FLAT*landia*

Rubrica mensile di problemi di geometria per studenti della Scuola secondaria

Flatlandia – Problema di marzo 2025 - Commento alle soluzioni ricevute

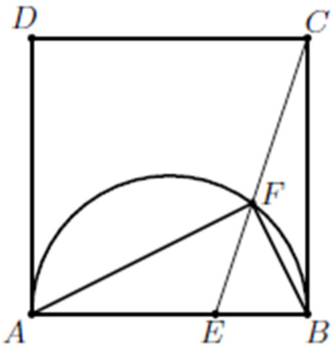
Il testo del problema

Flatlandia - Problema - 3 - 24 marzo 2025

Sia $ABCD$ un quadrato con il lato di misura 3. Dato il punto E sul lato AB, tale che AE misuri 2, costruire una semicirconferenza su AB e congiungere C con E. Sia F il punto di intersezione tra la semicirconferenza e il segmento CE (vedi figura).

a) Trovare il rapporto tra l'area del quadrato e quella del triangolo ABF.

b) Dimostrare che FE è la bisettrice dell'angolo $\widehat{AFB}$.



Commento

Il problema presentava una semicirconferenza inscritta in un quadrato, con il diametro coincidente con un lato del quadrato. Nella semicirconferenza è poi inscritto un triangolo rettangolo, la cui ipotenusa è suddivisa in due segmenti, uno doppio dell'altro. Si chiedeva di determinare il rapporto tra l'area del quadrato e quella del triangolo rettangolo.

Si chiedeva poi di provare che un particolare segmento è la bisettrice dell'angolo retto del triangolo.

Le risposte arrivate sono tutte corrette e utilizzano in gran parte i metodi della geometria analitica. Notiamo comunque che molti passaggi (pur corretti) non sono opportunamente motivati, e risultano quindi esposti sotto forma di una lunga sequenza di calcoli priva di spiegazioni.

Sono arrivate cinque soluzioni, dalle seguenti scuole:
-Liceo Scientifico Statale "Pietro Bottoni", Milano
-IISS "Charles Darwin", Roma
-Liceo Scientifico "Assteas", Buccino (SA)
-Convitto Nazionale "Marco Foscarini", Venezia
-Liceo Scientifico "Galileo Galilei", Trieste

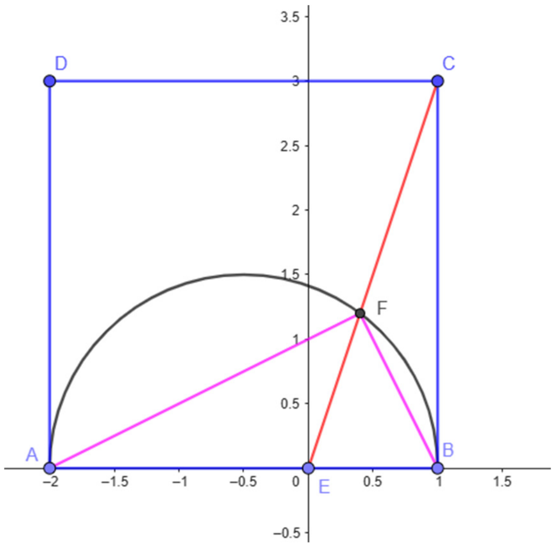
Nota. *Nelle soluzioni riportate, le correzioni, le aggiunte o i commenti sono scritti fra parentesi quadre. Con doppia parentesi quadra vengono indicate le parti omesse.*

Soluzioni arrivate

1)Soluzione svolta da A. EMINI, CLASSE 4C, LICEO SCIENTIFICO STATALE "PIERO BOTTONI", Milano

Soluzione:

Inserisco anzitutto il problema in un idoneo sistema di riferimento cartesiano con origine nel punto E



Il quadrato ha quindi vertici nei punti A(-2 , 0) , B(1, 0) , C(1, 3) e D(-2, 3). La semicirconferenza ha quindi centro in K($-\frac{1}{2}$,0) e raggio R=$\frac{3}{2}$ ed avrà quindi equazione

$$\Gamma: \begin{cases} (y-y_K)^2+(x-x_K)^2=R^2 \ \rightarrow \ y^2+\left(x^2+x+\frac{1}{4}\right)=\frac{9}{4} \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Ovvero Γ: $\begin{cases} y^2+\ x^2+x-2=0 \\ y \geq 0 \end{cases}$

