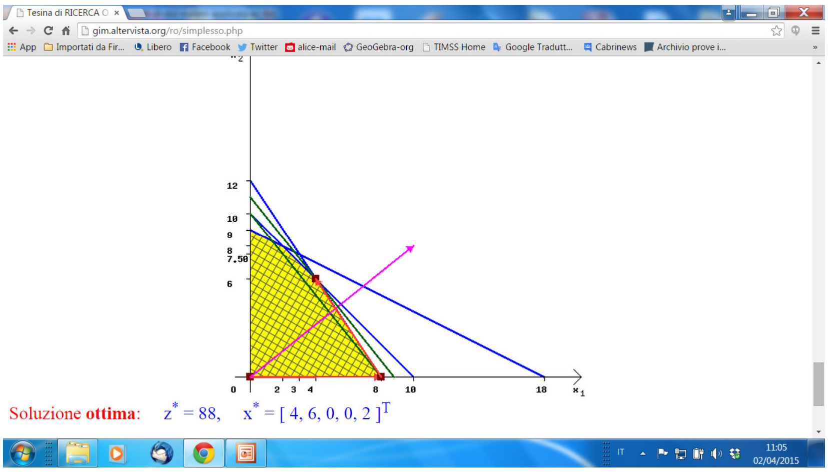
PL: il metodo del simplesso esempio



		x1	x2	x3	x4	x5
r0	88	0	0	4	2	0
r1	6	0	1	3	-1	0
r2	4	1	0	-2	1	0
r3	2	0	0	-4	1	1

47

PL: il metodo del simplesso esempio



48