FLAT*landia*

Rubrica mensile di problemi di geometria per studenti della Scuola secondaria

Flatlandia – Problema di gennaio 2024 - Commento alle soluzioni ricevute

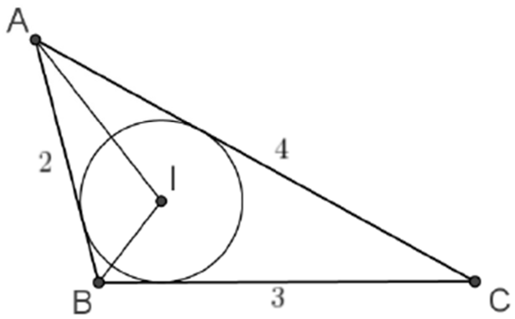
Il testo del problema

Flatlandia - Problema 8 - 29 gennaio 2024

Le lunghezze dei lati del triangolo ABC sono $AB = 2$, $BC = 3$ e $AC = 4$. Le bisettrici degli angoli in A e in B si incontrano in I (figura).

a) Trovare il rapporto tra l'area del triangolo ABI e quella del triangolo ABC.

b) Nella circonferenza circoscritta al triangolo ABC tracciare la parallela per A al lato BC e sia D l'ulteriore punto di intersezione con la circonferenza. Verificare che AD è congruente ad AC.



Commento

Il problema poneva un quesito su un triangolo, sul suo incentro e sull'area di uno dei triangoli formati da due vertici con l'incentro stesso. Nella seconda parte si richiedeva di verificare la congruenza di due segmenti ottenuti nella figura.

Sono giunte sei risposte, tutte provenienti da classi di Liceo Scientifico. Alcune di esse sono inutilmente laboriose in quanto ricorrono alla geometria analitica e alla trigonometria, mentre il ricorso alla geometria sintetica -sempre consigliato e attuabile- si prestava alle verifiche richieste in modo molto più conciso.

Nota. *Nelle soluzioni riportate, le correzioni, le aggiunte o i commenti sono scritti fra parentesi quadre. Con doppia parentesi quadra vengono indicate le parti omesse.*

Soluzioni arrivate

1) Problema svolto da: Francesco Ferraro, Alberto Giudici, 4BL, Liceo Charles Darwin, Roma

Le lunghezze dei lati del triangolo ABC sono AB = 2, BC = 3 e AC = 4. Le bisettrici degli angoli in A e in B si incontrano in I.

Calcoliamo [[poi]] l'area del triangolo ABC con la formula di Erone:

$$A(ABC) = \sqrt{p \cdot (p-a) \cdot (p-b) \cdot (p-c)} = \sqrt{4{,}5 \cdot (0{,}5) \cdot (1{,}5) \cdot (2{,}5)} = \frac{3\sqrt{15}}{4}$$

Successivamente calcoliamo il perimetro (4+3+2=9) per ricavare il raggio della circonferenza di centro I, inscritta nel triangolo, con la formula $r = \frac{2A}{2p}$:

$$r = \frac{2 \cdot 3\sqrt{15}}{4 \cdot 9} = \frac{\sqrt{15}}{6}$$

Ora, sapendo che AB è tangente alla circonferenza di centro I per ipotesi (la circonferenza è inscritta), sappiamo anche che è perpendicolare al raggio IH (con H punto di tangenza tra AB e circonferenza di centro I): ciò ci consente di considerare IH come altezza del triangolo ABI, permettendoci di calcolare facilmente l'area di questo triangolo:

$$A(ABI) = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{2 \cdot \sqrt{15}}{2 \cdot 6} = \frac{\sqrt{15}}{6}$$

Il rapporto tra le due aree è quindi:

$$\frac{A(ABI)}{A(ABC)} = \frac{\sqrt{15}}{6} \cdot \frac{4}{3\sqrt{15}} = \frac{2}{9}.$$

[I punti vanno indicati con lettere maiuscole !]

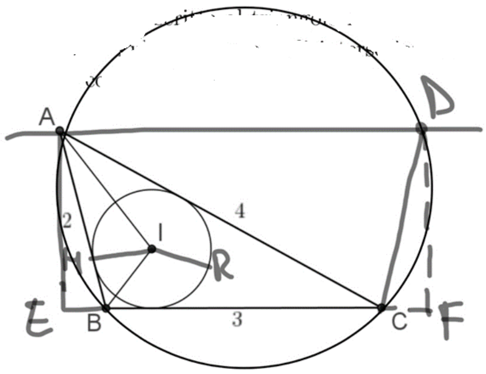
Passiamo ora alla seconda consegna.

