FLATlandia

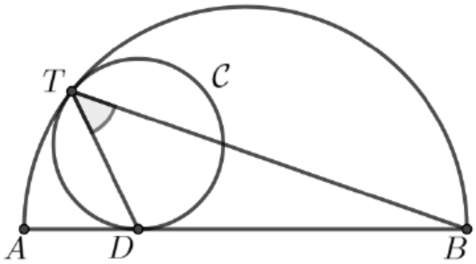
Rubrica mensile di problemi di geometria per studenti della Scuola secondaria

Flatlandia – Problema di marzo 2024 - Commento alle soluzioni ricevute

Il testo del problema

Flatlandia - Problema 4 - 25 marzo 2024

Data la semicirconferenza di diametro AB e un suo punto T, sia $\mathcal{C}$ la circonferenza tangente alla semicirconferenza in T e al diametro AB (vedi figura).
a) Descrivere la costruzione, con riga e compasso, della circonferenza $\mathcal{C}$.
b) Detto D il punto di tangenza di $\mathcal{C}$ con il diametro AB, dimostrare che l'ampiezza dell'angolo $\widehat{DTB}$ è 45°.



Commento
Il problema poneva un quesito su una circonferenza tangente internamente ad una semicirconferenza e al suo diametro. Era richiesto di determinare l'ampiezza di un particolare angolo avente il vertice nel punto di tangenza tra la circonferenza e la semicirconferenza.

Le risposte ricevute sono in sostanza corrette per quanto riguarda il punto b) (con però un errore in una delle risposte) mentre lasciano molto a desiderare nel punto a) in quanto la costruzione fatta o non è motivata o è incomprensibile.

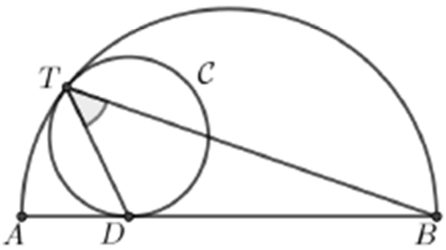
Abbiamo ricevuto quattro risposte da studenti di liceo scientifico delle seguenti scuole:
-Liceo Scientifico "Cecioni", Livorno, 2 risposte
-Liceo "B. Russell", Liceo della Scienze applicate, Cles (TN), 2 risposte.

Nota. *Nelle soluzioni riportate, le correzioni, le aggiunte o i commenti sono scritti fra parentesi quadre. Con doppia parentesi quadra vengono indicate le parti omesse.*

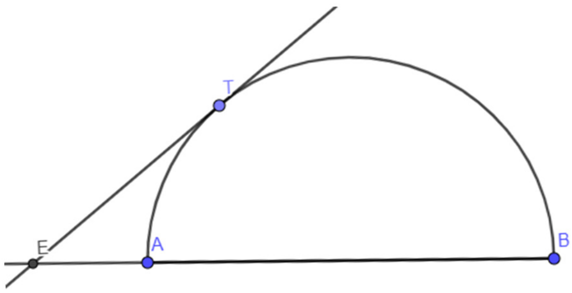
Soluzioni arrivate

1) Problema svolto da Matteo Turini ed Enea Cecconi, classe 2°A, Liceo “Cecioni”, Livorno

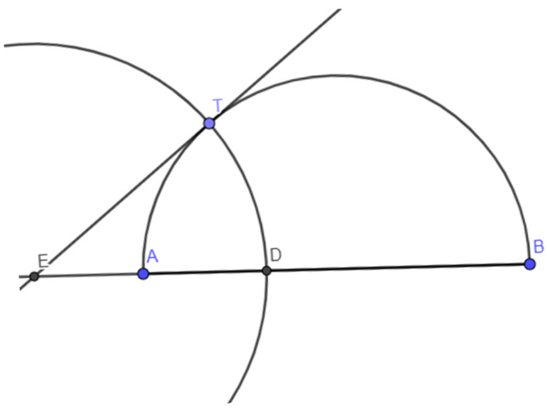
Data la semicirconferenza di diametro AB e un suo punto T, sia $\mathcal{C}$ la circonferenza tangente alla semicirconferenza in T e al diametro AB (vedi figura).
a) Descrivere la costruzione, con riga e compasso, della circonferenza $\mathcal{C}$.
b) Detto D il punto di tangenza di $\mathcal{C}$ con il diametro AB, dimostrare che l’ampiezza dell’angolo $\widehat{DTB}$ è 45°.