Il segmento EC appartiene a una retta r con coefficiente angolare m=3 [perché?] e passante per l'origine, quindi

$$EC \in r: y=3x$$

Posso quindi trovare le coordinate del punto F intersecando la retta r con la semicirconferenza Γ

$$F : \begin{cases} y^2+\ x^2+x-2=0 \\ y=3x \end{cases}$$

Sostituendo

$$9x^2+x^2+x-2=0 \ \rightarrow 10x^2+x-2=0$$

Che ha soluzione

$$x_1=\frac{2}{5} \ ; \ x_2=-\frac{1}{2}$$

La seconda soluzione non è accettabile in quanto F appartiene al primo quadrante. Quindi il punto F ha coordinate $F\left(\frac{2}{5};\frac{6}{5}\right)$

Calcolo ora le lunghezze dei lati del triangolo

$$\overline{AF} = \sqrt{(x_A - x_F)^2 + (y_A - y_F)^2} = \sqrt{(\frac{2}{5} + 2\,)^{\,2} + (\frac{6}{5} - 0)^{\,2}} = \cdots = \frac{6}{5}\sqrt{5}$$

$$\overline{BF} = \sqrt{(x_B - x_F)^2 + (y_B - y_F)^2} = \sqrt{(1 - \frac{2}{5})^2 + (\frac{6}{5} - 0)^2} = \cdots = \frac{3}{5}\sqrt{5}$$

Da cui calcolo l'area del triangolo ABF

$$A_{ABF} = \frac{1}{2}\,AF\,\cdot BF = \frac{1}{2}\frac{6}{5}\sqrt{5}\cdot\frac{3}{5}\sqrt{5} = \frac{9}{5}$$

Il rapporto cercato tra l'area del quadrato e quella del triangolo è quindi

$$\frac{A_{ABCD}}{A_{ABF}} = \frac{9}{\frac{9}{5}} = 5$$

Il secondo punto chiede di verificare che il segmento EF è bisettrice dell' angolo $A\hat{F}B$. Trattandosi di un triangolo inscritto in una semicirconferenza, l'angolo $A\hat{F}B$ è ovviamente retto, quindi sarà semplicemente sufficiente verificare che uno dei due angoli $A\hat{F}E$ o $E\hat{F}B$ sia un angolo di 45° .

Calcolo anzitutto la lunghezza del segmento FE

$$\overline{EF} = \sqrt{(x_E - x_F)^2 + (y_E - y_F)^2} = \sqrt{(\frac{2}{5}\,)^2 + (\frac{6}{5})^2} = \cdots = \frac{2}{5}\sqrt{10}$$

Applico ora il teorema del coseno al triangolo AFE. Detto α l'angolo $A\hat{F}E$ il teorema asserisce che

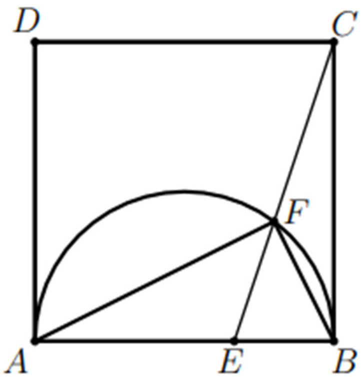
$$\overline{AE}^2 = \overline{AF}^2 + \overline{FE}^2 - 2\,\overline{AF}\cdot\overline{EF}\cos\alpha$$

Da cui ricavo

$$\cos\alpha = \frac{\overline{AF}^2 + \overline{FE}^2 - \overline{AE}^2}{2\,\overline{AF}\cdot\overline{EF}} = \frac{\frac{36}{5} + \frac{8}{5} - 4}{2\,\cdot\frac{6}{5}\sqrt{5}\cdot\frac{2}{5}\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Quindi l'angolo $\alpha = 45°$ come cercato.

