TFA A048 . Matematica applicata

Incontro del 16 aprile 2014, ore 17-19

Appunti di didattica della matematica applicata all'economia e alla finanza.
Funzioni (di una variabile) utilizzate nello studio dell'Economia e applicazioni del concetto di derivata all'Economia

prof. Luigi Tomasi

Argomento da svolgere nella classe Quarta

Richiede dei prerequisiti sia di matematica che di economia
- funzioni di una variabile
- limiti di funzione
- funzioni continue
- principali funzioni dell'economia (funzione domanda, funzione offerta, ecc.)

Abilità
- saper costruire modelli matematici associati a contesti economici del tipo: produzione di impresa, utilità del consumatore; combinazione dei fattori produttivi
- impostare e analizzare i modelli matematici con gli strumenti forniti dall'analisi matematica
- sapere ottimizzare la soluzione dei problemi prendendo in considerazione i vincoli operativi
- saper effettuare e argomentare simulazioni di soluzioni alternative.

Competenze
- avere buona padronanza del concetto di derivata di una funzione reale di una variabile reale e delle sue applicazioni in Economia
- saper interpretare i problemi del contesto economico elaborando modelli descrittivi basati sulla ricerca del massimo e del minimo di funzioni
- essere in grado di risolvere problemi di economia, utilizzando gli strumenti matematici, anche con l'uso di strumenti informatici.

Funzione marginale ed elasticità di una funzione

Si dà la seguente definizione

$$\varepsilon = \frac{\frac{\Delta f}{f}}{\frac{\Delta x}{x}} = \frac{\text{variazione relativa di } f}{\text{variazione relativa di } x} = \text{coefficiente di elasticità}$$

$$\varepsilon = \frac{\frac{\Delta f}{\Delta x}}{\frac{f}{x}} = \frac{\text{valore marginale di } f}{\text{valor medio di } f} = \text{coefficiente di elasticità}$$

$$\varepsilon = \frac{x}{f}\frac{\Delta f}{\Delta x}$$

Al limite si ottiene

$$\varepsilon = \frac{x}{f}\frac{df}{dx} = \text{elasticità puntuale}$$

Se la funzione *f* è crescente, l'elasticità è positiva
Se la funzione *f* è decrescente, l'elasticità è negativa

La funzione domanda
Si definisce domanda complessiva di una merce la quantità x che viene richiesta, ad un dato prezzo p , dalla totalità degli acquirenti.
$x = f(p)$
"la domanda x è una funzione decrescente (meglio, non crescente) del prezzo p.
In Economia si usa molto la funzione inversa, ammesso che esista, $p = f^{-1}(x)$, che viene chiamata *funzione di vendita* ed esprime il prezzo in funzione della domanda e determina il prezzo p a cui si può vendere una determinata quantità x di merce.

Le più comuni funzioni domanda
$x = a - bp$ con $a > 0$ e $b > 0$ (lineare)
$x = a - bp^2$ con $a > 0$ e $b > 0$ (quadratico)
$x = \frac{a}{p+c} - b$ con $a > 0$ e $b \geq 0, c \geq 0$ (ramo di iperbole)
$x = a\,e^{-bp}$ con $a > 0$ e $b > 0$ (esponenziale)
$x = \frac{a}{p^\alpha}$ con $a > 0$ e $b > 0$ (potenza)

Coefficiente di elasticità

Per valutare la variazione della domanda rispetto al prezzo, si calcola il coefficiente di elasticità, rapporto tra la variazione relativa della domanda e la variazione relativa del prezzo.