Tracciamo adesso la circonferenza circoscritta ad ABC (abbiamo realizzato un disegno per facilitare la lettura della dimostrazione), tracciamo la corda AD tale che sia parallela a BC e chiamiamo E ed F [i punti sui] prolungamenti di BC tali che AE e DF siano perpendicolari ad AD. Abbiamo così formato un rettangolo ADFE.

Passiamo ora a calcolare AE e BE con un semplice sistema:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2^2 \\ (3+x)^2 + y^2 = 4^2 \end{cases}$$

Stiamo usando in entrambe le equazioni il teorema di Pitagora, prima applicato al triangolo AEB, poi al triangolo AEC; x rappresenta EB mentre y corrisponde ad AE [occorreva dire prima quali sono le incognite!] . Risolvendo il sistema si ricavano come soluzioni:



$$\begin{cases} EB = x = \dfrac{1}{2} \\ AE = y = \dfrac{\sqrt{15}}{2} \end{cases}$$

Ciò che a noi interessa è EB: infatti, sapendo che EB≅CF per la costruzione del rettangolo, possiamo calcolare la lunghezza di EF, uguale a:

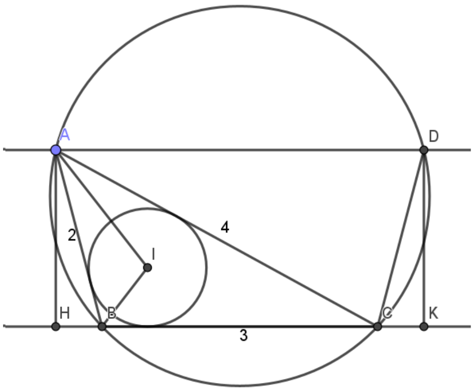
$$BC + EB + CF = 3 + 0{,}5 + 0{,}5 = 4$$

Ma noi sappiamo anche che EF≅AD poiché lati opposti di un rettangolo, perciò la dimostrazione è completata perché abbiamo verificato che AD≅AC=4.

2) Problema svolto da Fabio Paolo Isoardo, 3°A, Liceo scientifico Galileo Ferraris, Torino

[[…]] Soluzione non accettabile. L'uso della trigonometria è troppo massiccio e porta a risultati che sono approssimati.

3) Problema svolto da Davide Novelli 5G Liceo L.Ariosto, Ferrara



Punto a)

Calcoliamo l'area A_{ABC} del triangolo ABC grazie alla formula di Erone ($p = \frac{4+3+2}{2} = 4{,}5$)

$A_{ABC}=\sqrt{p(p-AB)(p-BC)(p-CA)} = \sqrt{4{,}5(4{,}5-2)(4{,}5-3)(4{,}5-4)} = \frac{3\sqrt{15}}{4}$

Il raggio r della circonferenza inscritta in ABC è pari a:

$$r = \frac{A_{ABC}}{p} = \frac{3\sqrt{15}}{4 \cdot 4{,}5} = \frac{\sqrt{15}}{6}$$

$$A_{ABI} = \frac{AB \cdot r}{2} = \frac{2\sqrt{15}}{2 \cdot 6} = \frac{\sqrt{15}}{6}$$

$$\frac{A_{ABI}}{A_{ABC}} = \frac{\sqrt{15}}{6} \cdot \frac{4}{3\sqrt{15}} = \frac{2}{9}$$

Punto b)

ABCD è un trapezio, in quanto AD//BC.

Per essere inscrivibile in una circonferenza, AB^C+AD^C≅BA^D+BC^D=180°.

Essendo un trapezio, AB^C+BA^D=180°.

Quindi AB^C+BA^D≅BA^D+BC^D, ovvero AB^C≅BC^D.

Perciò ABCD è isoscele. In particolare AB≅CD e [[BAC≅AB^C]] [ABC=DCB].

Chiamando H la proiezione di A sulla retta BC e K la proiezione di D sulla retta BC, otteniamo che HK≅AD≅HB+BC+CK.

I triangoli ABH e CKD sono congruenti, in quanto:

AB≅CD, AH≅ [DK] [[DC]] (la distanza tra due rette parallele è costante), e AHB≅CKD, in quanto retti.

