FLATlandia

Rubrica mensile di problemi di geometria per studenti della Scuola secondaria

Flatlandia – Problema di dicembre 2024 - Commento alle soluzioni ricevute

Il testo del problema

Flatlandia - Problema 2 - 23 dicembre 2024

Dato il triangolo ABC isoscele sul lato BC, con gli angoli congruenti di 75°:

a) dimostrare che l'altezza relativa al lato AC è la metà di esso;

b) sapendo che i lati congruenti misurano 2, determinare il perimetro del triangolo e il raggio della circonferenza circoscritta. Che cosa si osserva?

Commento

Il problema poneva un quesito su un particolare triangolo isoscele, con angoli alla base di 75°, in cui occorreva provare che l'altezza relativa ai lati uguali è la metà dei lati stessi.

Si doveva poi determinare il perimetro del triangolo e il raggio della circonferenza circoscritta, osservando che questo raggio è uguale alla misura della base.

Due delle soluzioni arrivate utilizzano la trigonometria, che si poteva facilmente evitare.

Si nota anche una certa difficoltà a fare delle figure che corrispondano ai dati del problema, pur esistendo software, come per esempio GeoGebra, che permettono di ottenere delle figure molto precise.

Le risposte giunte sono comunque tutte corrette, per quanto, come detto, alcune abbiano utilizzato la trigonometria.

Sono arrivate quattro soluzioni, tutte da classi di Licei scientifici, dalle seguenti scuole:
-Liceo "Cecioni", Livorno
-IIS "Primo Levi", Badia Polesine (RO)
-I.I.S. "Arimondi-Eula" sede di Savigliano (CN)
-Liceo Scientifico "P. Paleocapa", Rovigo

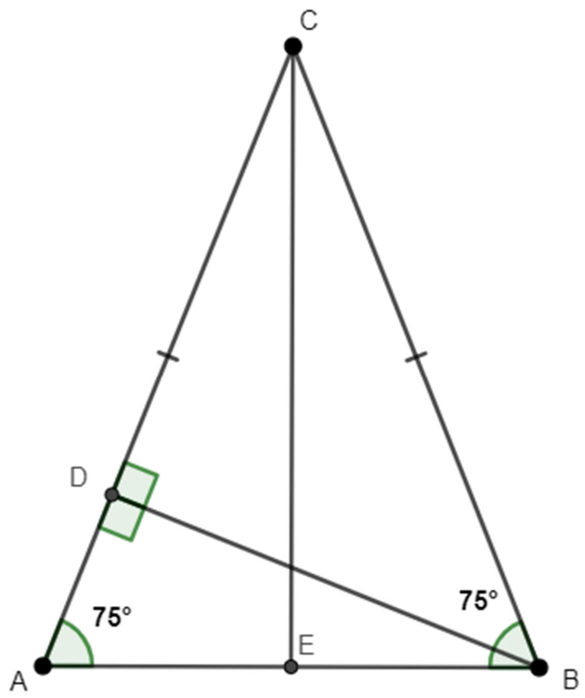
Nota. *Nelle soluzioni riportate, le correzioni, le aggiunte o i commenti sono scritti fra parentesi quadre. Con doppia parentesi quadra vengono indicate le parti omesse.*

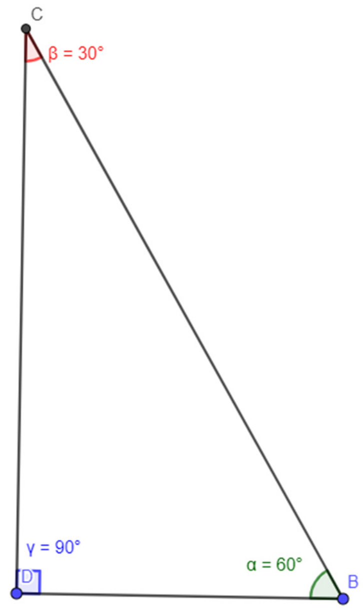
Soluzioni arrivate

1)Soluzione svolta dagli alunni Simone Santoro Cl. 1BSA e Gabriele Angiuli Cl.2CSA, Liceo Statale "F. Cecioni" di Livorno

Pur avendo fatto la figura con GeoGebra gli angoli alla base non sono della misura assegnata nel testo
IPOTESI
$AC \cong BC$
$B\hat{A}C \cong A\hat{B}C = 75°$
$BD \perp AC$
TESI
$BD \cong \frac{AC}{2}$

a)