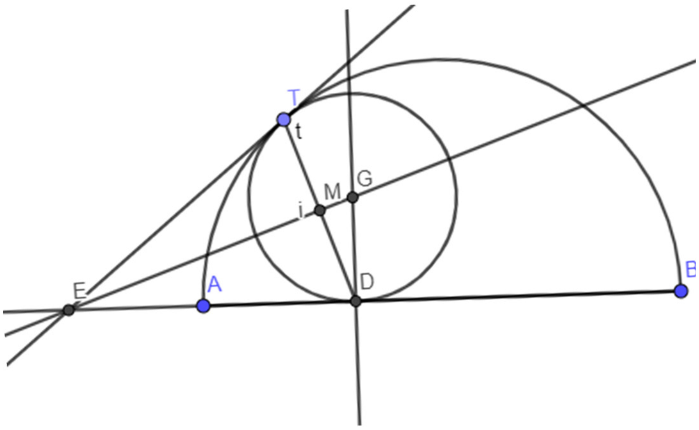
a) Passi della costruzione:
   1. Si traccia la semicirconferenza di diametro AB
   2. Si traccia la retta tangente in T alla semicirconferenza e si prolunga il diametro in modo che incontri la retta tangente



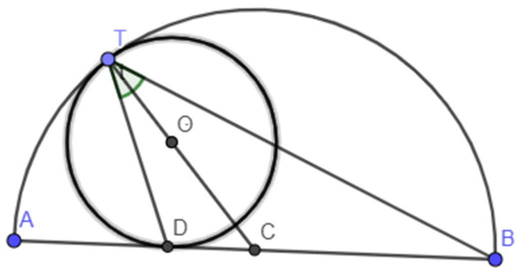
   3. Per il teorema delle tangenti condotte da punto esterno trovo il punto D di tangenza con la circonferenza piccola C: con compasso punto in E con apertura ET e trovo dove l’arco di circonferenza incontra il diametro AB



4. Si traccia il segmento TD e si determina il punto medio tra T e D e si traccia l'asse di questo segmento (passa da E perché ETD è un triangolo isoscele) e si fa una retta per D ⊥AB, l'intersezione tra le due rette sarà il centro

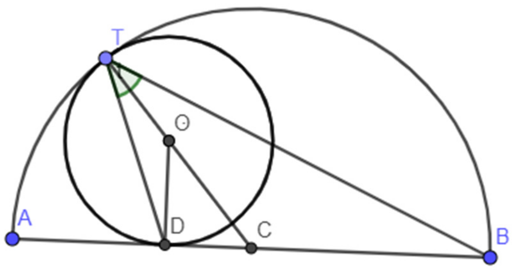


[Qualche parola di spiegazione sarebbe stata opportuna]



b) Unisco il punto T con i due centri O e C [in quanto allineati]

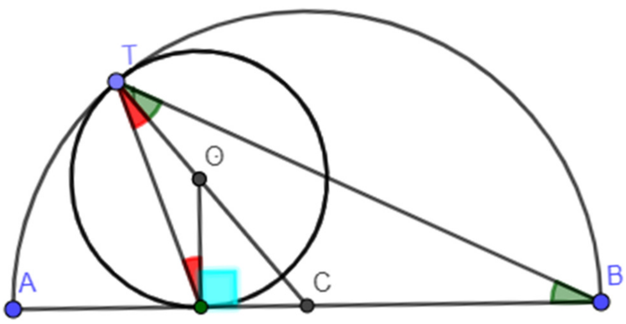
Il triangolo CTB è isoscele perché CT e CB sono raggi della semicirconferenza. Indico con α i due angoli [in T e B]. Chiamo con β l'altra parte dell'angolo $D\hat{T}B$.
Poiché OT è un raggio della circonferenza C unisco O con D che è un altro raggio e anche ODT è un triangolo isoscele