Perciò HB≅CK e HK≅2HB+BC.

Per il teorema del coseno: $AC^2=AB^2+BC^2-2AB\cdot BC\cdot\cos(AB\hat{}C)= AB^2+BC^2+2AB\cdot BC\cdot\cos(AB\hat{}H)$

Da cui $\cos(AB\hat{}H)=\frac{AC^2-AB^2-BC^2}{2AB\cdot BC} = \frac{16-4-9}{2\cdot 2\cdot 3} = \frac{1}{4}$

HB=AB cos(AB^H)=$\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$

AD≅HK≅BC+2HB=$3+2\frac{1}{2}=4$

Ne consegue che AC=AD=4.

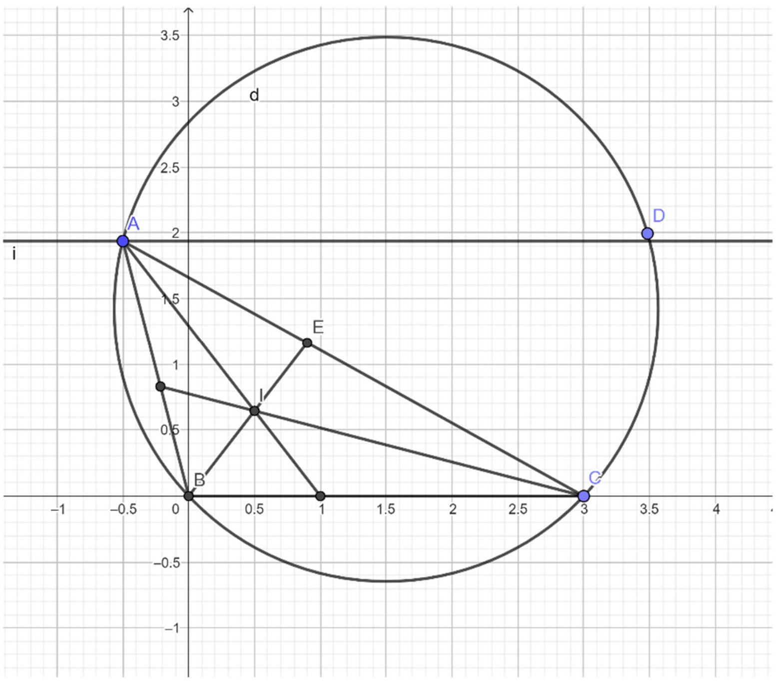
4) Problema svolto da Matteo Coppi, classe 3N, Liceo Scientifico Calini, Brescia

a) Tracciamo BI e chiamiamo E l'intersezione con AC.
A questo punto per il teorema della bisettrice abbiamo che AE:EC=2:3 quindi
AE=2/3 EC.
e di conseguenza A_{AEB}=2/3 A_{BEC} poiché i due triangoli hanno la stessa altezza [relativamente alle basi AE ed EC]].
Ne consegue che A_{AEB} = 2/5 A_{ABC}.
Adesso possiamo applicare la stessa cosa nel triangolo ABE poichè AI é la bisettrice e quindi si avrà che BI:EI=2:$\frac{8}{5}$e quindi A_{ABI}=5/9 A_{ABE} e di conseguenza