Prima di tutto riporto le misure degli angoli $A\hat{C}B = 180° - 2 \cdot 75° = 30°$ e $D\hat{B}C = 90° - 30° = 60°$.
Considero il triangolo DBC che è la metà di un triangolo equilatero quindi $BD \cong \frac{BC}{2}$ e poiché $BC \cong AC$ per ipotesi si ha la Tesi1
b) So che $\overline{AC} = \overline{BC} = 2$
quindi $\overline{DB} = 1$ e $\overline{DC} = \sqrt{3}$ (l'altezza di un triangolo equilatero $h = \frac{l \cdot \sqrt{3}}{2}$)
$\overline{AD} = \overline{AC} - \overline{DC}$
Con il teorema di Pitagora applicato al triangolo BCD determino
$\overline{DC} = \sqrt{\overline{BC}^2 - \overline{DB}^2}$ [già trovato in precedenza]
$\overline{DC} = \sqrt{2^2 - 1} = \sqrt{3}$ e $\overline{AD} = \overline{AC} - \overline{DC} = 2 - \sqrt{3}$

Adesso applicando il teorema di Pitagora al triangolo ABD ricavo $\overline{AB} = \sqrt{\overline{AD}^2 + \overline{DB}^2}$

$$\overline{AB} = \sqrt{\left(2-\sqrt{3}\right)^2 + 1} = \sqrt{4+3-4\sqrt{3}+1} = \sqrt{8-4\sqrt{3}} = 2 \cdot \sqrt{2-\sqrt{3}}$$

Perimetro $2p = 2 \cdot \sqrt{2-\sqrt{3}}$+4=5,035 (circa)

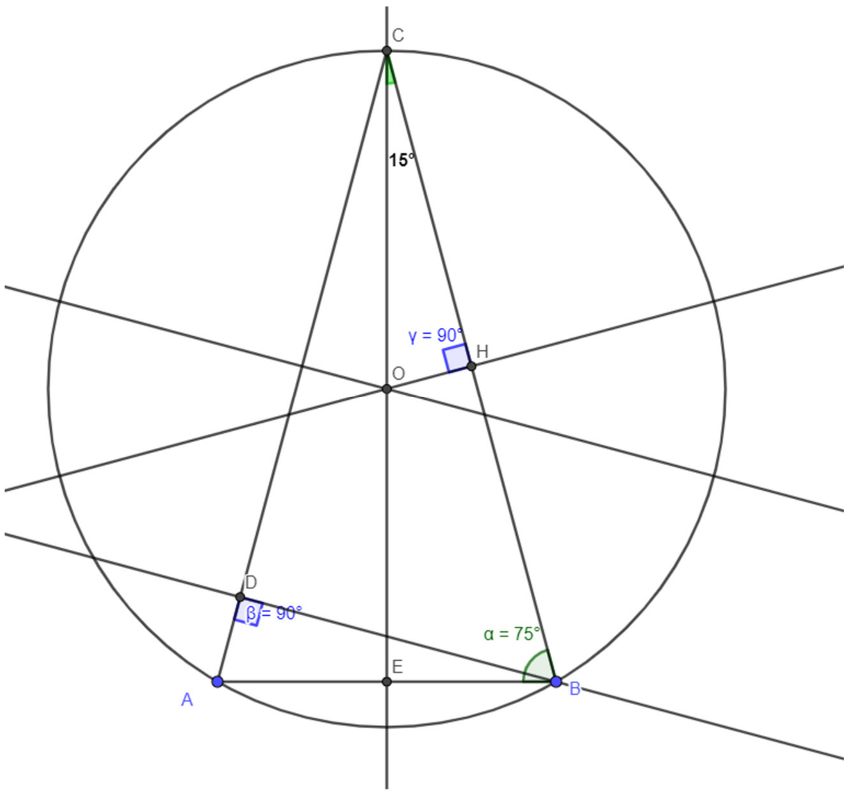
Per rispondere al quesito relativo al raggio della circonferenza circoscritta costruisco la circonferenza tracciando gli assi dei segmenti corrispondenti ai lati del triangolo ABC, il punto di intersezione individua il centro della circonferenza.

Considero l'asse relativo al lato BC quindi H è il punto medio del segmento BC per cui trovo che

