

TFA A048 . Matematica applicata

Incontro del 28 aprile 2014, ore 15-17

Appunti di didattica della matematica applicata all'economia e alla finanza. Applicazioni dell'analisi (funzioni in più variabili) a problemi di Economia

prof. Luigi Tomasi

Argomento da svolgere nella classe Quinta.

Richiede dei prerequisiti sia di matematica che di economia

- funzioni di più variabili
- conoscenza del calcolo differenziale in una variabile
- principali funzioni dell'economia (funzione domanda, funzione offerta, ecc.)
- funzioni marginali
- elasticità di una funzione

Abilità

- saper costruire modelli matematici associati a contesti economici del tipo: produzione di impresa, utilità del consumatore; combinazione dei fattori produttivi
- impostare e analizzare i modelli matematici con gli strumenti forniti dall'analisi matematica
- sapere ottimizzare la soluzione dei problemi prendendo in considerazione i vincoli operativi
- saper effettuare e argomentare simulazioni di soluzioni alternative.

Competenze

- Avere buona padronanza del concetto di funzione reale di due variabili e delle sue caratteristiche
- Saper interpretare i problemi del contesto economico elaborando modelli descrittivi basati sulla ricerca del massimo e del minimo di funzioni
- essere in grado di risolvere problemi di economia, utilizzando gli strumenti matematici in modo manuale ed usando anche strumenti informatici.

Funzioni marginali ed elasticità parziali di una funzione

Per funzioni di due o più variabili, come *costi*, *ricavi*, *quantità prodotte*, ecc. interessa conoscere quanto varia una funzione a causa di una variazione infinitesima di una variabile, mentre le altre variabili rimangono costanti.

Se la funzione f è differenziabile (pertanto ammette derivate parziali prime continue), si definisce **funzione marginale rispetto a una variabile** la derivata parziale prima della funzione rispetto a quella variabile.

Consideriamo la *funzione di produzione*

$$Q = f(K, L)$$

Che esprime la quantità Q prodotta di un bene in funzione dei due fattori di produzione K =capitale e L =lavoro.

Se la funzione f è differenziabile le due derivate parziali $\frac{\partial f}{\partial K}$ e $\frac{\partial f}{\partial L}$ sono dette rispettivamente *prodotto marginale del capitale* e *prodotto marginale del lavoro*.

Esse rappresentano, approssimativamente, la variazione della quantità prodotta per una variazione di una unità, del capitale quando rimane costante o il lavoro L o il capitale K .

Esempio 1

Data la funzione

$$Q = 30KL - K^2 - 2L^2 \text{ (in unità convenzionali)}$$

Il prodotto marginale del capitale è dato da:

$$\frac{\partial Q}{\partial K} = 30L - 2K$$

E il prodotto marginale del lavoro è dato da:

$$\frac{\partial Q}{\partial L} = 30K - 4L.$$

Per un impiego di $K=50$ e di $L=10$, determinare quale fattore di produzione influenza maggiormente la produttività.

$$\left(\frac{\partial Q}{\partial K}\right)_{P_0} = 200$$

Mentre

$$\left(\frac{\partial Q}{\partial L}\right)_{P_0} = 1460$$

Quindi la produzione, con i dati assunti, è molto più influenzata dalla variazione del fattore di produzione L che dal fattore di produzione K .

Utilità del consumatore. Un'altra applicazione delle derivate parziali si ha nello studio della *funzione dell'utilità del consumatore* se si considerano n beni

$$U = f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$$

x_i è la quantità dell' i -esimo bene.

Se la funzione U è derivabile, le derivate parziali $\frac{\partial U}{\partial x_i}$ rappresentano le *utilità marginali* riferite ai singoli beni.

Esempio 2

E' assegnata la seguente funzione di utilità di un consumatore espressa rispetto a due beni dei quali ha disponibilità

$$U = x_1^\alpha \cdot x_2^\beta$$

con $0 < \alpha < 1$ e $0 < \beta < 1$.

Le utilità marginali sono rispettivamente

$$\frac{\partial U}{\partial x_1} = \alpha x_1^{\alpha-1} \cdot x_2^\beta \quad \text{utilità marginale del primo bene}$$

$$\frac{\partial U}{\partial x_2} = \beta x_1^\alpha \cdot x_2^{\beta-1} \quad \text{utilità marginale del secondo bene.}$$

Queste due funzioni sono entrambe decrescenti. Lo si dimostra derivando un'altra volta, ad esempio

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial U}{\partial x_1} \right) = \frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2} = \alpha(\alpha-1) x_1^{\alpha-2} \cdot x_2^\beta$$

che è negativa, essendo $\alpha-1 < 0$.

