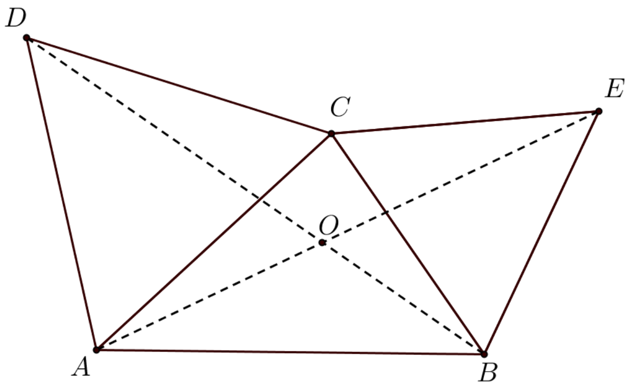
FLAT*landia*

"Abbi pazienza, ché il mondo è vasto e largo" *(Edwin A. Abbott)*

Flatlandia 11 – 25 Maggio 2015 - Commento alle soluzioni ricevute

Il testo del problema

È dato un triangolo *ABC*. Costruire, esternamente a tale triangolo, i triangoli equilateri *ACD*, *BCE* (vedi figura).



1) Dimostrare che $\overline{AE} = \overline{BD}$.
2) Detto *O* il punto di intersezione di *AE* e *BD*, dimostrare che i quadrilateri *AOCD* e *BOCE* sono ciclici.
3) Quale ampiezza massima può avere l'angolo *ACB* affinché il punto *O* sia interno al triangolo *ABC*?

Giustificare tutte le risposte.

Nota. Ricordiamo che un quadrilatero (convesso) si dice *ciclico* se tutti i suoi vertici appartengono a una stessa circonferenza.

Commento

Abbiamo ricevuto tre risposte, tutte da classi seconde di Licei Scientifici.

Il problema poneva tre quesiti tutti relativi a una stessa figura costituita da un triangolo su due lati del quale erano costruiti esternamente due triangoli equilateri, i cui vertici liberi venivano poi congiunti con gli estremi opposti del terzo lato del triangolo iniziale. Si chiedeva di dimostrare tre diverse proprietà geometriche, e precisamente:
1) che i due segmenti costruiti come descritto erano congruenti;
2) che i due quadrilateri aventi come vertici i vertici di uno dei due triangoli equilateri costruiti e il punto di intersezione dei segmenti predetti erano ciclici;
3) determinare l'ampiezza massima dell'angolo avente come vertice il vertice comune ai due lati su cui erano stati costruiti i due triangoli equilateri, affinché la predetta costruzione fosse possibile.

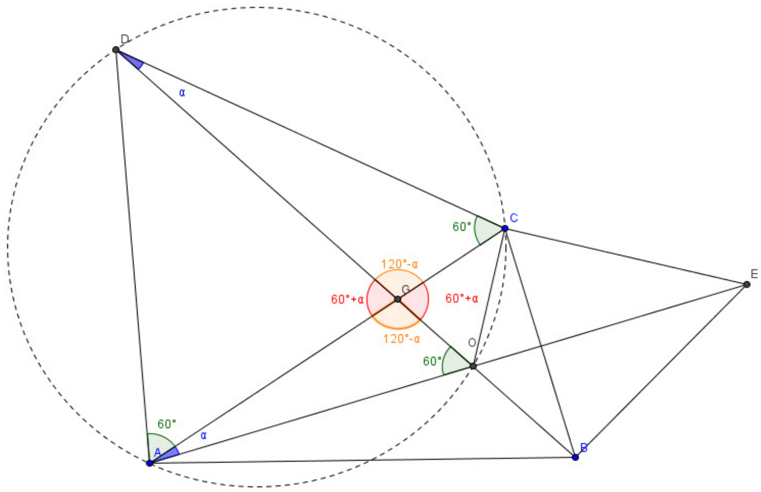
In una sola delle risposte pervenute il problema viene risolto in tutte le sue parti in modo sufficientemente corretto. In una seconda risposta mancano spesso le motivazioni per certe proprietà geometriche usate. Infine nella terza risposta la costante confusione tra un ente geometrico e la sua misura arriva al punto di stabilire la congruenza tra un angolo e la sua ampiezza.

Sono pervenute risposte dalle seguenti scuole:
LS "A. Volta", Colle di Val d'Elsa (SI)
LS "Aristosseno", Taranto (TA)
LS "U. Dini", Pisa (PI)

NOTA. Nelle soluzioni riportate, le correzioni, le aggiunte o i commenti sono scritti fra parentesi quadre. Con doppia parentesi quadra vengono indicate le parti omesse.