Se indichiamo con p_1 e p_2 i prezzi di uno stesso bene e con x_1 e x_2 le corrispondenti quantità domandate, la variazione relativa della domanda è definita come segue:
$$\frac{x_2 - x_1}{x_1} = \frac{\Delta x}{x_1}$$
e la variazione relativa dei prezzi come segue:
$$\frac{p_2 - p_1}{p_1} = \frac{\Delta p}{p_1}$$

Si definisce *coefficiente di elasticità relativa della domanda* il rapporto seguente:
$$\varepsilon_d = \frac{\frac{x_2 - x_1}{x_1}}{\frac{p_2 - p_1}{p_1}} = \frac{p_1}{x_1} \cdot \frac{x_2 - x_1}{p_2 - p_1} = \frac{p_1}{x_1} \cdot \frac{\Delta x}{\Delta p} = \text{coefficiente di elasticità rel. della domanda}$$
Al limite si ha
$$\varepsilon_d = \frac{p}{x} \cdot \frac{dx}{dp} = \text{elasticità puntuale della domanda}$$
in un punto di coordinate (p, x) nel diagramma px
(p sull'asse delle ascisse e x sull'asse delle ordinate).

Di solito si considera l'espressione $|\varepsilon_d|$

Se $\left|\varepsilon_d\right| < 1$ la domanda è rigida o *non elastica*

Se $\left|\varepsilon_d\right| = 1$ la domanda è anelastica o unitaria

Se $\left|\varepsilon_d\right| > 1$ la domanda si dice *elastica*-

Il coefficiente di elasticità varia da punto a punta della curva della domanda.

Legge dell'offerta

Si tratta di un'altra funzione molto importante in Economia.
In modo approssimato, si può definire offerta la quantità di merce offerta sul mercato dai produttori. L'offerta è funzione del prezzo *p* della merce. E' una funzione non decrescente, nei limiti della capacità produttiva.
Indicando con *x*= quantità offerta di una data merce e con *p* il prezzo, si ha
$x = g(p)$

La funzione inversa se esiste, determina *p* in funzione dell'offerta *x* ed è detta *funzione di produzione.*

Le curve dell'offerta più utilizzate in Economia sono:

$x = -a + bp$ con $a \geq 0$ e $b > 0$ (modello lineare)

$x = a\sqrt{p - b}$ con $a > 0$ e $b \geq 0$ (una legge quadratica inversa)

$x = a + b\,p^{\alpha}$ con $a \geq 0,\ b > 0,\ \alpha > 0$ (modello potenza).

Notiamo che nel modello lineare il valore dell'intercetta è negativo, per indicare che se il prezzo è minore di un certo valore, l'offerta è nulla, in quanto ai produttori non conviene produrre.

Anche per l'offerta si può calcolare l'elasticità, che risulta positiva:

$\varepsilon_o = \frac{p}{x} \cdot \frac{dx}{dp}$ =elasticità puntuale dell'offerta

Equilibrio tra domanda ed offerta

Un problema che si può presentare è la determinazione del prezzo di equilibrio tra domanda ed offerta in un mercato di libera concorrenza.

Per le caratteristiche specifiche del mercato di libera concorrenza, il prezzo di un bene è determinato dall' "incontro" tra la domanda e l'offerta.

In un mercato di libera concorrenza il modello per l'equilibrio del mercato è dato da seguente sistema:

$$\begin{cases} x_d = f(p) \\ x_s = g(p) \\ x_d = x_o \end{cases}$$

dove

$x_d =$ *quantità di merce richiesta dai consumatori*

$x_s =$ *quantità di merce offerta dai produttori*

L'equazione

$x_d = x_s$

Esprime la condizione di equilibrio tra domanda ed offerta.
Da essa si ricava il prezzo di equilibrio.

Esempio
La domanda e l'offerta sono espresse in unità convenzionali dalle funzioni:

$x_d = 160 - 0,1p^2$

$x_s = -14 + 2,8p$

Il modello di equilibrio sarà:

$$\begin{cases} x_d = 160 - 0,1p^2 \\ x_s = -14 + 2,8p \\ x_d = x_o \end{cases}$$

che risolto darà

$\bar{x} = x_d = x_o = 70$

$p = 30$

La domanda a sua volta non è funzione solo del prezzo, ma è funzione anche del tempo, ossia la domanda di un bene può mutare al passare del tempo. E lo stesso per l'offerta. Si raggiunge quindi un altro equilibrio.

Costi di produzione

Nella produzione di un bene, un'impresa sostiene vari tipi di costi: costi *fissi,* costi *variabili* proporzionali e costi variabili non proporzionali.

Il costo totale è una funzione della quantità *x* di merce prodotta (con $x \geq 0$)

$y = C(x)$.