Elasticità parziali

Avevamo dato la seguente definizione per una funzione in una sola variabile

$$\varepsilon = \frac{\frac{\Delta f}{f}}{\frac{\Delta x}{x}} = \frac{\text{variazione relativa di } f}{\text{variazione relativa di } x} = \text{coefficiente di elasticità}$$

$$\varepsilon = \frac{\frac{\Delta f}{f}}{\frac{x}{f}} = \frac{\text{valore marginale di } f}{\text{valor medio di } f} = \text{coefficiente di elasticità}$$

$$\varepsilon = \frac{x}{f} \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

Al limite si ottiene

$$\varepsilon = \frac{x}{f} \frac{df}{dx} = \text{elasticità puntuale}$$

Se la funzione f è crescente, l'elasticità è positiva

Se la funzione f è decrescente, l'elasticità è negativa

Per valutare la variazione della domanda rispetto al prezzo, avevamo calcolato il coefficiente di elasticità, rapporto tra la variazione relativa della domanda e la variazione relativa del prezzo.

Se indichiamo con p_1 e p_2 i prezzi di uno stesso bene e con x_1 e x_2 le corrispondenti quantità domandate, la variazione relativa della domanda è definita come segue:

$$\frac{x_2 - x_1}{x_1} = \frac{\Delta x}{x_1}$$

e la variazione relativa dei prezzi come segue:

$$\frac{p_2 - p_1}{p_1} = \frac{\Delta p}{p_1}$$

Si definisce *coefficiente di elasticità relativa della domanda* il rapporto seguente:

$$\varepsilon_d = \frac{\frac{x_2 - x_1}{x_1}}{\frac{p_2 - p_1}{p_1}} = \frac{p_1}{x_1} \cdot \frac{x_2 - x_1}{p_2 - p_1} = \frac{p_1}{x_1} \cdot \frac{\Delta x}{\Delta p} = \text{coefficiente di elasticità rel. della domanda}$$

Al limite si ha

$$\varepsilon_d = \frac{p}{x} \cdot \frac{dx}{dp} = \text{elasticità puntuale della domanda}$$

in un punto di coordinate (p, x) nel diagramma px
(p sull'asse delle ascisse e x sull'asse delle ordinate).

Di solito si considera l'espressione $|\varepsilon_d|$

Se $|\varepsilon_d| < 1$ la domanda è rigida o *non elastica*

Se $|\varepsilon_d| = 1$ la domanda è anelastica o unitaria

Se $|\varepsilon_d| > 1$ la domanda si dice *elastica*

Il coefficiente di elasticità varia da punto a punto della curva della domanda.

Il coefficiente di elasticità si estende alle funzioni di più variabili

Sia $z = f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ una funzione differenziabile. Si definisce *grado di elasticità parziale* di z rispetto a una variabile x_i , il seguente rapporto.

$$\varepsilon_{z x_i} = \frac{\frac{\partial z}{\partial x_i}}{\frac{z}{x_i}} = \frac{x_i}{z} \frac{\partial z}{\partial x_i} = \frac{\text{valore marginale di } z \text{ rispetto a } x_i}{\text{valor medio di } z \text{ rispetto a } x_i} = \text{grado di elasticità parziale}$$

Di solito si considera l'espressione $|\varepsilon_{z x_i}|$

Se $|\varepsilon_{z x_i}| < 1$ la funzione è *non elastica*

Se $|\varepsilon_{z x_i}| = 1$ la funzione è elastica unitaria

Se $|\varepsilon_{z x_i}| > 1$ la funzione dice *elastica*.

Esempio 3

La domanda di un bene è funzione del prezzo e del reddito dei consumatori secondo la legge:

$$q = 1000 - 2p + 0,01Y$$

dove p = prezzo del bene

Y = reddito

Trovare l'elasticità della domanda rispetto al prezzo e verificare che è negativa.

$$\varepsilon_{qp} = \frac{\partial q}{\partial p} \cdot \frac{p}{q}$$

Qual è il significato?