Anche $T\hat{D}O = \beta$ inoltre OD⊥AB perché il diametro AB è tangente alla circonferenza in D.
Poiché la somma degli angoli interni di un triangolo è =180° considerando il triangolo DTB ho

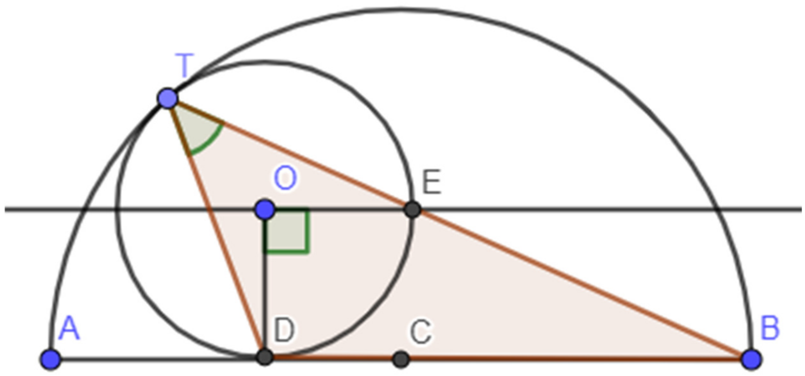
$$\alpha + \beta + \beta + 90° + \alpha = 180°$$
$$2\alpha + 2\beta = 90°$$

Quindi $\alpha + \beta = 4$



2)Soluzione parziale del problema di Flatlandia 4 – 25 marzo 2024
Alice Fantozzi, classe 2° A Liceo Cecioni, Livorno

b)
La studentessa ha tracciato la circonferenza muovendo il centro con geogebra dopo aver fatto una circonferenza approssimativa con il compasso (infatti non risulta precisa l'ampiezza dell'angolo).

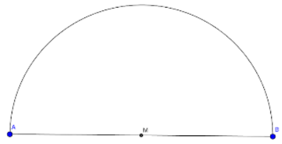


Dopo aver tracciato il raggio OD perpendicolare al diametro AB ho tracciato retta parallela ad AB e passante per O.
L'angolo $D\hat{O}E$ è retto=90° ed è un l'angolo al centro che insiste su arco DE corrispondente all'angolo alla circonferenza $D\hat{T}E$ che è quindi la metà, cioè 45° .

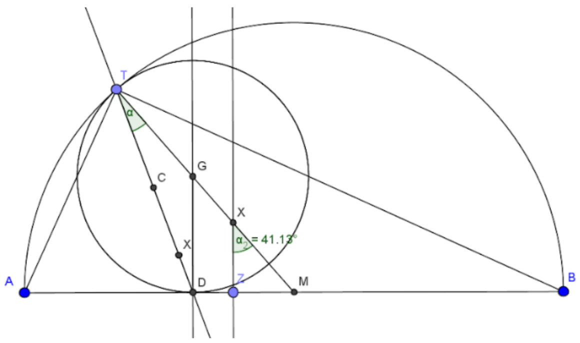
[il ragionamento funziona se però si dimostra che i tre punti T,E,B sono allineati]

3)Problema svolto da Marcus Veclani, classe 1D, Liceo Scienze Applicate Cles (TN)

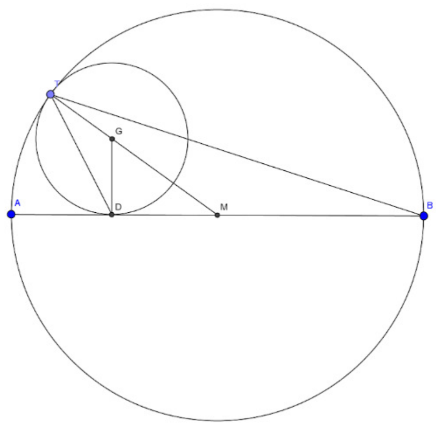
Descrizione della costruzione:



1) Per iniziare a disegnare la nostra figura, tracciamo un segmento AB su cui segneremo il punto medio M. Tracciamo poi una semicirconferenza di centro M con raggio AM.
2) Sulla semicirconferenza appena tracciata scegliamo un punto casuale T e tracciamo il segmento TB. Vogliamo inoltre che T [[sarà]] [sia] il punto di tangenza tra la semicirconferenza e la circonferenza ancora da tracciare C. Dobbiamo quindi capire dove si trova il centro della circonferenza C.
3) Dove si trova il centro di C? Possiamo affermare che il centro della circonferenza C, che chiameremo G, si trova sulla retta perpendicolare alla tangente alla circonferenza C e passante per il punto T perché la tangente di una circonferenza è sempre perpendicolare al raggio della circonferenza stessa [passante per il punto di tangenza]; ciò significa che se tracciamo la perpendicolare alla tangente alla circonferenza C nel punto di tangenza T, sapremo che C si troverà su quella retta. Possiamo inoltre dire che TG è sovrapposto a TM perché il raggio TM è anch'esso perpendicolare alla tangente in T perché essa è tangente sia alla circonferenza che alla semicirconferenza. Abbiamo quindi dimostrato che il segmento TG è sovrapposto a TM e che quindi G si trova su TM.
4) Dobbiamo ora provare a immaginare di aver costruito con successo la nostra costruzione: noteremo velocemente che TG e GD sono segmenti congruenti, essendo ambedue raggi. Possiamo quindi affermare che il triangolo TGD è isoscele su base TD. Noi però ignoriamo la posizione di D che possiamo però ricavare tracciando il segmento TD. Dobbiamo quindi capire quanto misura l'angolo GTD che chiameremo α. Proviamo a quotare allora anche altri angoli: TGD=180-2α, quindi MGD=180-(180-2α)=2α. Abbiamo quindi capito che l'angolo MGD vale due volte l'angolo GTD. È facile però trovare il valore di 2α sapendo che GD, essendo un raggio che collega il centro al punto di tangenza con il lato AB, come detto prima, misura 90°. [????]
5) Troviamo α. Possiamo quindi trovare il valore di α ignorando la posizione di D, cosa che tra l'altro vogliamo trovare. Difatti qualsiasi perpendicolare a BM sarà parallela all'ipotetico GD e che quindi l'ipotetico angolo MGD sarà corrispondente a qualsiasi angolo creato da M, l'incontro di una perpendicolare ad AB a TM e l'incontro della perpendicolare con AB.
Seguendo ciò che ho appena detto, tracciamo una perpendicolare ad AB con posizione casuale. Misuriamo poi l'angolo formatosi con M, l'incontro della perpendicolare a TM e l'incontro della perpendicolare con AB. Misurato ciò, abbiamo trovato 2α, quindi dividendo per due troveremo α, il nostro obiettivo. Per comodità possiamo ora cancellare la perpendicolare casuale da noi ora creata. [?????]

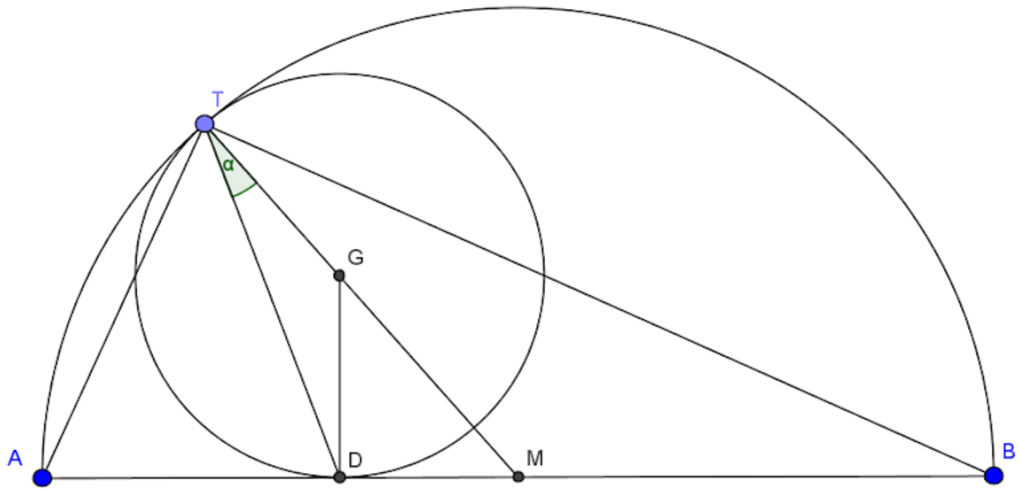


6) Troviamo D. Tracciando quindi un angolo in senso orario dal lato MT con valore noto α, troviamo nell'incrocio tra il nuovo lato creato e AB il punto D.