Questa funzione è crescente e può essere rappresentata da diversi tipi di relazioni. Gli economisti usano più frequentemente le seguenti:

a) $y = ax + b$ con $a > 0$ e $b > 0$ (funzione lineare; è una semiretta crescente)

b) $y = ax^2 + bx + c$ con $a > 0$ e $b, c \geq 0$ (funzione quadratica rappresentata da un arco di parabola; può essere anche $a < 0$ e $b, c > 0$; in questo caso si usa dove è crescente

c) $y = ax^3 - bx^2 + cx + d$ con $a > 0$ e $b, c, d \geq 0$ (funzione cubica con coefficienti scelti in modo che la curva sia crescente)

d) $y = a\,b^x$ con $a > 0,\ b > 1$ (funzione esponenziale rappresentata da una curva esponenziale crescente)

Qualunque sia la funzione dei costi, posto x=0, il valore $C(0)$ rappresenta l'importo complessivo dei costi fissi.

Esempio

Impresa con costi fissi mensili di 10000 euro e costi variabili dati dalla seguente relazione

$$C_v(x) = x^3 - 60x^2 + 1500x$$

Rappresentare la funzione del costo totale.

$$C_v(x) = x^3 - 60x^2 + 1500x + 10000$$
$$x \geq 0$$

Si ottiene un flesso per $x = 20$ e un grafico detto modello ad "S" rovescato.

Costo medio

Per l'analisi dei costi di produzione si introducono di solito altri due funzioni:

Funzione costo medio (o unitario)

$$c_u(x): y = \frac{C(x)}{x}$$

con $x \geq 0$.

Il costo medio è la somma tra il costo variabile medio, che è una funzione crescente, e il costo fisso medio che è una funzione decrescente.

- Se la funzione del costo totale è lineare, allora il costo medio è il seguente

$$y = \frac{ax+b}{x} \quad \text{con } x > 0$$

che è un ramo di iperbole equilatera di asintoti x=0 e y=a.

- Se la funzione del costo totale è quadratica, allora il costo medio è il seguente

$$y = \frac{ax^2+bx+c}{x} = ax + b + \frac{c}{x} \quad \text{con } x > 0$$

che ha per grafico un ramo di iperbole non equilatera di asintoti x=0 e $y = ax + b$.

Il costo medio è la somma del costo variabile medio (crescente) $y = ax + b$ e del costo fisso medio $y = \frac{c}{x}$ che è decrescente.

Ne consegue che il costo medio è decrescente fino ad un certo punto, il punto di minimo, e poi diventa crescente.

Per trovare questo punto di minimo si usa la derivata, ossia:

$$y' = a - \frac{c}{x^2}$$

da cui si ottiene

$$a = \frac{c}{x^2}$$

$$x = \sqrt{\frac{c}{a}}$$

Esempio
Un'impresa sostiene
- costo fisso mensile 10000 euro
- costo di 16 euro per ogni unità prodotta
- una spesa di manutenzione degli impianti pari al 4% del quadrato delle unità prodotte.

Si ottiene
$C(x) = 10000 + 16x + 0,04x^2$
Quindi il costo unitario è
$$y = \frac{10000 + 16x + 0,04x^2}{x}$$
Che si può scrivere
$$y = \frac{10000}{x} + 16 + 0,04x$$
Gli asintoti sono $x = 0$ e $y = 16 + 0,04x$ e il punto di minimo è dato da
$x = \sqrt{\frac{10000}{0,04}}$ =500.

Costo marginale (nel discreto)
$$c_m(x): y = \frac{\Delta C(x)}{\Delta x}$$
rapporto incrementale tra l'incremento del costo conseguente a un incremento della quantità prodotta.
Significato economico: costo sostenuto per aggiungere alla produzione una unità di prodotto.

Costo marginale (nel continuo)
$$c_m(x): y = \frac{dC(x)}{dx}$$
derivata del costo totale rispetto alla quantità prodotta.
Significato economico: "velocità" con cui varia in un punto il costo sostenuto per aggiungere alla produzione *x* una quantità infinitesima *dx* di quel prodotto.