2) Soluzione proposta da 小金 E. Jin, Classe 3 DL, IIS "Charles Darwin", Roma



Dati forniti:

Lato=3

AE=2

A) rapporto tra A_{ABCD} e A_{ABF}

B) FE bisettrice angolo in F

Risoluzione:

Inserire in un piano cartesiano i punti

A(0;0)

B(3;0)

C(3;3)

D(0;3)

E(2;0)

Retta passante per punti E , C y=3x-6

[Equazione] [[Formula]] della circonferenza $x^2+y^2-3x=0$

Mettendo a sistema i due possiamo ottenere due punti di intersezione tra cui uno scartato avendo y negativo quindi F(12/5 ; 6/5)

Area triangolo (b *h)/2 = 9/5

Area quadrato $l^2 = 9$

Rapporto tra le aree $A_{ABCD} = 5 * A_{ABF}$

avendo le coordinate di F ci troviamo le rette che passano per FB e FA

r_{FB}: y=-2x+6

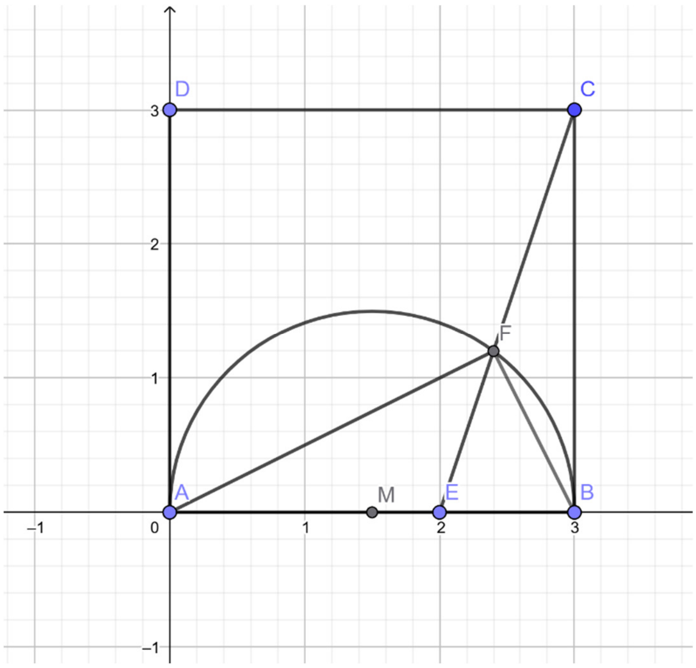
r_{FA}: y=(1/2)x

Usando la formula della bisettrice di due rette

$$\frac{ax+by+c}{\sqrt{a^2+b^2}} = \pm \frac{a'x+b'y+c'}{\sqrt{a'^2+b'^2}}$$

Otteniamo y=3x-6 che è uguale alla retta r_{EC} trovato in precedenza quindi FE è la bisettrice

3) Problema svolto da: F.Dell'Orto, M. Parisi, Classe 4A Liceo Scientifico "Assteas" Buccino (SA)



Dimostrazione:
Fissiamo un sistema di riferimento come quello in alto con

$$A = (0;0), B = (3;0), C = (3;3), D = (0;3), E = (2;0)$$

a) Iniziamo col determinare l'area del quadrato:

$$A_{ABCD} = AB * AD$$
$$A_{ABCD} = 3 * 3 = 9$$

Determinata l'equazione della circonferenza e l'equazione della retta passante per $C = (3{,}3)$ ed $E = (2{,}0)$ e risolvendo il sistema lineare tra esse, possiamo ricavare le coordinate del punto F.

$$M_{AB} = \left(\frac{3+0}{2}; \frac{0+0}{2}\right)$$
$$M_{AB} = \left(\frac{3}{2}; 0\right)$$

$M = \left(\frac{3}{2}; 0\right)$ è il centro della circonferenza, quindi:

$$\begin{cases} -\frac{a}{2} = \frac{3}{2} \\ -\frac{b}{2} = 0 \\ r = \frac{\sqrt{a^2+b^2-4c}}{2} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a = -3 \\ b = 0 \\ \frac{3}{2} = \frac{\sqrt{9+0-4c}}{2} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a = -3 \\ b = 0 \\ \sqrt{9-4c} = 3 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a = -3 \\ b = 0 \\ 9-4c = 9 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a = -3 \\ b = 0 \\ c = 0 \end{cases}$$

