# FLAT*landia*

Rubrica mensile di problemi di geometria per studenti della Scuola secondaria

## Flatlandia – Problema di gennaio 2025 - Commento alle soluzioni ricevute

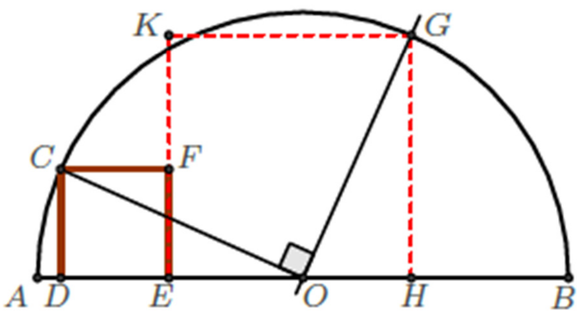
**Il testo del problema**

### Flatlandia - Problema 7 - 27 gennaio 2025

Nella semicirconferenza di diametro $AB$ e centro $O$, sia dato il quadrato $DEFC$ con i vertici $D$ ed $E$ sul diametro e il vertice $C$ sulla semicirconferenza. Tracciare il raggio $OG$ perpendicolare al raggio $OC$ e completare la figura fino a ottenere il rettangolo $EHGK$ (vedi figura).

a) Dimostrare che anche $EHGK$ è un quadrato.

b) Sapendo che il raggio della semicirconferenza misura 2, determinare la somma delle aree dei due quadrati.




**Commento**

Il problema poneva un quesito su un quadrato "inscritto" in una semicirconferenza e su un rettangolo costruito a partire dal quadrato e che si doveva dimostrare essere anch'esso un quadrato. Si chiedeva infine di determinare la somma delle aree dei due quadrati.

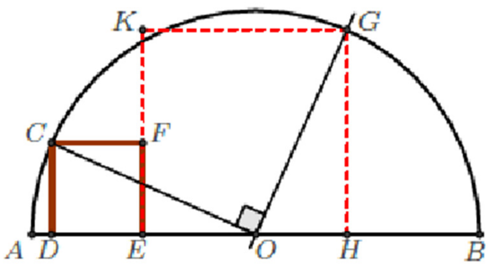
Le risposte arrivate sono tutte corrette (con qualche imprecisione di linguaggio e alcune lungaggini che si potevano evitare).

Sono arrivate sette soluzioni, tutte da classi di Licei scientifici, dalle seguenti scuole:
-Liceo Scientifico "E. Fermi", Bologna
-Liceo Scientifico "P. Paleocapa", Rovigo
-Liceo Scientifico "F. Severi", Castellamare di Stabia (NA)
-I.I.S. "A. Lombardi", Airola (BN)
-Liceo "G. Galilei", Caravaggio (BG)
-ITIS "E. Fermi", Modena
-I.I.S. Liceo Scientifico "Margherita Hack", Baronissi (SA)

**Nota**. *Nelle soluzioni riportate, le correzioni, le aggiunte o i commenti sono scritti fra parentesi quadre. Con doppia parentesi quadra vengono indicate le parti omesse.*

**Soluzioni arrivate**

## 1)Soluzione svolta da G. Fariselli - 3ª F - Liceo Scientifico Enrico Fermi – Bologna




a) si considerano i triangoli CDO e OHG, essi hanno:

gli angoli CDO e OHG congruenti (entrambi retti per costruzione)
[le ipotenuse] [[i cateti]] CO e GO congruenti (raggi della semicirconferenza)

gli angoli DCO e HOG congruenti (supplementari dello stesso angolo: DCO = $\pi$ - CDO - DOC = $\pi$ - $\frac{\pi}{2}$ - DOC = $\frac{\pi}{2}$ - DOC (somma angoli interni di un triangolo = 180°) e HOG = $\pi$ - COG - DOC = $\pi$ - $\frac{\pi}{2}$ - DOC = $\frac{\pi}{2}$ - DOC (angolo piatto = 180°)) [quindi sono complementari entrambi di DOC]

i triangoli CDO e OHG sono quindi congruenti [[(per il terzo criterio di congruenza dei triangoli rettangoli)]], segue che essi hanno tutti gli elementi corrispondenti congruenti, in particolare:

DO ≅ HG (cateti maggiori) e OH ≅ CD (cateti minori)

CD ≅ DE (lati di un quadrato)