Se la funzione del costo totale è lineare, allora il costo marginale è costante; infatti si ha costo totale $C(x) = ax + b$.
Il costo marginale è $y = a$.

Se la funzione del costo totale è quadratica
$C(x) = ax^2 + bx + c$
allora la funzione costo marginale è
$$c_m(x): y = \frac{dC(x)}{dx} = 2ax + b.$$

Possiamo verificare la seguente importante proprietà:

Proprietà. Le curve del costo medio e del costo marginale si intersecano nei punti stazionari del costo medio (cioè nei punti in cui il costo medio ha derivata nulla).

Consideriamo la funzione costo unitario $y = c_u(x) = \dfrac{C(x)}{x}$.

Derivandola otteniamo

$$y' = \frac{x\,C'(x) - C(x)}{x^2}$$

Ponendo uguale a 0 questa derivata, otteniamo:

$$x\,C'(x) - C(x) = 0$$

che fornisce

$$C'(x) = \frac{C(x)}{x}$$

che è proprio la tesi, perché possiamo interpretare questa equazione con il sistema

$$\begin{cases} y = C'(x) \\ y = \dfrac{C(x)}{x} \end{cases}$$

ovvero come intersezione della curva del costo marginale con la curva del costo unitario.

La derivata del costo medio si può anche scrivere nel seguente modo:

$$y' = \frac{1}{x}\left(\frac{x\,C'(x) - C(x)}{x}\right) = \frac{1}{x}\left(C'(x) - \frac{C(x)}{x}\right)$$

da cui si ricava che

- Se la derivata del costo medio è $y' < 0$ se $C'(x) < \dfrac{C(x)}{x}$
- Se la derivata del costo medio è $y' = 0$ se $C'(x) = \dfrac{C(x)}{x}$
- Se la derivata del costo medio $y' > 0$ se $C'(x) > \dfrac{C(x)}{x}$.

Ne segue che

- il costo medio è decrescente se il costo marginale è minore del costo unitario
- il costo medio ha un punto di stazionarietà quando il costo marginale è uguale al costo medio
- il costo medio è crescente se il costo marginale è maggiore del costo unitario.

