FLAT*landia*

Rubrica mensile di problemi di geometria per studenti della Scuola secondaria

Flatlandia – Problema di maggio 2023 - Commento alle soluzioni ricevute

Il testo del problema

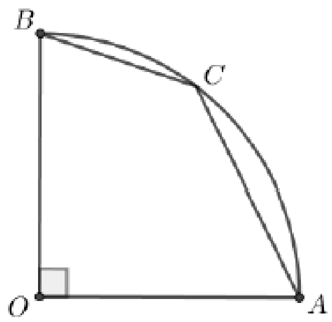
Flatlandia - Problema 8 - 29 maggio 2023

In un quadrante di circonferenza di centro O (vedi figura) considerare un punto C (diverso da A e da B) sull'arco $\widehat{AB}$.

a) Determinare l'ampiezza dell'angolo $A\widehat{C}B$.

b) Supposto che le corde AC e CB misurino rispettivamente $\sqrt{2}$ e 1, determinare l'area del quadrilatero $OACB$.

Motivare le risposte (da dare possibilmente senza usare la trigonometria).



Commento

Il problema proposto riguardava un quadrante di cerchio, in cui si doveva determinare l'angolo alla circonferenza formato da un punto generico dell'arco. Successivamente si chiedeva di determinare l'area del quadrilatero formato da un particolare punto dell'arco.

Le tre soluzioni arrivate sono complessivamente corrette e ben motivate, anche se alcuni passaggi avrebbero dovuto essere meglio approfonditi.

Abbiamo ricevuto solo due risposte da studenti delle seguenti scuole (in ordine di arrivo):
- Liceo Scientifico "Calini", Brescia
- Liceo Scientifico "G. Bruno", Mestre-Venezia
- Liceo Scientifico "Euclide", Cagliari.

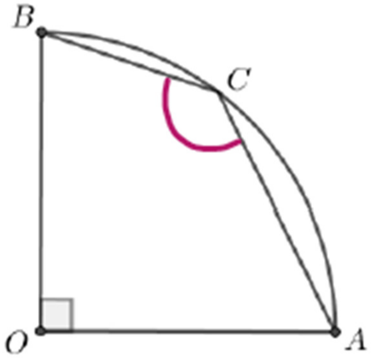
Nota. *Nelle soluzioni riportate, le correzioni, le aggiunte o i commenti sono scritti fra parentesi quadre. Con doppia parentesi quadra vengono indicate le parti omesse.*

Soluzioni arrivate

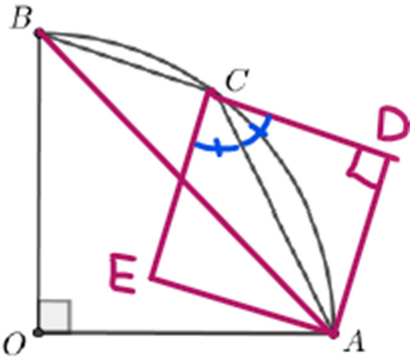
1) Soluzione inviata da Davide Averoldi, classe 4a Liceo Scientifico Calini Brescia

Davide Averoldi, classe 4^N Liceo Scientifico Calini Brescia

a) Essendo $A\hat{C}B$ angolo alla circonferenza, esso è la metà dell'esplementare dell'angolo al centro $A\hat{O}B$, ovvero (360°-90°) / 2 = 135°



b) La misura di AC è quella della diagonale di un quadrato di lato 1, di cui traccio due lati e chiamo D, E i vertici trovati.



Poiché AC è diagonale del quadrato, è bisettrice dell'angolo $E\hat{C}D$ e risulta quindi che l'angolo $A\hat{C}D$ misura 45°. Dal momento che $B\hat{C}A + A\hat{C}D = 135° + 45° = 180°$, i punti B, C, D sono allineati. Considero ABD, che è quindi un triangolo rettangolo i cui cateti misurano 2 e 1, ricavo quindi l'ipotenusa applicando il Teorema di Pitagora:

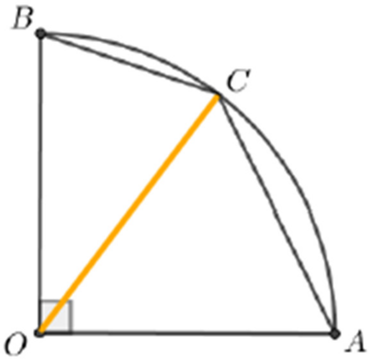
$$\sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{1 + 4} = \sqrt{5}$$

che è quindi la misura di AB.