Determinare l'elasticità della domanda rispetto al reddito

$$\varepsilon_{qY} = \frac{\partial q}{\partial Y} \cdot \frac{Y}{q}$$

e verificare che è positiva.

Verificare per i seguenti valori: $p=100$, $Y=6000$.

Poiché risulta $|\varepsilon_{qp}| < 1$ la domanda risulta non elastica rispetto al prezzo. Stesso rispetto al reddito.

Se si pone $p=300$ e $Y=6000$, la domanda risulta elastica rispetto al prezzo.

La domanda di un bene può essere funzione, oltre che del prezzo del bene stesso e del reddito, anche del prezzo di altri beni.

L'elasticità parziale della domanda di un bene rispetto al prezzo di un altro bene è detta, in economia, **elasticità incrociata**.

I beni sono distinti in

- succedanei o surrogati, se un bene può sostituirne un altro
- complementari, come ad esempio la benzina e l'automobile (elasticità incrociata negativa).

Se tra due beni non esiste relazione, l'elasticità incrociata è nulla.

Esempio 4

La domanda di un bene è funzione del prezzo del bene stesso, del prezzo di un altro bene e del reddito del consumatore, secondo la legge:

$$q_1 = 2000 - 5p_1 + 2p_2 + 0,02Y$$

dove q_1 è la quantità richiesta del primo bene, p_1 è il prezzo del primo bene, p_2 è il prezzo del secondo bene ed Y è il reddito.

Calcolare le elasticità parziali.

$$\varepsilon_{q_1 p_1} = \frac{\partial q_1}{\partial p_1} \cdot \frac{p_1}{q_1}$$

$$\varepsilon_{q_1 p_2} = \frac{\partial q_1}{\partial p_2} \cdot \frac{p_2}{q_1} = 0,45$$

...

...

Caso numerico

Posto $p_1=300$, $p_2=250$, $Y=5000$, si ha $q_1=1100$.

Calcolare le elasticità.

Massimo profitto di un'impresa

Si definisce utile netto o profitto la differenza tra il ricavo totale e il costo totale

$$\Pi = R - C$$

Profitto di una impresa in un mercato di concorrenza perfetta

Un'impresa produce due beni in un mercato di concorrenza perfetta q_1, q_2 ai prezzi p_1, p_2 . Nota la funzione costi $C(q_1, q_2)$, determiniamo la combinazione produttiva che consente il massimo utile.

La funzione ricavo risulta

$$R = p_1 q_1 + p_2 q_2$$

La funzione profitto o utile da massimizzare è data da

$$\Pi = R - C = p_1 q_1 + p_2 q_2 - C(q_1, q_2)$$

Esempio 1

Un'impresa produce due beni e li vende in un mercato di concorrenza perfetta ai prezzi

$p_1=320, p_2=510$.

Supponiamo che il costo congiunto per la produzione dei due beni sia dato dalla funzione

$$C(q_1, q_2) = q_1^2 + q_1 q_2 + 2 q_2^2.$$

Determinare la combinazione produttiva che massimizza il profitto.

Ricaviamo le derivate parziali prime.

Candidato=(110,100)

Si determina l'hessiano.

Si trova il massimo.

Profitto di una impresa in condizioni di monopolio

Consideriamo ora il problema di determinare il massimo profitto di un'impresa che produce due beni e li vende in condizione di monopolio.

In questa condizione i prezzi non sono costanti ma dipendono dalle funzioni di domanda dei due prodotti (che possono essere complementari o surrogati).

Esempio 2

Le due leggi della domanda sono

$$q_1 = 1000 - 3p_1 + p_2$$

$$q_2 = 800 + 2p_1 - 4p_2$$

Il costo di produzione è di 180 per ogni unità del primo prodotto e di 230 per ogni unità del secondo prodotto.

Determinare la combinazione produttiva che consente il massimo utile.

Ricaviamo i prezzi in funzione delle quantità q_1 e q_2 .

La funzione che esprime il profitto è

$$\begin{aligned}\Pi &= R - C = p_1 q_1 + p_2 q_2 - C \\ &= p_1 q_1 + p_2 q_2 - (180q_1 + 230q_2) \\ \Pi(q_1, q_2)\end{aligned}$$

Si determinano le derivate parziali prime e poi con l'hessiano il punto di massimo.