Esempio

Data la funzione del costo totale

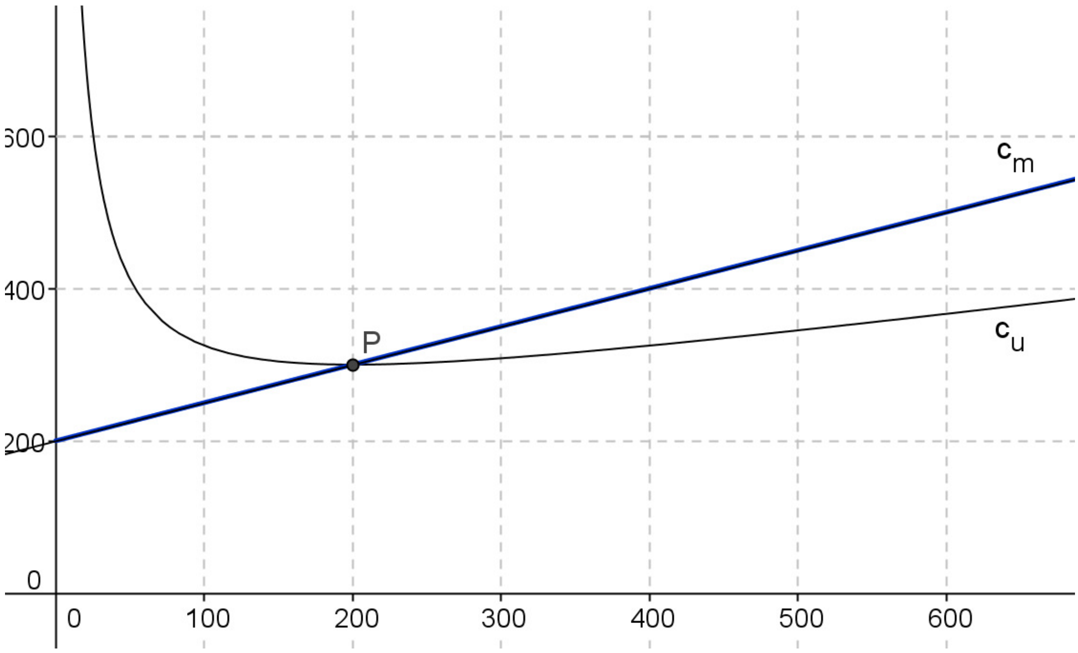
$$C(x) = 10000 + 200x + 0{,}25x^2$$

le funzioni del costo unitario e del costo marginale sono

$$c_u(x):\ y = \frac{C(x)}{x} = \frac{10000 + 200x + 0{,}25x^2}{x}$$

$$c_m(x):\ y = \frac{dC(x)}{dx} = 200 + 0{,}5x$$

Disegniamo il grafico delle due funzioni:



La funzione costo unitario è un ramo di iperbole non equilatera.
La funzione costo marginale è una retta.
Il punto di intersezione si ha per x=200.

Ne segue che

- il costo medio è decrescente se il costo marginale è minore del costo unitario, cioè per x<200;
- il costo medio ha un punto di stazionarietà quando il costo marginale è uguale al costo medio e si ha per x=200;
- il costo medio è crescente se il costo marginale è maggiore del costo unitario e questo si ha per x>200.

Le funzioni che esprimono i ricavi e i profitti

Due funzioni importanti in Economia sono la funzione del *ricavo* e la funzione *dell'utile netto* o *profitto.*

Ricavo
Detta x la quantità venduta di un certo bene, si distinguono due casi:

- in un mercato di concorrenza perfetta il prezzo di vendita p è costante, perciò il ricavo è dato da

$$R(x) = p\,x$$

- In un mercato monopolistico il prezzo si ricava dalla funzione di vendita, che è l'inversa della funzione di domanda $x = f(p)$. Si ottiene che il prezzo è una funzione della domanda $p(x)$.

Pertanto il ricavo si può scrivere in questo caso

$$R(x) = p(x) \cdot x\,.$$

Ricavo medio e ricavo marginale

Anche per la funzione ricavo ha senso introdurre il concetto di *ricavo medio* (o unitario) e di *ricavo marginale*.

Il ricavo medio è il rapporto tra il ricavo totale e la quantità di un dato bene venduta. Pertanto si ha

- in un mercato di concorrenza perfetta il prezzo di vendita *p* è costante, perciò il ricavo è dato da

$$r_u(x): y = \frac{R(x)}{x} = p$$

- In un mercato monopolistico il prezzo si ricava dalla funzione di vendita, che è l'inversa della funzione di domanda $x = f(p)$. Si ottiene che il prezzo è una funzione della domanda $p(x)$.

$$r_u(x): y = \frac{R(x)}{x} = p(x)$$

Ricavo marginale

Il ricavo marginale, se la funzione $R(x)$ è derivabile, è dato dalla derivata del ricavo rispetto alla quantità *x*. Pertanto si ha

- in un mercato di concorrenza perfetta il prezzo di vendita *p* è costante, perciò il ricavo è dato da

$$r_m(x): y = R'(x) = p$$

- In un mercato monopolistico si ottiene che il prezzo è una funzione della domanda $p(x)$.

$$r_m(x): y = \frac{dR(x)}{dx} = p'(x) \cdot x + p(x)$$

Notiamo che nel caso di concorrenza perfetta, sia il ricavo unitario che il ricavo marginali sono costanti e uguali al prezzo *p*.

Esempio 1

In un mercato di concorrenza perfetta le leggi della domanda e dell'offerta sono date (in unità convenzionali) da

$x_d = 100 - 2p$

$x_s = -20 + p$

Determinare la funzione del ricavo totale, il ricavo medio e il ricavo marginale.