L'equazione della circonferenza è: $x^2 + y^2 - 3x = 0$

Troviamo l'equazione della retta passante per $C = (3,3)$ e $E = (2,0)$:

$$\frac{y-3}{0-3} = \frac{x-3}{2-3} \Rightarrow \frac{-y+3}{3} = -x+3 \Rightarrow -\mathrm{y}+3 = -3\mathrm{x}+9 \Rightarrow \mathrm{y} = 3\mathrm{x}-6$$

Risolviamo il seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 3x = 0 \\ y = 3x - 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + (3x-6)^2 - 3x = 0 \\ y = 3x - 6 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x^2 + 9x^2 - 36x + 36 - 3x = 0 \\ y = 3x - 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 10x^2 - 39x + 36 = 0 \\ y = 3x - 6 \end{cases}$$

$10x^2 - 39x + 36 = 0$

$\Delta = 1521 - 4(10)(36) = 1521 - 1440 = 81$

$$x_1 x_2 = \frac{39 \pm 9}{20}$$

$$x_1 = \frac{48}{20} = \frac{12}{5}$$

$$x_2 = \frac{30}{20} = \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ y = 3\left(\frac{3}{2}\right) - 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ y = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

Questa soluzione non è accettabile poiché nel primo quadrante l'ordinata non può essere negativa.

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{12}{5} \\ y = 3\left(\frac{12}{5}\right) - 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{12}{5} \\ y = \frac{6}{5} \end{cases}$$

Il punto F ha coordinate $\mathrm{F} = \left(\frac{12}{5}; \frac{6}{5}\right)$

Determiniamo la distanza di F dalla retta passante per A e B:

$\mathrm{d}(\mathrm{F}, \mathrm{AB}) = \frac{6}{5}$ (altezza del triangolo $\overbrace{AFB}^{\Delta}$)

Calcoliamo l'area del triangolo $\overbrace{AFB}^{\Delta}$:

$$A_{AFB} = \frac{3 * \frac{6}{5}}{2} = \frac{18}{5} * \frac{1}{2} = \frac{9}{5}$$

Possiamo ora calcolare il rapporto tra le due aree:

$$\frac{\mathrm{A_{ABCD}}}{\mathrm{A_{AFB}}} = \frac{9}{\frac{9}{5}} = 5$$

b) L'angolo in F è di 90°, perché un triangolo inscritto in una [semi]circonferenza è sempre un triangolo rettangolo. Quindi se FE è bisettrice dell'angolo $\widehat{AFB}$, l'angolo tra la retta AF e FE sarà di 45°.

Per calcolare l'angolo tra le due rette utilizziamo la formula $\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}$ [che fornisce cosa ?]

- La retta FE ha equazione $y = 3x - 6$ e coefficiente angolare $m_1 = 3$
- La retta AF ha equazione $x - 2y = 0$ e coefficiente angolare $m_2 = \frac{1}{2}$

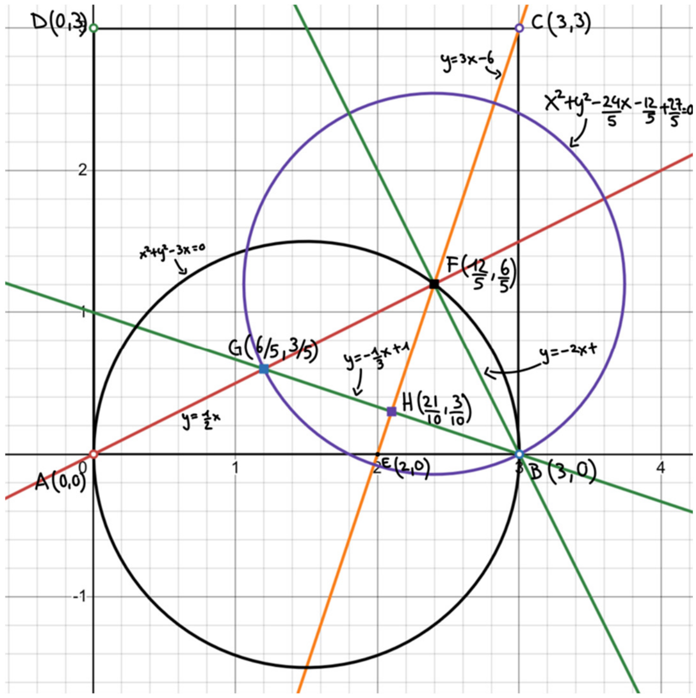
$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{3 - \frac{1}{2}}{1 + 3 * \frac{1}{2}} = \frac{\frac{6-1}{2}}{\frac{2+3}{2}} = \frac{\frac{5}{2}}{\frac{5}{2}} = 1$$ [α e β non si dice che angoli sono ?]

$$\tan^{-1} 1 = 45°$$

È così dimostrato che FE è bisettrice dell'angolo $\widehat{AFB}$.