DE ≅ OH (proprietà transitiva)

DO ≅ EH (DO = DE + EO e EH = EO +OH)

EH ≅ HG (proprietà transitiva)

EHGK rettangolo con due lati consecutivi congruenti ⇒ quadrato

---

a)
triangolo CDO → Ip = r = 2, $c_1$ = CD = lato quadrato CDEF, $c_2$ = DO ≅ EH (per dimostrazione precedente) = lato quadrato EHGK
$Ip^2 = c_1^2 + c_2^2$ (per teorema di Pitagora)

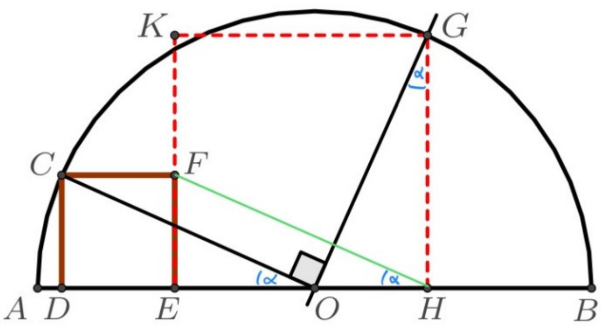
Area quadrato CDEF + Area quadrato EHGK = A totale = $c_1^2 + c_2^2$
A totale = $Ip^2 = r^2 = 2^2 = 4$.

## 2)Soluzione svolta da E. Pizzo, Classe 5^BLS, liceo Scientifico P. Paleocapa, Rovigo.

<u>IPOTESI</u>

- Semicirconferenza di diametro $\overline{AB}$ e centro $O$
- $DEFC$ è un quadrato con $D, E \in \overline{AB}, C \in \overset{\frown}{AB}$
- $G \in \overset{\frown}{AB}, \overline{OC} \perp \overline{OG}$
- $EHGK$ è un rettangolo

<u>DIMOSTRAZIONE</u>




a) Dimostrare che $EHGK$ è un quadrato.

Per dimostrare che $EHGK$ è un quadrato, sapendo che è un rettangolo, è sufficiente dimostrare che due lati non opposti siano congruenti, ossia che $\overline{EH} \cong \overline{GH}$.
Chiamiamo l'angolo $\widehat{DOC} \cong \alpha$. Poiché $\widehat{DOC} + \widehat{COG} + \widehat{GOH} \cong \pi$, e $\widehat{COG} \cong \frac{\pi}{2}$ per ipotesi, ne consegue che $\widehat{GOH} \cong \frac{\pi}{2} - \alpha$. Considerando il triangolo $GOH$, per somma di angoli interni di un triangolo, poiché $\widehat{OHG} \cong \frac{\pi}{2}$, ne consegue che $\widehat{OGH} \cong \alpha$.
$COD \cong GOH$ per il secondo criterio di congruenza dei triangoli, perché:

- $\overline{OC} \cong \overline{OG}$ in quanto entrambi sono raggi della semicirconferenza $\overset{\frown}{AB}$;
- $\widehat{CDO} \cong \widehat{OHG} \cong \frac{\pi}{2}$ per Hp, in quanto appartenenti rispettivamente a un quadrato e a un rettangolo;
- $\widehat{DOC} \cong \widehat{OGH} \cong \alpha$ per precedente dimostrazione.

Ne consegue che $\overline{CD} \cong \overline{OH}$.
Tracciamo il segmento $\overline{FH}$. $OCFH$ è un parallelogramma, perché:

- $\overline{OH} \cong \overline{CF}$ per transitività, poiché $\overline{OH} \cong \overline{CD}$ per precedente dimostrazione e $\overline{CF} \cong \overline{CD}$ per Hp, in quanto $DEFC$ è un quadrato;
- $\overline{OH} \parallel \overline{CF}$ per transitività, poiché $\overline{CF} \parallel \overline{DE}$ in quanto $DEFC$ è un quadrato, e $\overline{OH}$ e [$\overline{DE}$] [[$\overline{CF}$]] giacciono entrambi sul segmento $\overline{AB}$.