Soluzioni

Edoardo Caciorgna, Classe 2C
Liceo Scientifico "A.Volta",Colle di Val d'Elsa (SI)



1)
Considero i triangoli BCD e ACE; essi hanno:

- ○ $DC \cong CA$, per ipotesi e per definizione di triangolo equilatero;
- ○ $CE \cong CB$, per ipotesi e per definizione di triangolo equilatero;
- ○ $\angle DCB \cong \angle ACE$, perché entrambi congruenti a [[$\angle ACB + (1/3)P$]] [non si può mescolare un angolo con la sua ampiezza: si tratta di una somma priva di significato]

[[…]]
Quindi, per il primo criterio di congruenza dei triangoli, $BCD \cong ACE$.
In particolare, $AE \cong BD$, poiché lati corrispondenti in triangoli congruenti.

2)
Considero il triangolo DGC dove G è il punto di intersezione fra BD e AC:

- ○ $\angle GCD \cong (1/3)P$, poiché ACD è equilatero;
- ○ $\angle GDC \cong \angle EAC$ (che chiamo α , per semplicità) [per la precedente dimostrazione];
- • $\angle CGD \cong P - \angle ACD - \angle GDC \cong P - (1/3)P - \alpha = (2/3)P - \alpha$, poiché la somma degli angoli interni di un triangolo è un angolo piatto;

Inoltre si ha che:

- ○ $\angle CGD \cong \angle AGO$, perché opposti al vertice, quindi anche $\angle AGO \cong (2/3)P - \alpha$.
- ○ $\angle AOG \cong P - \angle AGO - \angle EAC \cong P - [(2/3)P - \alpha] - \alpha \cong P - (2/3)P + \alpha - \alpha \cong 1/3P$

Quindi $\angle AOD = \angle AOG \cong (1/3)P \cong \angle ACD$

Inoltre notiamo che:

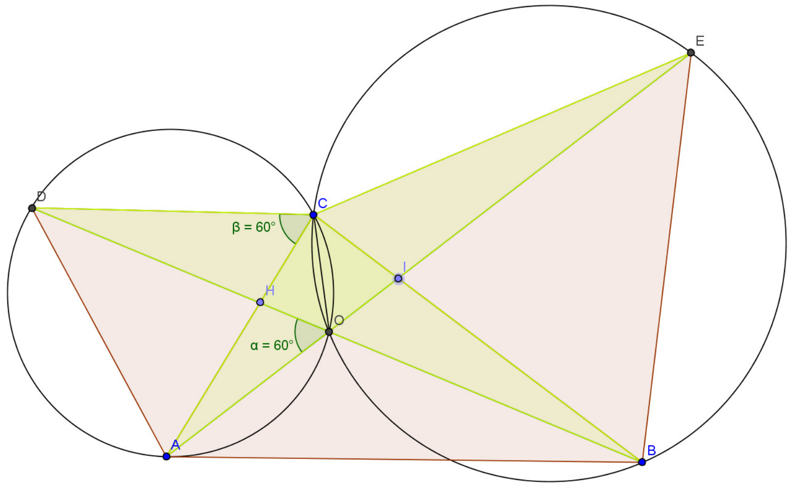
- • $\angle BOE \cong \angle AOG \cong (1/3)P$, perché opposti al vertice
- • $\angle BCE \cong (1/3)P$, perché BCE è un triangolo equilatero,
- • quindi $\angle BCE \cong \angle BOE \cong (1/3)P$, per la proprietà transitiva della congruenza.

Consideriamo ora il quadrilatero AOCD.
Osserviamo che sia il punto O che il punto C "vedono" il segmento AD sotto un angolo congruente ad 1/3P (per quanto prima dimostrato [[…]]).
Si può concludere quindi che il punto O appartiene alla circonferenza passante per A,C e D
[[…]]
[Rimane sempre, pur in presenza di un ragionamento accettabile, la confusione con cui si

confrontano un angolo e la sua ampiezza

3)
[[…]]

Classe 2B
Liceo Scientifico "Aristosseno", Taranto (TA)