4)D. Jesu Classe 4BE, Liceo Europeo, Convitto Nazionale "Marco Foscarini" Venezia

I CALCOLI SEGUONO L'ORDINE DEGLI ELEMENTI ELENCATI SOTTO



$$\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+(y-0)^2=\left(\frac{3}{2}\right)^2$$

$$\left(x-\frac{12}{5}\right)^2+\left(y-\frac{6}{5}\right)^2=\left(\frac{3}{\sqrt{5}}\right)^2$$

$$m=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A} \longrightarrow$$ ricavato il coefficiente angolare si sostituisce un punto della retta

RETTA $\overline{EC}$ $= \dfrac{3-0}{3-2}=\dfrac{3}{1}$

RETTA $\overline{AF}$ $= \dfrac{\frac{6}{5}-0}{\frac{12}{5}-0}=\dfrac{1}{2}$

RETTA $\overline{GB}$ $= \dfrac{\frac{3}{5}-0}{\frac{6}{5}-3}=-\dfrac{1}{3}$

RETTA $\overline{BF}$ $= \dfrac{\frac{6}{5}-0}{\frac{12}{5}-3}=-2$

$$F=\begin{cases} y=3x-6 \\ x^2+y^2-3x=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{6}{5}=3x-6 \\ y=\frac{6}{5} \end{cases} \qquad \begin{cases} x=\frac{12}{5} \\ y=\frac{6}{5} \end{cases}$$

$$G=\begin{cases} y=\frac{1}{2}x \\ x^2+y^2-\frac{12}{5}y-\frac{24}{5}x+\frac{27}{5}=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y=\frac{1}{2}\cdot\frac{6}{5} \\ x=\frac{6}{5} \end{cases} \qquad \begin{cases} y=\frac{3}{5} \\ x=\frac{6}{5} \end{cases}$$

H= si può calcolare in 2 modi

$$\text{I}^\circ \begin{cases} y=-\frac{1}{3}x+1 \\ y=3x-6 \end{cases} \qquad \begin{cases} x=\frac{21}{10} \\ y=3\cdot\frac{21}{10}-6 \end{cases} \qquad \begin{cases} x=\frac{21}{10} \\ y=\frac{3}{10} \end{cases}$$

$$\text{II}^\circ \quad M=\left(\frac{x_A+x_B}{2},\frac{y_A+y_B}{2}\right) \longrightarrow \left(\frac{6/5+3}{2},\frac{3/5+0}{2}\right)=\left(\frac{21}{10},\frac{3}{10}\right)$$

distanza $FB=\sqrt{\left(\frac{12}{5}-3\right)^2+\left(\frac{6}{5}\right)^2}=\sqrt{\frac{45}{25}}=\frac{3}{\sqrt{5}}$

h TRIANGOLO AFB è uguale a y_B di F che è $\frac{6}{5}$

Calcoli:
Circonferenza: $X^2 + y^2 - 3x = 0$
Circonferenza: $X^2 + y^2 - \frac{24}{5}x - \frac{12}{5}y + \frac{27}{5} = 0$
Retta EC: $y=3x-6$
Retta AF: $y=\frac{1}{2}x$
Retta GB: $y = -\frac{1}{3}x + 1$
Retta BF: $y=-2x+6$
F $(\frac{12}{5}, \frac{6}{5})$:
G $(\frac{6}{5}, \frac{3}{5})$
H $(\frac{21}{10}, \frac{3}{10})$
Distanza FB: $3/\sqrt{5}$
Altezza triangolo AFB: $\frac{6}{5}$
[Commento: non è stata data alcuna spiegazione]