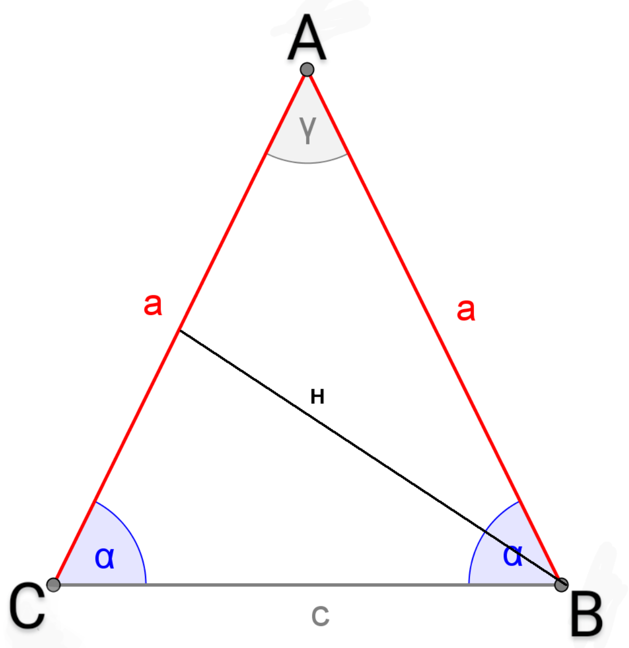
$CH \cong BD$ [= 1] per quanto già dimostrato al punto a).

Esaminando i due triangoli [OHC] e ADB riconosco che oltre ad un angolo retto hanno entrambi un angolo di 15°. In un triangolo isoscele l'altezza relativa alla base è anche mediana e **bisettrice** dell'angolo al vertice e l'angolo $A\hat{B}D = 75° - 60° = 15°$. Pertanto i due triangoli [OHC] e ADB sono congruenti per il 2° criterio di congruenza dei triangoli e in particolare sono congruenti le corrispondenti ipotenuse $OC \cong AB$ segue che

il raggio della circonferenza circoscritta misura come la base del triangolo isoscele ABC.



2)Soluzione svolta da Moscardi Elena, 4ASA IIS “Primo Levi”, Badia Polesine (RO)



[[La figura non corrisponde alle ipotesi.]]
IPOTESI:
Alpha=75°
ABC è un triangolo isoscele sul lato BC
TESI:
H=a/2 [h occorre indicarlo in minuscolo, anche nella figura]
a=2
2p=?
r (circonferenza circoscritta)=?

TESI: H=a/2
H= c(sen75°)
H= c*sen75°
H=2acos(75°)*Sen(75°)
H=a(2*cos75°sen75°)
H= a*Sen(2*75°)
H= a*Sen(150°)
H=a*½
H=a/2

a=2
2p=?

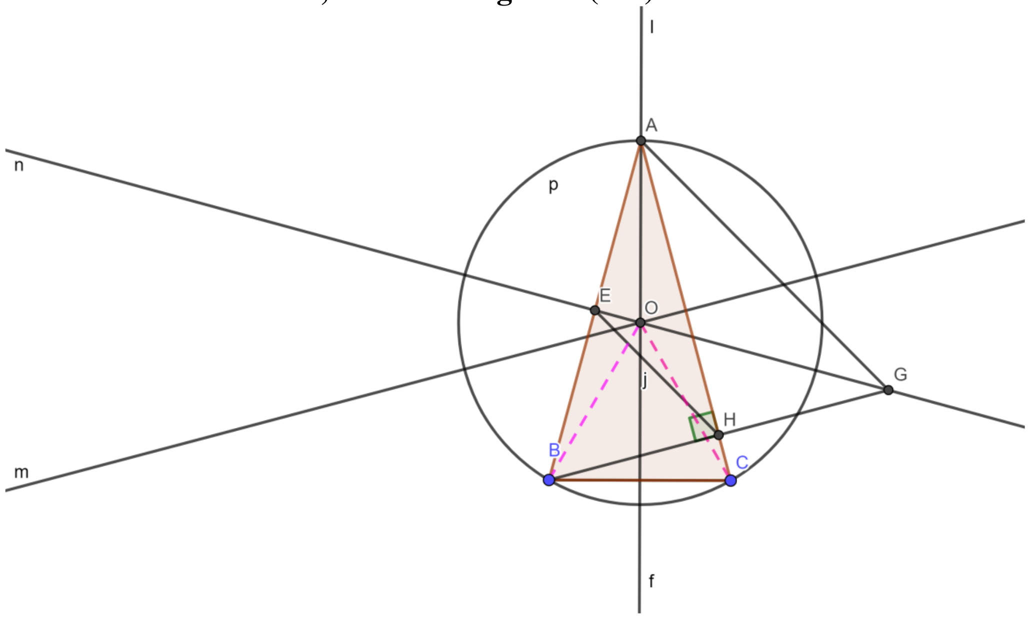
2p= a+a+2acos75°
2p= 2+2+2×2(cos75°)
2p= 4*(1+cos75°)
2p=~ 5,035

Trovo r= raggio della circonferenza circoscritta usando il Teorema della corda con a=2

$a=2r\operatorname{sen}75°$
$r=a/(2\operatorname{sen}75°)$
$r= 2/2[(\sqrt{6}+\sqrt{2})/4]$
$r= 2(2/\sqrt{6}+\sqrt{2})$
$r= 4/(\sqrt{6}+\sqrt{2})$
$r= \sqrt{6}-\sqrt{2}$