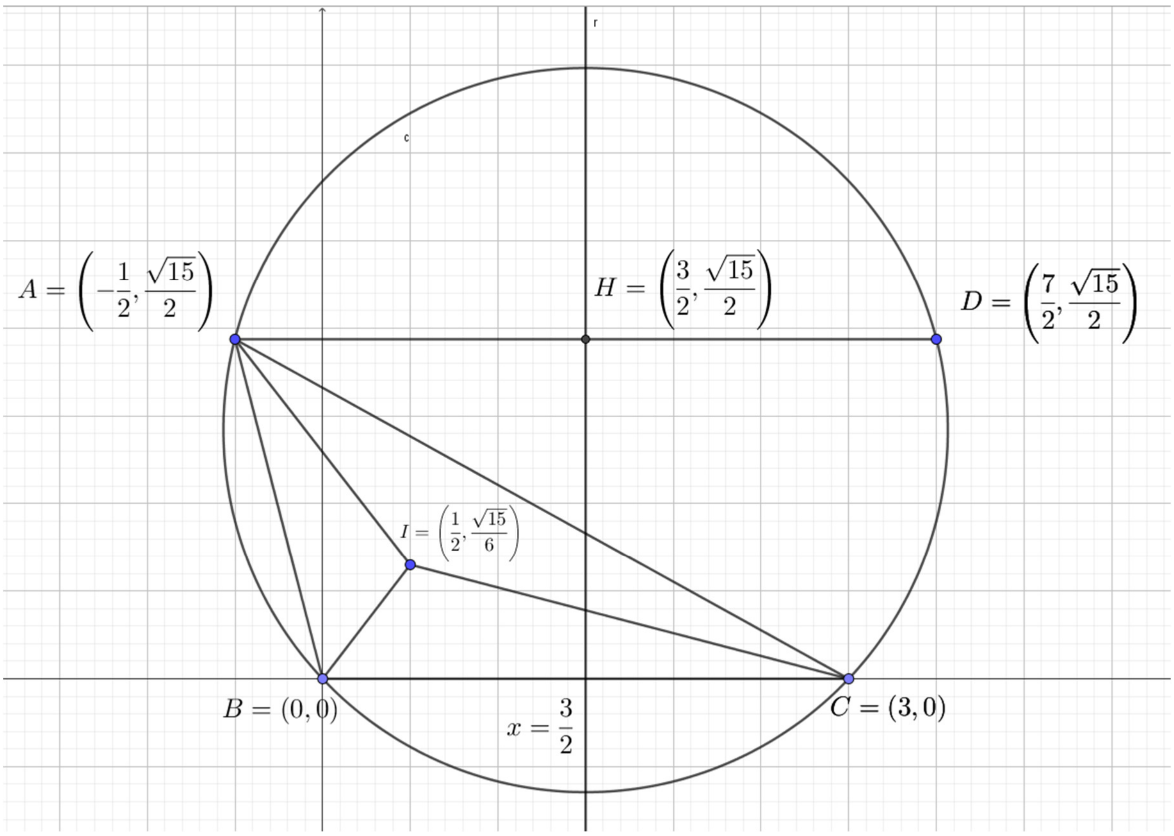
$A_{ABI}=\frac{2}{5}x\frac{5}{9}A_{ABC}$.

Allora si avrà che il rapporto delle aree è $\frac{1}{2/5x5/9}=\frac{9}{2}$

b) [[…]]
Per rispondere alla seconda domanda basta osservare che per semplici proprietà della circonferenza, la conoscenza del punto medio di AD, che e' (3/2, $\frac{\sqrt{15}}{2}$), permette di ricavare immediatamente D e quindi la lunghezza di AD



5) Problema svolto da: Problema svolto da: Dell'Orto Filomena, Parisi Mariachiara, Classe 3A Liceo Scientifico ASSTEAS Buccino (SA)



Soluzione del problema

$A \equiv (x_0; y_0)$, $B \equiv (0; 0)$ e $C \equiv (3; 0)$, $\overline{AB} = 2, \overline{BC} = 3, \overline{AC} = 4$.

Sappiamo che $2p = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{AC} = 2 + 3 + 4 = 9$. Possiamo calcolare l'area del triangolo mediante la formula di Erone:

$$S = (triangolo\ ABC) = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} =$$

$$= \sqrt{\frac{9}{2}\left(\frac{9}{2}-2\right)\left(\frac{9}{2}-3\right)\left(\frac{9}{2}-4\right)} = \sqrt{\frac{9}{2}\left(\frac{5}{2}\right)\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{3}{4}\sqrt{15}$$

Poniamo le coordinate $A \equiv (x_0; y_0)$ con $x_0 < 0\ e\ y_0 > 0$ e calcoliamo l'area del triangolo con il discriminante: $D = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_0 & y_0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}(3y_0) = \frac{3}{2}y_0$

$S = (triangolo\ ABC) = |D| = \left|\frac{3}{2}y_0\right| = \frac{3}{2}y_0$ e quindi

$\frac{3}{2}y_0 = \frac{3}{4}\sqrt{15} \ \Rightarrow y_0 = \frac{\sqrt{15}}{2}$ e A $\equiv \left(x_0; \frac{\sqrt{15}}{2}\right)$

Poniamo la distanza $d(A, B) = 2$ con B $\equiv (0; 0)$.

$$d(A, B) = \sqrt{{x_0}^2 + \frac{15}{4}} = 2$$

$${x_0}^2 + \frac{15}{4} = 4 \ \Rightarrow \ {x_0}^2 = 4 - \frac{15}{4} \ \Rightarrow \ {x_0}^2 = \frac{1}{4}$$