Dal modello di equilibrio ricaviamo il prezzo di equilibrio, risolvendo

$x_d = x_s$

Si trova

$p = 40$

La funzione ricavo totale è
$R(x) = 40x$
Il ricavo medio (o unitario) è:
$$r_u(x): y = \frac{R(x)}{x} = 40$$
Il ricavo marginale è:
$r_m(x): y = R'(x) = 40$

Esempio 2
In un mercato monopolistico la domanda di un bene è data da:

$x_d = 50 - 0,5p$
Determinare la funzione del ricavo totale, il ricavo medio e il ricavo marginale e determinare per quale quantità il ricavo è massimo.

Dalla legge della domanda si ha:

$p = 100 - 2x$

Il ricavo totale sarà quindi:

$R(x) = (100 - 2x)x$

Il ricavo medio (o unitario) è:
$$r_u(x): y = \frac{R(x)}{x} = p(x) = 100 - 2x$$
Il ricavo marginale è:

$r_m(x): y = R'(x) = 100 - 4x$

La funzione ricavo totale è una parabola:

$R(x) = (100 - 2x)x = 100x - 2x^2$.

Il massimo si ha nel vertice

V(25, 1250).

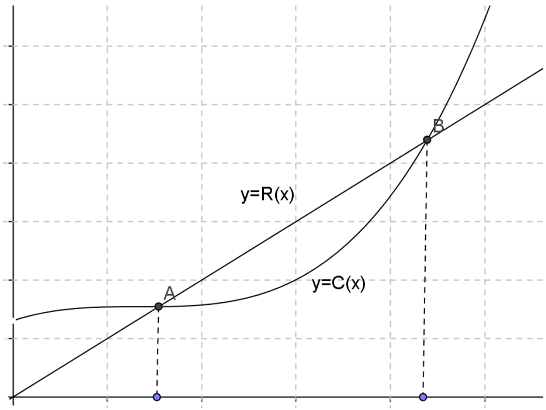
Utile netto o profitto

Si definisce utile netto o profitto la differenza tra il ricavo totale e il costo totale

$\Pi(x) = R(x) - C(x)$

Nella teoria economica si usa il **diagramma di redditività** per confrontare ricavi e utili.

Nel caso di concorrenza perfetta si ha il diagramma indicato nella seguente figura.



Si ha ovviamente un utile quando $R(x) > C(x)$ e una perdita quando $R(x) < C(x)$.
I punti A e B in cui il costo è uguale al ricavo sono detti **break-even points** o **punti di equilibrio economico.**

Massimo utile
Ovviamente si presenta il problema di determinare la produzione *x* in modo che il profitto sia massimo. Ricaviamo la derivata prima di

$$\Pi(x) = R(x) - C(x)$$

$$\Pi'(x) = R'(x) - C'(x) = 0$$

E la derivata seconda
$\Pi''(x) = R''(x) - C''(x) < 0$.

Limitandoci al segno della derivata prima, deve essere a sinistra del punto $R'(x) > C'(x)$ e a destra del punto $R'(x) < C'(x)$.

Si deduce la legge economica:

si ha il massimo utile per quel valore di *x* per cui il costo marginale è uguale al ricavo marginale, se per quel valore il tasso di variazione del ricavo marginale è inferiore al tasso di variazione marginale del costo marginale.

Esaminiamo il profitto in un mercato con concorrenza perfetta
$\Pi(x) = R(x) - C(x) = px - C(x)$
La condizione necessaria perché l'utile sia massimo è
$\Pi'(x) = p - C'(x) = 0$
Da cui si ricava
$p = C'(x)$
La condizione sufficiente è data da
$\Pi''(x) < 0$
Che fornisce
$-C''(x) < 0$
Cioè
$C''(x) > 0$
Quindi nel punto di massimo profitto il prezzo deve essere uguale al costo marginale e la curva della funzione costo deve essere convessa.

Libri di testo

- Annamaria Gambotto Manzone, Bruna Consolini,
Nuovo matematica con applicazioni informatiche, vol. 1, vol. 2, vol. 3
Per gli Istituti Tecnici a Indirizzo Economico
Tramontana RCS, Milano

-Bergamini, Trifone, Barozzi, Matematica.Rosso, vol.3, vol.4, vol.5
Zanichelli Bologna

-Manfredi Toscano,
Math.rosso. vol.1, vol. 2, vol.3
Ghisetti & Corvi, Milano.