7) Troviamo G, il centro della circonferenza C. A questo punto tracciamo da D una perpendicolare ad AB che intersecherà TM in G. Possiamo affermare che facendo così troveremo G perché esso sarebbe il vertice di un triangolo isoscele (TGD) con i due lati congruenti ambedue perpendicolari alla tangente passante per il punto di tangenza e quindi, di fatto, raggi. Quindi G è il centro di C perché è l'estremo in comune di due raggi.
8) Possiamo quindi tracciare la circonferenza C con centro G e raggio GD

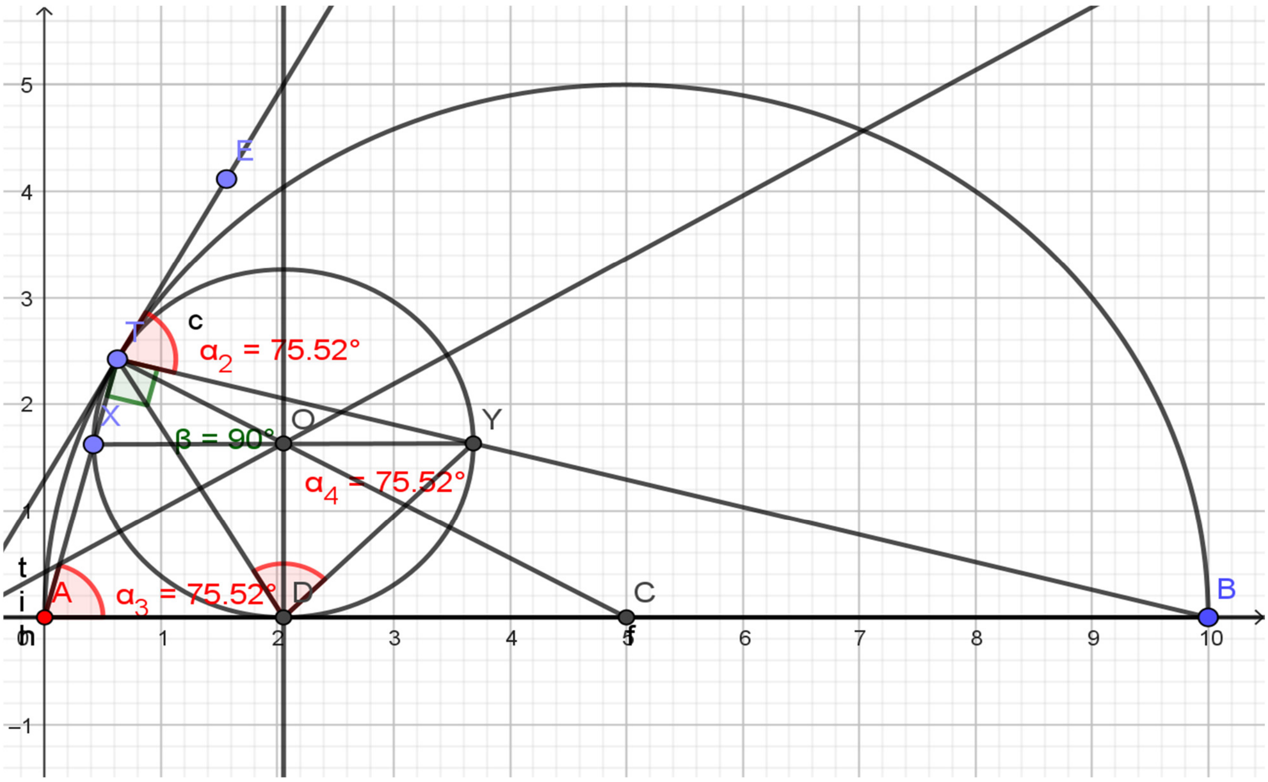
Dimostrazione del fatto che l'ampiezza di BTD è 45°