Sulla base di ciò e sapendo che $A\hat{O}B$ è retto, il raggio della circonferenza (= AO = BO = CO) misura:

$$\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{5}\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{10}}{2}$$

Il quadrilatero OACB può ora quindi essere suddiviso in due triangoli [(BOC e COA)] di cui sono note le misure di tutti i lati:



Posso quindi calcolare separatamente le due aree utilizzando la Formula di Erone, per ottenere infine l'area totale sommandole:

$$p=\frac{\left(1+\frac{\sqrt{10}}{2}+\frac{\sqrt{10}}{2}\right)}{2}=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{10}}{2}$$

$$A_{BOC}=\sqrt{p(p-1)\left(p-\frac{\sqrt{10}}{2}\right)\left(p-\frac{\sqrt{10}}{2}\right)}=\sqrt{\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{10}}{2}\right)\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{10}}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{10}}{2}-\frac{\sqrt{10}}{2}\right)\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{10}}{2}-\frac{\sqrt{10}}{2}\right)}=\sqrt{\frac{1}{16}(\sqrt{10}+1)(\sqrt{10}-1)}=\sqrt{\frac{9}{16}}=\frac{3}{4}$$

$$p=\frac{\left(\sqrt{2}+\frac{\sqrt{10}}{2}+\frac{\sqrt{10}}{2}\right)}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{10}}{2}$$

$$A_{COA}=\sqrt{p(p-\sqrt{2})\left(p-\frac{\sqrt{10}}{2}\right)\left(p-\frac{\sqrt{10}}{2}\right)}=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{10}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{10}}{2}-\sqrt{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{10}}{2}-\frac{\sqrt{10}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{10}}{2}-\frac{\sqrt{10}}{2}\right)}=\sqrt{\frac{1}{8}(\sqrt{10}+\sqrt{2})(\sqrt{10}-\sqrt{2})}=\sqrt{\frac{8}{8}}=1$$

$$A_{OACB}=A_{BOC}+A_{COA}=\frac{3}{4}+1=\frac{7}{4}$$

2) Soluzione inviata da Edoardo Bolgan, classe 2^H, Liceo scientifico "G. Bruno", Mestre - Venezia

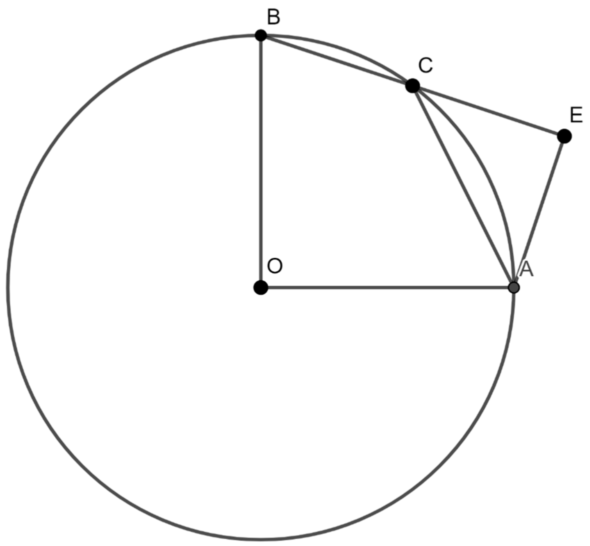
Ipotesi: AC = $\sqrt{2}$
BC = 1
Angolo AOB = 90°
Tesi: a) angolo ACB = ?
b) Aabco = ?