Profitto di un'impresa che vende un prodotto in due mercati diversi in regime di monopolio

Un produttore vende uno stesso prodotto in regime di monopolio su due mercati separati, a prezzi diversi oppure uguali.

Si devono determinare le quantità q_1 e q_2 dello stesso prodotto che deve immettere sui due mercati in modo che il profitto sia massimo, tenendo conto che, in generale, le leggi della domanda nei due mercati sono diverse.

Esempio 3

Un'impresa vende uno stesso prodotto in due mercati separati in cui le leggi della domanda sono date da

$$q_1 = 334 - 0,4 p_1$$

$$q_2 = 111 - 0,1 p_2$$

dove q_1 e q_2 sono le domande e p_1 e p_2 sono i prezzi.

Supponiamo che il costo totale di produzione sia espresso dalla relazione

$$C = 1000 + 10q + 0,2q^2$$

dove $q = q_1 + q_2$.

Il problema consiste nel massimizzare il seguente profitto:

$$\Pi = p_1 q_1 + p_2 q_2 - C.$$

Caso con **prezzi diversi**.

Caso con **prezzi uguali**.

3. Massimo dell'utilità di un consumatore con il vincolo del bilancio

Riguarda le scelte del consumatore di beni e servizi.

Limitiamo lo studio a soli due beni A e B le cui quantità, indicate con x_1 e x_2 , formano il cosiddetto paniere di consumo.

Per procurarsi i due beni, il consumatore ha a disposizione una somma B di denaro, detta nella teoria economica, bilancio. Se p_1 e p_2 sono i prezzi dei due beni, il vincolo del bilancio è espresso

$$p_1x_1 + p_2x_2 = B$$

Tra i vari panieri che soddisfano il vincolo del bilancio, il consumatore sceglie quello di utilità massima. La funzione utilità associa a ogni paniere un valore numerico.

Nella teoria economica si usano varie funzioni utilità, con la condizione che siano differenziabili e tali che

$$\frac{\partial U}{\partial x_1} > 0$$

Il problema consiste nel trovare il massimo della funzione

$$U = U(x_1, x_2)$$

con il vincolo di bilancio

$$p_1x_1 + p_2x_2 = B$$

Utilizzando il metodo dei moltiplicatori di Lagrange, la funzione lagrangiana è data da

$$Z(x_1, x_2, \lambda) = U(x_1, x_2) + \lambda(B - p_1x_1 - p_2x_2)$$

Calcolando le derivate parziali e ponendole uguali a zero
(16, 11, 6).

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial x_1} - \lambda p_1 = 0 \\ \frac{\partial U}{\partial x_2} - \lambda p_2 = 0 \\ p_1x_1 + p_2x_2 = B \end{cases}$$

Dalle prime due equazioni si ricava

$$\frac{\frac{\partial U}{\partial x_1}}{p_1} = \frac{\frac{\partial U}{\partial x_2}}{p_2} = \lambda$$

Si ottiene quindi che

Per massimizzare l'utilità, il consumatore deve distribuire il suo bilancio in modo che sia uguale, per ogni bene, il rapporto tra l'utilità marginale e il prezzo p del bene.

In Economia si preferisce usare il metodo di Lagrange per determinare il valore di λ , che misura, la “sensibilità” della soluzione.

Esempio 1

Determinare il massimo della funzione di utilità

$$U = (x_1 + 2)(x_2 + 1)$$

dove x_1 e x_2 sono le quantità dei due beni i cui costi sono $p_1 = 2$ e $p_2 = 3$ (in unità convenzionali) se si ha a disposizione $B = 65$. Quindi il vincolo di bilancio diventa $2x_1 + 3x_2 = 65$.

Si scrive la funzione lagrangiana.

Si ricavano le derivate parziali.

Si calcola l'hessiano orlato e si trova il massimo della funzione.

Il valore di λ nel punto di massimo viene anche interpretato come utilità marginale della moneta quando si da massimizzare l'utilità del consumatore.