Consideriamo l'angolo GTD=α. Di conseguenza anche l'angolo GDT sarà α perché angolo alla base, insieme ad α, di un triangolo isoscele perché formato da due raggi.
L'angolo TGD varrà quindi 180-2α e l'angolo MGD varrà 180-(180-2α)=180-180+2α=2α.
L'angolo TMA vale quindi 180-90-2α=90-2α.
Osserviamo poi il triangolo TAM: esso ha due lati congruenti perché raggi della semicirconferenza in centro M e raggio AM=MT.
Possiamo quindi affermare che l'angolo MTA=TAM perché angoli alla base di un triangolo isoscele, quindi MTA= $\frac{180-(90-2\alpha)}{2}$ e risolvendo, otteniamo che MTA vale 45+α.
Possiamo poi osservare che l'angolo ATB vale esattamente 90° perché angolo alla circonferenza che insiste su un angolo al centro piatto, quindi metà di un angolo di 180°.
Avendo queste informazioni è facile trovare l'ampiezza dell'angolo BTM.
Esso, infatti, vale ATB-ATM=90-(45+α)=45-α.
Se vogliamo poi trovare l'ampiezza dell'angolo BTD, nostro scopo, dobbiamo sommare l'angolo BTM con l'angolo MTD. Otteniamo quindi che l'ampiezza dell'angolo BTD=45-α+α=45°.

[la costruzione è in gran parte incomprensibile !!!]

4)Problema svolto da Dan Marian Malic, Liceo Russell Cles (TN) Scienze Applicate, classe 1D



Dimostrazione disegno

Parto tracciando un segmento AB che sarà il diametro della nostra semicirconferenza. Poi su essa prendiamo un punto T e tracciamo una retta tangente alla semicirconferenza passante per il punto T. Poi traccio una retta r passante per AB e l'intersezione tra la retta e la tangente la chiamerò C .Successivamente disegno la bisettrice dell'angolo TCB e dopo averla tracciata stabilisco il punto medio di AB che sarà Z .Tracciamo il segmento TZ e il punto di intersezione tra la bisettrice dell'angolo TVB e il segmento TZ sarà il centro della nostra circonferenza che chiamiamo O ed essa sarà tangente ad AB e T . Dopo indico il segmento TB e faccio partire una retta perpendicolare ad AB passante per O il centro della circonferenza e il punto appartenente al segmento AB che interseca la retta perpendicolare lo chiamo D e imposto il segmento TD

Dimostrazione problema

Tenendo conto della figura successiva traccio un punto Y tra l'intersezione del segmento TB e la circonferenza c, in seguito traccio dei segmenti TY che sarà sul segmento TB poi traccio anche YD, TD e TA, e segno il punto X che sarà il punto di incontro tra OY e la circonferenza c, e sulla retta tangente passante per T segno un punto E e traccio un segmento XY.

[Costruzione confusa e incomprensibile].

Dimostrazione: sia X = AT ∩ c Y=BT ∩ c

Osservo che l'angolo ATB è retto poiché insiste sul diametro di AB allora l'angolo BTD è pari a 45°,

E se e solo se sul triangolo ABT, DT è bisettrice, per il teorema della bisettrice: TD [è bisettrice] dell'angolo

ATB e solo se: $\frac{AD}{BD} = \frac{AT}{BT}$

Mentre per il teorema delle secanti [applicato a ….] si ha che BY •BT =BD^2

AX•AT =AD^2

⇒ La tesi equivale a: $\frac{AD^2}{BD^2} = \frac{AT^2}{BT^2} \Rightarrow \frac{AX \cdot AT}{BY \cdot BT} = \frac{AT^2}{BT^2} \Rightarrow \frac{AX}{BY} = \frac{AT}{BT}$

Ora per il teorema di Talete questo equivale a dimostrare che AB‖ XY

Data t la tangente comune alle due circonferenze e E un punto su essa

Osservo che: l'angolo TXY = ETY (angolo) [perché ….]

⇒ l'angolo TXY=BAT [perché …] (angolo)⇒ AB‖ XY [perché …] da cui la tesi

L'angolo BAT= ETB (angolo).

Quindi l'angolo ATD sarà congruente all'angolo DTC e visto che sono congruenti 90: 2 = 45° .