[manca la figura]

a) BCA è un angolo alla circonferenza e il suo corrispondente angolo al centro BOA è esplementare dell'angolo retto AOB, perciò;
BOA = 270° e per il teorema sugli angoli alla circonferenza e il corrispondente angolo al centro risulta che l'angolo
ACB = $\frac{1}{2}$ BOA = 135°
b) Considero AB diagonale del quadrilatero OACB, questa divide il quadrilatero nei due triangoli ABC e OAB.
- Considero il triangolo ABC:
traccio l'altezza BH relativa al lato AC.
L'angolo BCH = 45° perché supplementare dell'angolo ACB.
L'angolo BHC = 90° per costruzione
L'angolo CBH = 45° per differenza (di somma totale degli angoli interi di un triangolo)
Quindi: BHC è triangolo isoscele e rettangolo, è la metà di un quadrato e BC è diagonale.
Per la formula: diagonale = lato * $\sqrt{2}$ otteniamo dalla formula inversa: BH = CH = $\frac{BC}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$
Aabc = $\frac{AC*BH}{2} = \frac{1}{2}$
AH = AC + CH = $\frac{3*\sqrt{2}}{2}$
AB = $\sqrt{BH*BH+HA*HA}$ = $\sqrt{5}$

- Considero il triangolo AOB:
è sia triangolo isoscele (OA = OB perché raggi della stessa circonferenza) che triangolo rettangolo.
OB = OA = $\frac{AB}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{10}}{2}$
Aaob = $\frac{OA*OB}{2} = \frac{5}{4}$
Aaobc = Aaob + Aacb = $\frac{7}{4}$
[I vertici di un triangolo di solito si scrivono in maiuscolo!]

3) Soluzione inviata da classe Lorenzo Onnis, Sebastiano Murgia e Luca Sanna, 2^ B del Liceo Scientifico Euclide di Cagliari.



Ipotesi

AOB è un quadrante di circonferenza di centro O
C appartiene all'arco AB
AC=$\sqrt{2}$
BC=1

Tesi

1) Determinare l'ampiezza dell'angolo $A\hat{C}B$
2) Determinare l'area del quadrilatero OABC

Dimostrazione

1) Notiamo che l'angolo $A\hat{C}B$ è metà dell'angolo concavo $A\hat{O}B$, in quanto quest'ultimo è un angolo al centro che insiste sul maggiore degli archi AB, mentre il primo è un angolo alla circonferenza che insiste sullo stesso arco, e il vertice dell'angolo alla circonferenza non è all'interno dell'angolo $A\hat{O}B$. Essendo l'angolo concavo $A\check{O}B$ esplementare di un angolo retto, esso sarà di 270°, e quindi $A\hat{C}B$ sarà la metà, ossia 135°.

2) Prolunghiamo il segmento BC come in figura, e proiettiamo A su esso, trovando un punto E.
Notiamo che l'angolo $A\hat{C}E$ è di 45° perché adiacente all'angolo $A\hat{C}B$ che sappiamo essere di 135° (vedi punto 1). Il triangolo ACE è quindi sia rettangolo che isoscele, e possiamo quindi ricavare i cateti dividendo per $\sqrt{2}$ l'ipotenusa: AE=CE=$\frac{AC}{\sqrt{2}}$; AE=CE=$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$=1.
AE è inoltre altezza del triangolo ABC relativa a BC, e perciò possiamo ricavare l'area di esso:
$A_{ABC}=AE \bullet BC \bullet \frac{1}{2}=1 \bullet 1 \bullet \frac{1}{2}=\frac{1}{2}$.
Possiamo inoltre ricavare AB, essendo ipotenusa del triangolo ABE: AB=$\sqrt{AE^2+BE^2}$=
=$\sqrt{1+2^2}$=$\sqrt{5}$.

Infine, sempre applicando il teorema di Pitagora possiamo ricavare il raggio, dato che AB è ipotenusa in un triangolo rettangolo isoscele avente per cateti due raggi:

$AO=\sqrt{\frac{AB^2}{2}}=\sqrt{\frac{\sqrt{5}^2}{2}}=\sqrt{\frac{5}{2}}$.

Ricavando ora l'area del triangolo ABO e sommandola a quella del triangolo ABC, otteniamo l'area del quadrilatero OACB:

$A_{ABO}=\frac{AO^2}{2}=\left(\sqrt{\frac{5}{2}}\right)^2 \bullet \frac{1}{2}=\frac{5}{4}$;

$A_{OABC}= A_{ABO} + A_{ABC} =\frac{5}{4}+\frac{1}{2}=\frac{7}{4}$.