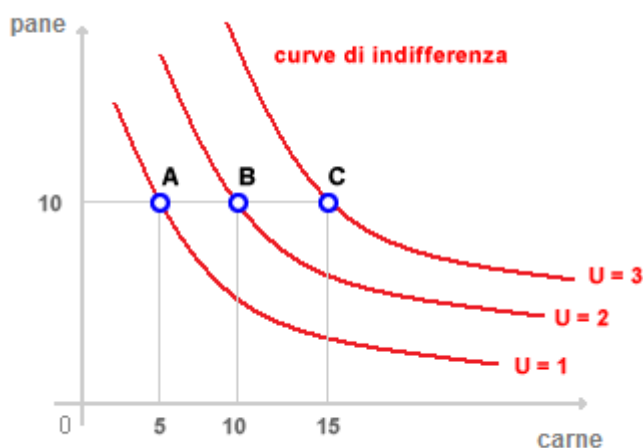
Nello studio della funzione utilità $U = U(x_1, x_2)$ si trova in economia un'efficace visualizzazione della funzione mediante le linee di livello.

Infatti le curve di equazione

$$U(x_1, x_2) = \text{costante}$$

sono dette in economia **curve di indifferenza** perché ognuna di esse è la rappresentazione di tutte le combinazioni (x_1, x_2) delle quantità acquistate dei due beni che lasciano invariata l'utilità e che, quindi, rappresentano consumi indifferenti.

Nella teoria economica si ricava che le curve di indifferenza hanno la concavità rivolta verso l'alto, con andamento decrescente, tali che per ogni punto ne passa una e una sola e che al crescere di U si allontanano dall'origine (vedi figura).



Un'altra importante proprietà delle curve di indifferenza si ricava differenziando la funzione $U = U(x_1, x_2)$ che abbiamo supposto continua e differenziabile

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial U}{\partial x_2} dx_2$$

Su una curva di indifferenza si ha $dU = 0$.

Dalla relazione

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial U}{\partial x_2} dx_2$$

$$\text{se } \frac{\partial U}{\partial x_2} \neq 0$$

si ricava

$$\frac{dx_2}{dx_1} = - \frac{\frac{\partial U}{\partial x_1}}{\frac{\partial U}{\partial x_2}}$$

Ne segue che la tangente in un punto P a una curva di indifferenza ha per pendenza il rapporto tra le utilità marginali cambiato di segno.

Questo rapporto, in economia, viene detto **tasso marginale di sostituzione dei due beni** e rappresenta la quantità infinitesima del secondo bene che il consumatore è disposto a cedere per acquistare una quantità del primo bene, e viceversa, mantenendo costante l'utilità.

D'altra parte, nella ricerca dei massimi e dei minimi vincolati con le linee di livello, si deve determinare la linea di livello tangente alla retta del vincolo.

Se l'equazione del bilancio $p_1 x_1 + p_2 x_2 = B$, la scriviamo nella forma:

$$x_2 = -\frac{p_1}{p_2} x_1 + \frac{B}{p_2}$$

si deduce che la condizione necessaria per il massimo vincolato è data da

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{\frac{\partial U}{\partial x_1}}{\frac{\partial U}{\partial x_2}}$$

$$\frac{\frac{\partial U}{\partial x_2}}{p_2} = \frac{\frac{\partial U}{\partial x_1}}{p_1}$$

e si ritrova la relazione che avevamo ricavato con il metodo dei moltiplicatori di Lagrange.

Esempio 2

Risolvere geometricamente, mediante le curve di indifferenza, il problema del precedente esempio 1.

4. Combinazione ottima dei fattori di produzione

Esaminiamo in questo paragrafo due problemi tipici che un'impresa deve risolvere per determinare la **combinazione ottima dei fattori di produzione**.

Tra i fattori di produzione si considerano in modo specifico il capitale impiegato K e la quantità di lavoro L utilizzata.

Gli economisti hanno trovato numerose funzioni per esprimere il legame tra K , L e Q (quantità di bene prodotto).

La funzione di produzione è data dal massimo prodotto che si può ottenere dalle diverse combinazioni di capitale e lavoro:

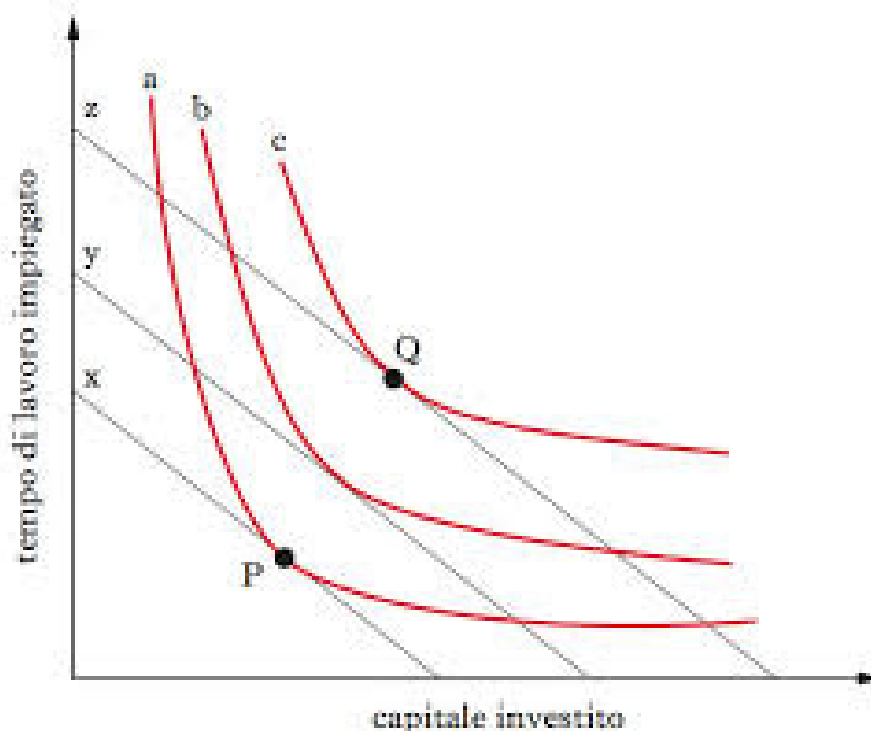
$$Q = f(K, L)$$

Queste funzioni, che rappresentano dei modelli teorici, devono essere continue con le loro derivate prime e seconde e si richiede che per la natura economica dei dati, che il prodotto marginale del capitale e quello del lavoro siano positivi e decrescenti.

Si ottiene quindi:

$$\frac{\partial Q}{\partial K} > 0 \quad \frac{\partial Q}{\partial L} > 0 \quad \frac{\partial^2 Q}{\partial K^2} < 0 \quad \frac{\partial^2 Q}{\partial L^2} < 0$$

Le linee di livello di queste funzioni sono chiamati *isoquanti* perché ognuna di esse rappresenta tutte le combinazioni (L, K) di lavoro e capitale che lasciano invariata Q .



Per le ipotesi fatte, le curve isoquanti sono nel I quadrante, decrescenti, concave verso l'alto e tali che al crescere di Q si allontanano dall'origine.

In economia si usa la pendenza della retta tangente in un punto P a un isoquante, detto **tasso tecnico marginale di sostituzione**, il cui valore si ricava differenziando la funzione di produzione:

$$dQ = \frac{\partial Q}{\partial K} dK + \frac{\partial Q}{\partial L} dL$$

Lungo un isoquanto si ha $dQ = 0$ e quindi si ricava

$$\frac{dL}{dK} = - \frac{\frac{\partial Q}{\partial L}}{\frac{\partial Q}{\partial K}}$$

Di uso frequente in economia è la **funzione di Cobb-Douglas** espressa da:

$$Q = A K^{\alpha} \cdot L^{\beta}$$

con $0 < \alpha < 1$ e $0 < \beta < 1$ e A è una costante positiva dipendente dal livello tecnologico dell'azienda.

Se $\alpha + \beta = 1$ si ha la funzione di produzione di Cobb-Douglas in senso stretto; negli altri casi si ha la funzione di produzione di Cobb-Douglas generalizzata.

I problemi che si possono presentare sono due:

- **minimizzare il costo totale dei fattori di produzione (input) per produrre una quantità prefissata di un bene (output)**

oppure

-**massimizzare la produzione a un livello di costi prefissato.**

Primo problema- **Minimo costo di produzione con il vincolo della produzione prefissata Q**

Si vuole minimizzare la funzione del costo

Secondo problema- **Massima la produzione a un livello di costi prefissato.**

Libri di testo consultati

- Annamaria Gambotto Manzone, Bruna Consolini,
Nuovo matematica con applicazioni informatiche, vol. 1, vol. 2, vol. 3
Per gli Istituti Tecnici Settore Economico
Tramontana RCS, Milano

-Bergamini, Trifone, Barozzi, Matematica.Rosso, vol.3, vol.4, vol.5
Zanichelli Bologna

-Manfredi Toscano,
Math.rosso. vol.1, vol. 2, vol.3
Ghisetti & Corvi, Milano.