$x_0 = \pm\frac{1}{2}$ per la condizione prima imposta $x_0 = -\frac{1}{2}$

Abbiamo quindi A $\equiv \left(-\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{15}}{2}\right)$
Adesso calcoliamo le coordinate dell'incentro:

$$I_X = \frac{3\left(-\frac{1}{2}\right) + 4(0) + 2(3)}{9} = \frac{6 - \frac{3}{2}}{9} = \frac{\frac{9}{2}}{9} = \frac{1}{2}$$

$$I_y = \frac{3\left(\frac{\sqrt{15}}{2}\right) + 4(0) + 2(0)}{9} = \frac{\sqrt{15}}{6}$$

[La formula per trovare le coordinate dell'incentro di un triangolo, note le coordinate dei suoi vertici, non fa normalmente parte del programma di studio; sarebbe stato preferibile quindi seguire un procedimento diverso, "più geometrico".]

Quindi $I \equiv (\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{15}}{6})$

Ora troviamo l'area del $triangolo\ AIB$ tramite il determinante:

$$D_I = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{15}}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{15}}{6} & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{15}}{4} + \frac{\sqrt{15}}{12}\right) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\sqrt{15}}{3}\right) = \frac{\sqrt{15}}{6}$$

Procediamo con il rapporto tra le aree:

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{\frac{\sqrt{15}}{6}}{\frac{3}{4} \cdot \sqrt{15}} = \frac{1}{6} \cdot \frac{4}{3} = \frac{2}{9}$$

Nella circonferenza circoscritta tracciamo da A la parallela al segmento $\overline{BC}$ e D sia il punto di intersezione con la circonferenza. L'asse della corda $\overline{BC}$ è anche asse di $\overline{AD}$. L'asse di $\overline{BC}$ $ha\ equazione\ x = \frac{3}{2}$. Il punto H intersezione tra l'asse di $\overline{BC}$ e la corda $\overline{AD}$ ha coordinate $H \equiv \left(\frac{3}{2}; \frac{\sqrt{15}}{2}\right)$. Conoscendo il punto $A \equiv (-\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{15}}{2})$ e il punto $H \equiv \left(\frac{3}{2}; \frac{\sqrt{15}}{2}\right)$ possiamo conoscere il punto D tramite una simmetria centrale:

$$D_x = 2\left(\frac{3}{2}\right) - \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{6+1}{2} = \frac{7}{2}$$
$$D_y = \frac{\sqrt{15}}{2}$$

Quindi $D \equiv \left(\frac{7}{2}; \frac{\sqrt{15}}{2}\right)$

Facciamo la distanza tra A e D:

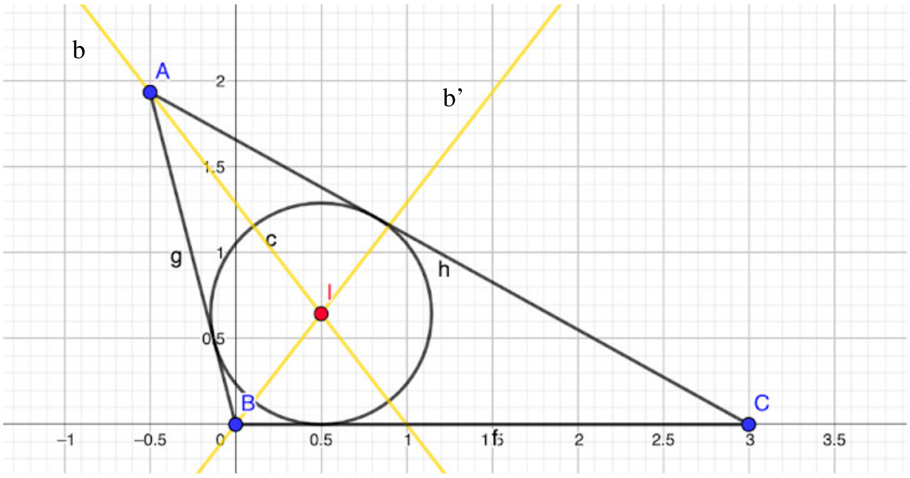
d(A;B)= $\left|\frac{7}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right)\right| = \left|\frac{8}{2}\right| = 4$

così abbiamo dimostrato che il segmento *AD* è congruente al segmento *AC*.