Ne consegue che $\overline{OC} \cong \overline{FH}$, $\overline{OC} \parallel \overline{FH}$ e $\widehat{FHE} \cong \alpha$, poiché due segmenti paralleli $\overline{OC}$ e $\overline{FH}$ formano lo stesso angolo $\alpha$ sullo stesso segmento $\overline{AB}$.
$COD \cong FEH$ per il secondo criterio di congruenza dei triangoli, perché:

- $\overline{OC} \cong \overline{FH}$ per precedente dimostrazione;
- $\widehat{CDO} \cong \widehat{FEH} \cong \frac{\pi}{2}$, in quanto $\widehat{CDO}$ appartiene al quadrato $DEFC$, e $\widehat{FEH}$ è supplementare di un angolo retto $\widehat{DEF}$ appartenente al quadrato $DEFC$;

- $\widehat{DOC} \cong \widehat{FHE} \cong \alpha$, per precedente dimostrazione.

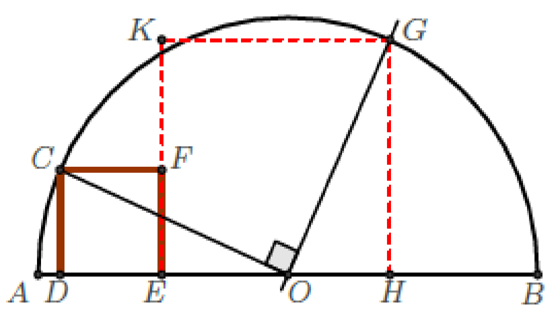
Ne consegue che $FEH \cong GOH$ per transitività, e quindi $\overline{EH} \cong \overline{GH}$, c. v. d.

b) Sapendo che il raggio della semicirconferenza misura 2, determinare la somma delle aree dei due quadrati.

Chiamiamo $x$ il lato del quadrato $DEFC$, e $y$ il lato del quadrato $EHGK$. La somma delle aree dei due quadrati è pertanto $x^2 + y^2$.
Consideriamo il triangolo $GOH$:
- $\overline{GH} \cong y$, in quanto lato del [quadrato] [[triangolo]] $EHGK$;
- $\overline{OH} \cong x$, poiché $\overline{OH} = \overline{CD}$ per precedente dimostrazione, e $\overline{CD}$ è lato del [quadrato] [[triangolo]] $DEFC$;
- $\overline{OG} \cong 2$, in quanto raggio della semicirconferenza;
- $\widehat{OHG} \cong \frac{\pi}{2}$ per Hp.

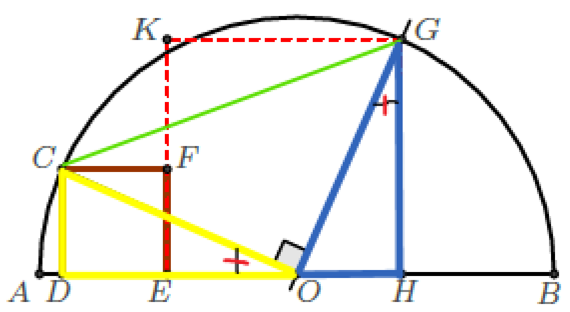
Poiché il triangolo $GOH$ è rettangolo in $\hat{H}$, vale il teorema di Pitagora $\overline{OH}^2 + \overline{GH}^2 \cong \overline{OG}^2$, da cui consegue che $x^2 + y^2 \cong 4$.

**3)Soluzione svolta da P.M. D'APICE; A. NASTRO; A. SOLLAZZI, classe 2^ I dell'Istituto Liceo Scientifico Statale "Francesco Severi", Castellamare di Stabia (SA)**




Nella semicirconferenza di diametro *AB* e centro *O*, sia dato il quadrato *DEFC* con i vertici *D* ed *E* sul diametro e il vertice *C* sulla semicirconferenza. Tracciare il raggio *OG* perpendicolare al raggio OC e completare la figura fino a ottenere il rettangolo *EHGK*.

**a) Dimostrare che anche *EHGK* è un quadrato**




DIMOSTRAZIONE:
Consideriamo i triangoli rettangoli *CDO* e *HGO*. Notiamo che hanno:

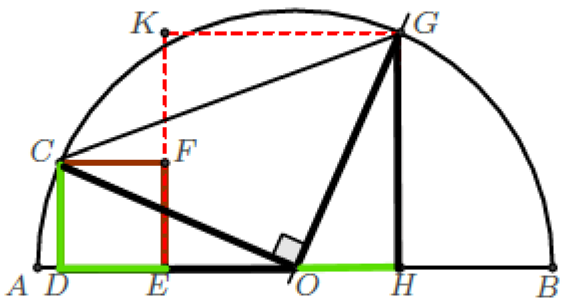
*CO* ≅ *OG* (per ipotesi);

$C\hat{D}E \cong O\hat{H}G$ (perchè angoli retti);

$C\hat{O}D \cong O\hat{G}H$ (perchè angoli complementari di uno stesso angolo: $G\hat{O}H$).