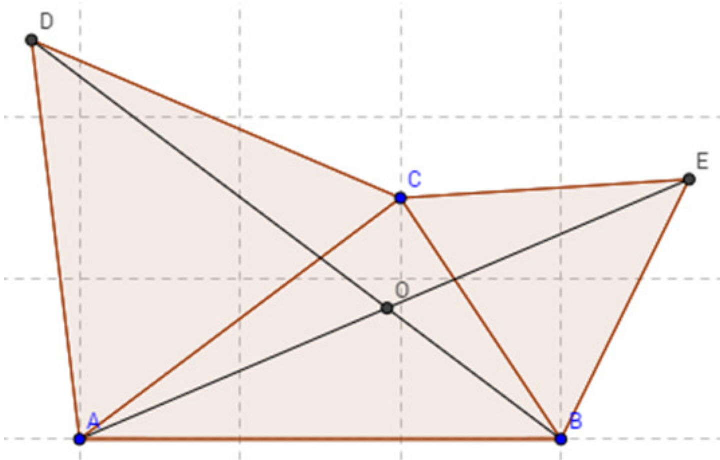


1)
I triangoli DCB e ACE sono congruenti per il I criterio di congruenza. Infatti: CD ≅ AC per costruzione, CE ≅ CB per costruzione e gli angoli $D\hat{C}B$ e $A\hat{C}E$ sono congruenti perché somme dell'angolo $A\hat{C}B$ con i due angoli $D\hat{C}A$ ed $E\hat{C}B$, che hanno la stessa ampiezza di 60°:
$D\hat{C}B = D\hat{C}A + A\hat{C}B = E\hat{C}B + A\hat{C}B = A\hat{C}E$. Dalla congruenza dei triangoli segue che AE = BD
[$\overline{AE} = \overline{BD}$].

2)
Dalla congruenza dei triangoli DCB e ACE segue che gli angoli $C\hat{D}B$ e $C\hat{A}E$ sono congruenti e nel triangolo DOA, poiché la somma [delle ampiezze] degli angoli interni è pari a [all'ampiezza di] un angolo piatto, si ha: $D\hat{O}A = 180° - (O\hat{D}A + O\hat{A}D) = 180° - (60° - C\hat{D}O + 60° + C\hat{A}O) = 60°$ [i simboli riguardano le ampiezze degli angoli]. Detto H il punto d'intersezione di AC con DO, consideriamo i triangoli DHC e AHO; questi triangoli sono simili poiché hanno due angoli congruenti (I criterio di similitudine) e perciò avranno i lati omologhi proporzionali:
DH : AH = CH : HO. Da questa proporzione e dalla congruenza degli angoli $A\hat{H}D$ e $C\hat{H}O$ (opposti al vertice), si deduce che i triangoli DHA e CHO sono anch'essi simili (II criterio di similitudine). Da questo si deduce che $D\hat{A}H = C\hat{O}H = 60°$ e quindi il quadrilatero AOCD è ciclico, avendo i due angoli opposti di vertici O e D supplementari (($C\hat{O}A = C\hat{O}H + A\hat{O}H = 60° + 60° = 120°$ e $A\hat{D}C = 60°$ per costruzione)) e sapendo che la somma degli angoli interni di un quadrilatero è pari a 360°.
Analoghe considerazioni si possono fare per arrivare alla conclusione che anche il quadrilatero BOCE è ciclico.

3)
Osservato che le due circonferenze che circoscrivono i quadrilateri suddetti sono secanti ed hanno il segmento OC come corda comune, gli angoli $A\hat{O}C$ e $B\hat{O}C$ hanno entrambi ampiezza 120° e questa ampiezza resta costante al variare della posizione del punto O sull'arco AC (CB). L'ampiezza massima di ciascuno degli angoli $A\hat{C}O$ e $B\hat{C}O$ è 60°, che si ha quando il punto O coincide con il vertice C dei quadrilateri. Pertanto la massima ampiezza dell'angolo $A\hat{C}B$ è 120°.

Simmaco Di Lillo, Classe 2G
Liceo Scientifico "U. Dini", Pisa (PI)



1)
I triangoli DCB e ACE sono congruenti; 2 lati congruenti ($\overline{DC} = \overline{CA}; \overline{CB} = \overline{CE}$ perché triangoli equilateri) e l'angolo compreso uguale (∠DCB=∠ACE perché gli angoli interni di un triangolo equilatero misurano 60° [e poi? …]) ne segue che $\overline{DB} = \overline{AE}$

2)
AOCD è ciclico se e solo se l' angolo tra un lato e una diagonale è uguale all'angolo tra il lato opposto e l'altra diagonale ovvero se ∠AOD = ∠DCA [perché?].

I triangoli DCB e ACE sono congruenti [perché?] quindi ∠CAO = ∠CDO; ∠ODA= 60° - ∠CDO = 60° - ∠CAO

$\angle ODA + \angle DAO + \angle AOD = 180°$ (somma angoli interni di un triangolo)

$60°$ - $\angle CDO + 60° + \angle CDO + \angle AOD = 180°$; $\angle AOD = 60°$.

$\angle AOD = \angle DCA = 60°$. Q.E.D

COBE è ciclico se e solo se l' angolo tra un lato e una diagonale è uguale all'angolo tra il lato opposto e l'altra diagonale ovvero se $\angle BOE = \angle BCE$ [perché?].

I triangoli DCB e ACE sono congruenti quindi $\angle CEO = \angle OBC$; $\angle OEB = 60° - \angle CEO = 60° - \angle OBC$

$\angle OEB + \angle EBO + \angle BOE = 180°$ (somma angoli interni di un triangolo)

$60°$ - $\angle OBC + 60° + \angle OBC + \angle BOE = 180°$; $\angle BOE = 60°$.

$\angle BOE = \angle BCE = 60°$. Q.E.D

3)
[[…]]