6)Problema svolto da: Bessone Chiara, Carretto Giulia e Ghiazza Marta, classe III P, Liceo Scientifico "Vasco Beccaria Govone", Mondovì (CN)

Risoluzione del quesito

a) Disponiamo il triangolo *ABC* su un piano cartesiano *Oxy*, con l'aiuto di geogebra, ponendo *BC* lungo l'asse delle ascisse con il punto *B* coincidente con l'origine degli assi *O* (0,0)



Sapendo quindi che *B* (0,0) e *C* (3,0) calcoliamo le coordinate del punto *A*, utilizzando la formula della distanza tra due punti:

$$\begin{cases} AB^2 = 2^2 \\ AC^2 = 4^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 = 2^2 \\ (x_A - x_C)^2 + (y_A - y_C)^2 = 4^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} {x_A}^2 + {y_A}^2 = 4 \\ {x_A}^2 + 9 - 6x_A + {y_A}^2 = 16 \end{cases}$$

Utilizziamo il metodo di riduzione per risolvere il sistema:

$$\begin{cases} {x_A}^2 + {y_A}^2 = 4 \\ {x_A}^2 + {y_A}^2 - 6x_A = 7 \end{cases}$$

$$6x_A = -3$$

$$x_A = -\frac{1}{2}$$

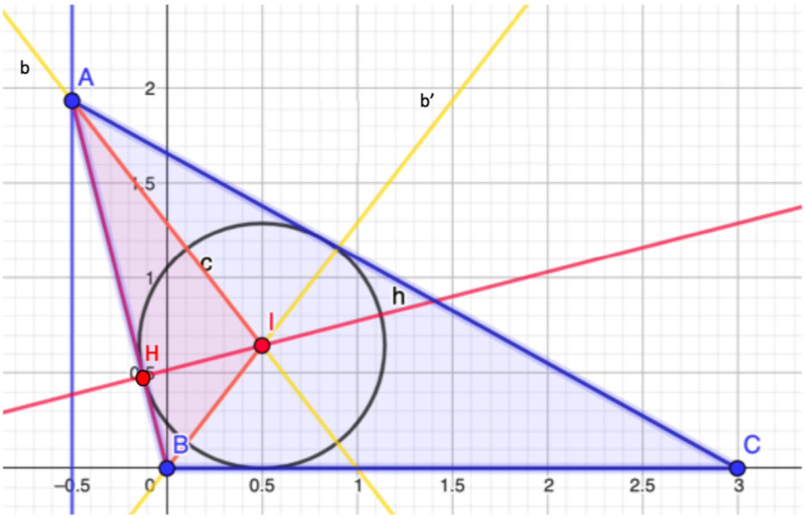
Sostituendo x_A nella prima equazione del sistema, troviamo:

$$y_A = \frac{\sqrt{15}}{2},$$

quindi $A\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{15}}{2}\right)$

[[…]] Per trovare il raggio della circonferenza inscritta non era necessario trovare le coordinate di I; bastava usare la ben nota formule r=A/p, dove A è l'area di ABC e p è il suo semiperimetro, quantità facilmente calcolabili e si ottiene r=$\frac{\sqrt{15}}{6}$, come poi trovato.

Calcoliamo ora le aree dei triangoli *ABC* e *ABI*, secondo la formula generale dell'area di un triangolo: $\mathcal{A} = \frac{b \cdot h}{2}$, con b base e h altezza relativa ad essa .



$$\begin{cases} \mathcal{A}_{ABC} = \frac{b \cdot h}{2} \\ b = BC \\ h = y_A \end{cases}$$

$$\mathcal{A}_{ABC} = \frac{3\sqrt{15}}{4}$$

$$\mathcal{A}_{ABI} = \frac{\sqrt{15}}{6}$$

Il rapporto tra le aree dei triangoli *ABI* e *ABC* risulta pertanto essere:

$$\frac{\mathcal{A}_{ABI}}{\mathcal{A}_{ABC}} = \frac{2}{9}.$$

b) Per rispondere alla seconda domanda bastava osservare che per semplici proprietà della circonferenza, la conoscenza del punto medio di AD, che è (3/2, $\frac{\sqrt{15}}{2}$), che permetteva di ricavare immediatamente D e quindi la lunghezza di AD.
[[Il resto viene omesso]].