I due triangoli *CDO* e *HGO* sono dunque

[congruenti]




In particolare hanno:

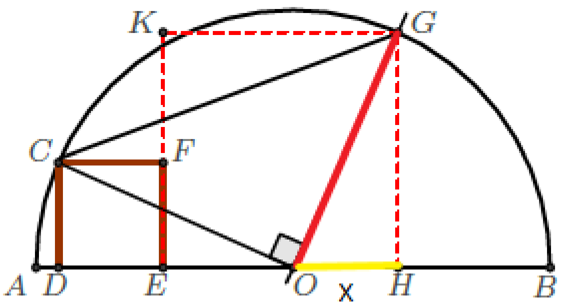
*CD ≅ DE ≅ OH*

Quindi:

*EH ≅ EO + OH ≅ EO + DE ≅ DO ≅ GH*

Avendo due lati consecutivi congruenti (*EH e GH*), possiamo dire che il rettangolo *EHGK* è un quadrato.

b) Sapendo che il raggio della semicirconferenza misura 2, determinare la somma delle aree dei due quadrati.




OG = 2; OH = X

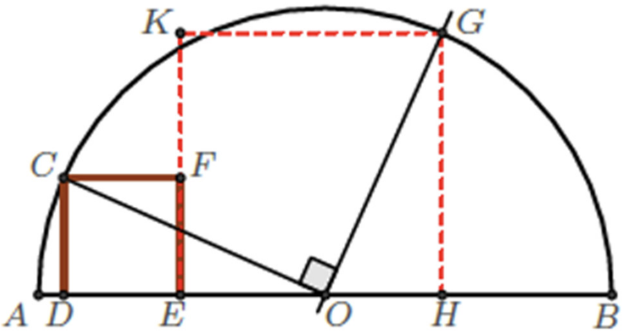
GH = $\sqrt{2^2 - X^2} = \sqrt{4 - X^2}$ (Per il teorema di Pitagora)

$GH^2 = 4 - X^2$

$GH^2 + DE^2 = 4 - X^2 + X^2$

$GH^2 + DE^2 = 4$

## 4)Soluzione svolta da D. Falzarano, classe II A, I.I.S. Lombardi (L.S.); Airola (BN)




**IPOTESI**

- KG ≅ EH
- KE ≅ HG
- DE ≅ CF ≅ CD ≅ EF
- KG // EH
- KE // HG
- CÔG = π/2 (90°)
- OG ≅ ½AB ≅ OC
- AÔB = π (180°)
- AO ≅ OB

TESI/INCOGNITE

- EH ≅ HG
- A(DEFC) + A(EHGK) tale che r=2?

**------DIM. 1------**

*Prima dell'inizio della dimostrazione si premettono una serie di elementi, evidenti, da tenere come riferimento: considerando il quadrato DEFC si evidenzia che l'angolo CD^O è retto per definizione di quadrato. Inoltre, si tenga anche in mente, che l'angolo OH^G sia altresì, retto per definizione di rettangolo, essendo EHGK un rettangolo per ipotesi.

Si considerino, ora, gli angoli dei triangoli DOC e OHG, si hanno due casi:

- Se si esamina il triangolo OHG con angolo esterno 90°+ DÔC si ha che, per conseguenza del teorema dell'angolo esterno, esso è congruente alla somma degli altri due interni non adiacenti ad esso (OG^H e OH^G = 90°), e dunque: 90° + DÔC ≅ 90° + OG^H, che semplificando ambo i termini per il 1° principio di equivalenza si ottiene: **DÔC ≅ OG^H.**
- Se si esamina il triangolo DOC, analogamente, con angolo esterno 90° + GÔH si ha che, sempre per conseguenza del teorema dell'angolo esterno, esso è congruente alla somma degli altri due interni non adiacenti ad esso (DC^O e CD^O = 90°), e dunque: 90° + GÔH ≅

90° + DC^O, che semplificando ambo i termini per il 1° principio di equivalenza si ottiene: **GÔH ≅ DC^O**.