Calcolando c base del triangolo isoscele:
$c= 2a\cos(75°)$
$c= 4*[(\sqrt{6}-\sqrt{2})/4]$
$c= \sqrt{6}-\sqrt{2}$
Possiamo notare come il raggio della circonferenza circoscritta r è congruente alla base del triangolo isoscele c

3)Soluzione svolta da Taricco Arianna e Ambrosino Alessandro, Classe 2^A liceo scientifico I.I.S. "Arimondi-Eula", sede di Savigliano (CN)



a)

Ip: AB≅AC

$A\widehat{B}C \cong B\widehat{C}A = 75°$

$BH \perp AC$

Ts: $BH \cong \frac{1}{2} AB$

DIMOSTRAZIONE: Date le ipotesi otteniamo che $C\widehat{A}B = 180° - 2A\widehat{B}C = 180° - 150° = 30°$

Prolunghiamo BH di un segmento HG≅BH e consideriamo i triangoli ABH e AHG, essi hanno

$$\begin{cases} \text{AH in comune} \\ A\widehat{H}B \cong A\widehat{H}G \text{ perché retti} \\ BH \cong HG \text{ per costruzione} \end{cases}$$

Quindi ABH≅AHG per il primo criterio di congruenza dei triangoli, in particolare si ha $G\widehat{A}H = 30°$ e AB≅AG.

Consideriamo il triangolo ABG, isoscele sulla base BG e con $G\widehat{A}B = 60°$ per dimostrazione precedente, esso risulta quindi essere equilatero. Poiché in un triangolo equilatero altezza e mediana coincidono si ha $BH = \frac{1}{2} BG$, ma BG≅AB quindi $BH = \frac{1}{2} AB$

c.d.d.

b)

$\overline{AB} \cong \overline{AC} = 2$

$$\overline{BH} = \frac{\overline{AB}}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

$$\overline{AH} = \sqrt{\overline{AB}^2 - \overline{BH}^2} = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$$

$$\overline{HC} = \overline{AB} - \overline{AH} = 2 - \sqrt{3}$$

$$\overline{BC}=\sqrt{\overline{BH}^2+\overline{HC}^2}=\sqrt{1^2+(2-\sqrt{3})^2}=\sqrt{1+4+3-4\sqrt{3}}=\sqrt{8-4\sqrt{3}}=\sqrt{8-\sqrt{48}}=$$

$$=\sqrt{\frac{8+\sqrt{8^2-48}}{2}}-\sqrt{\frac{8-\sqrt{8^2-48}}{2}}=\sqrt{\frac{8+4}{2}}-\sqrt{\frac{8-4}{2}}=\sqrt{6}-\sqrt{2}$$

$$2p_{ABC}=\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CA}=2+\sqrt{6}-\sqrt{2}+2=4+\sqrt{6}-\sqrt{2}$$

$$A_{ABC}=\frac{\overline{AC}\cdot\overline{BH}}{2}=\frac{2\cdot 1}{2}=1$$

Sia O il circocentro del triangolo ABC si ha $\overline{OB}=\frac{\overline{AB}\cdot\overline{BC}\cdot\overline{CA}}{4Area}=\frac{2\cdot(\sqrt{6}-\sqrt{2})\cdot 2}{4\cdot 1}=\sqrt{6}-\sqrt{2}$

Notiamo che il raggio della circonferenza circoscritta è congruente alla base $\overline{BC}$ del triangolo ABC e che quindi il triangolo OBC è equilatero.

4)Soluzione svolta da Valentino Romani, 5ª BS, Liceo Scientifico Pietro Paleocapa, Rovigo

IPOTESI: AB≅AC, ABC≅ACB=75°

TESI: a) altezza BH≅ ½ AC

(Manca la figura).

DIMOSTRAZIONE:

BHC≅BHA=90° poiché angoli formati dall'altezza BH su AC

HBC=15° poiché dato da 180°-HBC-BHC=180°-75°-90°=15°

HBA=60° poiché dato da ABC-HBC=75°-15°=60°

Consideriamo il triangolo ABH

AB≅AC per ipotesi

BH=AB * cos(ABH)=AB*cos60°= ½ AB= ½ AC

b) AB≅AC=2 2p? r_c?

BC=2*AB*cos(ABC)=2*2*cos75°=1,03

2p=2*2+1,03=5,03

A_{ABC}=AC*BH/2=AC*(AB*sin(BAC))/2= 2*(2*sin30°)/2=1

r_c=AB*AC*BC/4A_{ABC}=2*2*1,03/4*1=1,03.

[Sarebbe stato meglio usare i valori con i radicali piuttosto che i valori decimali approssimati]