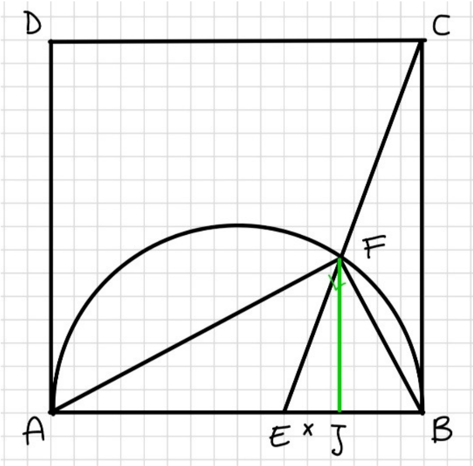
RISPOSTA A

Area quadrato è 9
Area triangolo è $\frac{b \bullet h}{2}$, sostituendo $\left(3 \bullet \frac{6}{5}\right) \bullet \frac{1}{2}$ si ottiene $\frac{9}{5}$
Il rapporto tra l'area del triangolo e quella del quadrato è $\frac{\frac{9}{9}}{5}$ cioè $\frac{1}{5}$

RISPOSTA B

Il punto H è sia il punto medio tra G e B, sia l'intersezione tra la retta $y=3x-6$ e la retta $y=-\frac{1}{3}x + 1$. Bisogna anche dire che il triangolo GBF è per costruzione isoscele il cui angolo GFB corrisponde, anch'esso per costruzione, all'angolo AFB. È necessario anche ricordare il fatto per il quale la mediana dell'angolo opposto alla base in un triangolo isoscele è anche la bisettrice del medesimo angolo. Un altro elemento chiave per la dimostrazione, anche se banale, è essere a conoscenza del fatto che il segmento FH ha la stessa angolazione di quello FE, poiché fanno parte della stessa retta. Da tutto ciò si evince la seguente affermazione: il segmento FE è la bisettrice dell'angolo AFB, proprio perché si interseca con il punto medio della base del triangolo isoscele GBF.

5) G. Pipan, 2^ A, Liceo Scientifico “Galileo Galilei”, Trieste



IPOTESI: AB=BC=DC=DA=3   AE=2 EB=1 EJ=X   Angolo AFB=90°

DIMOSTRAZIONE:

1) Costruzione: costruisco l’altezza FJ del triangolo ABF e chiamo EJ=X
2) Confronto il triangolo EBC ed il triangolo EFJ

   -L’angolo FJE è congruente all’angolo CBE perché sono entrambi angoli retti

   -L’angolo EFJ è congruente all’angolo ECB perché angoli corrispondenti tra le rette parallele CB e FJ tagliate dalla trasversale CE

   } Triangoli simili per il primo criterio di similitudine

   ⇨ CB:EB=FJ:X=3:1

   ⇨ FJ=3X
3) Osservazione: [questi sono calcoli senza spiegazioni!]

   Per il teorema di Pitagora:

   (FJ)^2=(FB)^2 – (1-X)^2

   (AF)^2 + (FB)^2= 3^2

   (AF)^2=(2+X)^2 + (FJ)^2

   ⇨ (2+X)^2+(FJ)^2+(1-X)^2+(FJ)^2 -9 =0

   ⇨ (2+X)^2+ 18X^2 + (1-X)^2 -9 =0

   ⇨ 4+4X+X^2+18X^2+1-2X+X^2-9=0

   ⇨ 20X^2+ 2X -4 =0

   ⇨ Utilizzando la formula: x= (-1+√81)/20 = 2/5 = 0,4

   Quindi [[FJ:0,4=3:1]]   FJ=[[0,4*3]]=[3x=1,2]

   Area ABF= (1,2*3)/2 = 1,8   Area ABCD = 3^2=9

   Rapporto tra le aree= 9/1,8= 5

Dimostrazione bisettrice

FJ=1,2   EJ=0,4   JB=0,6

Angolo EFJ= arctang (EJ/FJ) =[arctg 1/3] [[18,5°]]

Angolo JFB= arctang (JB/FJ) =[arctg 1/2] [[6,5°]]

[Con la formula di addizione della tangente si trova poi che l'angolo AFB è di 45 gradi.] [[18,5°+26,5°=45° che è la metà di 90°]]

FE è la bisettrice dell'angolo AFB come volevasi dimostrare.