Si considerino, adesso, i triangoli DOC e OHG, essi hanno:

- OC ≅ OG per ipotesi, essendo entrambi raggi della stessa circonferenza;
- DÔC ≅ OG^H come dimostrato precedentemente;
- GÔH ≅ DC^O come dimostrato precedentemente.

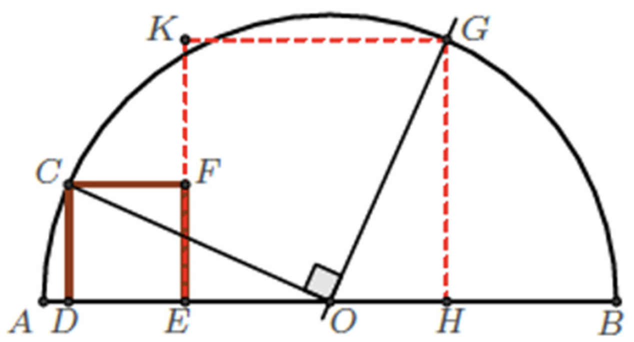
Dunque, i triangoli sono congruenti per il secondo criterio di congruenza (ALA);
in particolare, anche **HG ≅ DO** e **CD ≅ OH**. Inoltre, essendo DEFC un quadrato, è anche vero che CD ≅ DE ≅ OH.
Adesso, infine, si definiscano i segmenti DO e EH: essi sono congruenti perché somme di segmenti ordinatamente congruenti (con EO in comune e congruente e DE ≅ OH).
Per concludere, se inizialmente DO ≅ HG e ora DO ≅ EH, **EH ≅ HG**, condizione sufficiente a dimostrare che il rettangolo EHGK è in realtà, anche un quadrato (sapendo che i lati sono congruenti a due a due, in questo modo, lo sono tutti e quattro). C.M.D.

**------DIM. 2------ Esecuzione del problema tale che il raggio della semicirconferenza è uguale a 2.**
*Con medesime ipotesi e tesi (2^a **incognita**).

**Dati**
**INCOGNITA**
$r=2$
A(DEFC) + A(EHGK) =?

Si consideri il triangolo rettangolo in 'H' OHG, esso ha come cateti OH, che per dimostrazione precedente è congruente a DE, e HG, lato del quadrato EHGK. Inoltre, ha come ipotenusa il raggio OG, di cui è nota la lunghezza.
Per l'enunciato del teorema di Pitagora si ha che la somma dei quadrati costruiti sui cateti è equivalente al quadrato costruito sull'ipotenusa, e dunque è anche vero che $DE^2 + HG^2 = r^2$, e dato che in un quadrato un lato al quadrato equivale al calcolo della rispettiva area, $A(DEFC) + A(EHGK) = r^2$, perciò, la soluzione al nostro problema è che la somma delle aree dei quadrati è uguale a $r^2 = 2^2 =$ **4** (*Omesse le unità di misura in quanto non presenti nel problema). C.M.D.

**5)Soluzione svolta da Beatrice-Eleonora-Lorenzo-Francesca, 2A, Liceo Galileo Galilei- Caravaggio (BG)**




**a)**

1. Considero le rette CF e DO tagliate dalla trasversale CO:

- CF è parallelo a DE per proprietà del quadrato
- DE appartiene ad AB
- l'angolo FCO è congruente all'angolo COD perché angoli alterni interni

2. Considero l'angolo AOB, che misura 180 gradi, l'angolo COG misura 90 gradi per ipotesi, di conseguenza gli angoli COD e GOB sono complementari, ma l'angolo DCO é complementare anche a FCO che è congruente a COD per precedente dimostrazione, quindi l'angolo DCO é congruente all'angolo GOH perché complementari di angoli congruenti.

3. Considero i triangoli DCO e OHG

- l'angolo CDO è congruente all'angolo OHG perché entrambi retti
- GO≅CO perché raggi della semicirconferenza
- l'angolo DCO è congruente all'angolo GOH per precedente dimostrazione

quindi i triangoli DCO e OHG sono congruenti per il secondo Criterio Generalizzato, in particolare OH≅CD e GH≅DO

4. GH≅EH perché EH≅EO+OH, ma OH≅CD per precedente dimostrazione e CD≅DE perché lati di un quadrato, quindi per la proprietà transitiva OH≅DE, quindi sempre per la proprietà transitiva EH≅EO+DE. Ma anche DO≅EO+DE e per precedente dimostrazione [DO] [[EH]] ≅GH quindi

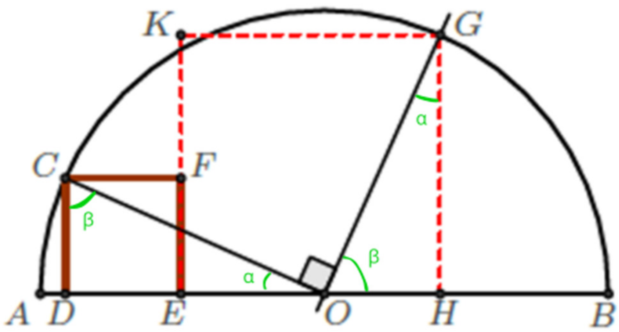
[EH≅ GH] e il rettangolo EHGK è un quadrato.

b)

Considero il triangolo OHG.

Il quadrato EHGK è anche il quadrato costruito sul cateto GH, mentre il quadrato costruito sul cateto OH è congruente al quadrato CFDE perché OH≅CD per precedente dimostrazione. Quindi per il Teorema di Pitagora, la somma delle aree dei quadrati costruiti sui cateti é uguale all'area del quadrato costruito sull'ipotenusa e dato che l'ipotenusa misura 2, la sua area è 2^2 cioè 4, anche la somma delle aree dei quadrati EHGK e DCFE è uguale a 4.

**6)Soluzione svolta da F. Barchetti, 4^M, Istituto Tecnico Industriale Statale Enrico Fermi, Modena**




Consideriamo il triangolo CDO e poniamo $\alpha \equiv \widehat{COD}$ e $\beta \equiv \widehat{DCO}$, poiché $\alpha + \beta \equiv 90°$ e $\widehat{GOH} \equiv 180° - 90° - \alpha \equiv \beta$ allora obbligatoriamente $\widehat{OGH} \equiv \alpha$.

**a) Dimostrare che anche EHGK è un quadrato.**

Per dimostrare che EHGK è un quadrato ci basta dimostrare che $\overline{EH} \equiv \overline{HG}$ dove $\overline{EH}$ e $\overline{HG}$, come si può osservare, sono [due lati non consecutivi del rettangolo EHGK] [[due lati del quadrato]].

$$\overline{EH} \equiv \overline{HG}$$
$$\overline{EO} + \overline{OH} \equiv \overline{HG}$$

Sia $r$ un numero reale positivo che indica il raggio della semicirconferenza.

$$(r \cdot \cos\alpha - \overline{DE}) + (r \cdot \cos\beta) \equiv r \cdot \cos\alpha \quad \text{[da cui]}$$
$$r \cdot \cos\beta \equiv \overline{DE} \equiv \overline{CD}$$

Poiché è vera questa ultima affermazione, allora lo è anche la prima e di conseguenza abbiamo dimostrato che EHGK è un quadrato.

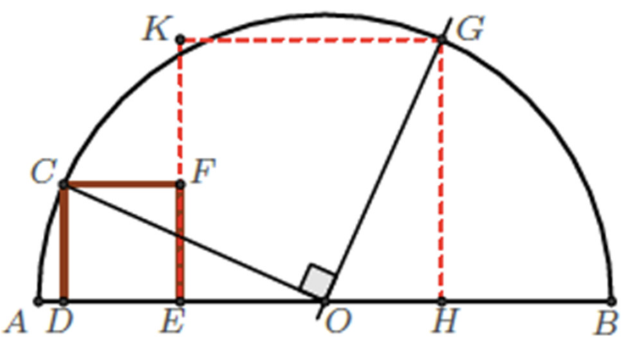
b) **Sapendo che il raggio della semicirconferenza misura 2, determinare la somma delle aree dei due quadrati.**

Siano $A_1$ e $A_2$ rispettivamente le aree del quadrato CDEF e EHGK.

$$A_1 = (2\cos\beta)^2 = 4\,(\cos\beta)^2$$
$$A_2 = (2\sin\beta)^2 = 4\,(\sin\beta)^2$$
$$A_1 + A_2 = 4\,(\cos\beta)^2 + 4\,(\sin\beta)^2 = 4((\cos\beta)^2 + (\sin\beta)^2) = 4 \cdot 1 = 4$$

Concludiamo quindi dicendo che la somma delle aree dei due quadrati corrisponde a 4.

**7)Soluzione svolta da M. Abate, classe 3C, Liceo scientifico IIS Margherita Hack, Baronissi (SA)**




1) Dimostro che il rettangolo EHGK è un quadrato.

Innanzitutto indico con I il punto di intersezione tra il segmento CO e il lato FE. Si noti che gli angoli DCO e EIO sono congruenti in quanto angoli corrispondenti dei segmenti paralleli CD e FE tagliati dalla trasversale CO. Si noti ora che gli angoli DEF e FEO sono congruenti [perche' retti] [[…..]]. Si noti che gli angoli EIO e CIF sono congruenti in quanto opposti al vertice. Possiamo quindi ora affermare che gli angoli EOI e FCI sono congruenti per differenza di angoli nei triangoli CFI e IEO. Inoltre gli angoli FCI e OCD sono complementari tra di loro. Quindi possiamo ora affermare che l'angolo HOG e' congruente agli angoli EIO e DCO. Infatti 180 gradi meno l'angolo COG retto per costruzione danno come risultato 90 gradi, quindi EOC più GOH è congruente a 90 gradi. Ma EOI è congruente a FCI per dim precedente, quindi GOH è congruente al complementare di FCI che è proprio OCD. Quindi possiamo ora affermare l'angolo HGO è congruente all'angolo COD e quindi anche all'angolo FCI, sempre per differenza di angoli (Infatti l'angolo OHG è retto per ipotesi, quindi HGO essendo il complementare di HOG è congruente a COD (angolo GOH congruente a OCD per dim precedente)). Ora si osservi che i lati OC e OG sono congruenti, infatti per ipotesi essi sono raggi della circonferenza di centro O. Quindi possiamo ora affermare che per il secondo criterio di congruenza, i triangoli COD e HOG sono congruenti tra di loro. Infatti si ha:

{

1) Angoli OCD e GOH congruenti per dim precedente.
2) Angoli OGH e COD congruenti per dim precedente.
3) Lati OC e OG congruenti per dim precedente.

}

Quindi, in virtù di ciò, possiamo affermare che il lato CD è congruente al lato OH. Notiamo quindi che il [lato EH del rettangolo EHGF] è formato dalla somma dei lati EO e OH. Tuttavia anche i lati DO e HG sono congruenti per via della congruenza dei due triangoli, e si osservi quindi che il lato HG è formato dalla somma quindi dei lati DE e EO, tuttavia il lato DE è congruente al lato CD perché il quadrilatero CDEF è un quadrato per ipotesi. Quindi possiamo affermare che la somma dei lati EO+OH è congruente alla somma DE+EO. Ma la somma EO+OH è il lato EH e la somma DE+EO è il lato GH. Quindi abbiamo dimostrato che il lato EH è congruente al lato HG, ma per ipotesi il quadrilatero EHGK è un rettangolo, abbiamo però dimostrato che questo rettangolo ha anche tutti i lati congruenti (per le proprietà dei parallelogrammi lati opposti congruenti) ma un rettangolo con i lati congruenti non è più solo un rettangolo ma è un quadrato. Abbiamo quindi dimostrato che il quadrilatero EHGK è un quadrato.

2) Trovo la somma delle aree dei due quadrati

Sappiamo che il raggio della circonferenza misura 2, e le aree dei quadrati si possono calcolare come lato^2 (lato alla seconda). Per trovare la somma delle aree prendo in esame il triangolo rettangolo in D CDO (avrei potuto anche utilizzare il triangolo rettangolo OHG). Osservo che per il teorema di Pitagora vale la relazione: CD^2 + DO^2 = CO^2. Bene. CO^2 so essere 4, in quanto CO è un raggio della circonferenza. CD è un lato del quadrato CDEF, quindi in sostanza CD^2 è la sua area. Abbiamo dimostrato precedentemente che il lato DO è congruente al lato HG, che è un lato del quadrato HGKE. Abbiamo quindi risolto il nostro problema, infatti la somma delle aree dei due quadrati è proprio 4. CD^2(area del quadrato CDEF) + DO^2(congruente a HG^2 e quindi congruente all'area del quadrato EHGK) = CO^2 (so essere per ipotesi uguale a 2^2 e quindi a 4).