FLAT*landia*

Rubrica mensile di problemi di geometria per studenti della Scuola secondaria

Flatlandia – Problema di novembre 2024 - Commento alla soluzione ricevuta

Il testo del problema

Flatlandia - Problema 4 - 25 novembre 2024

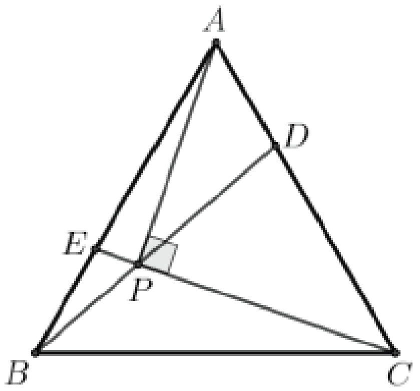
Sia ABC un triangolo equilatero. Sono dati il punto D sul lato AC e il punto E sul lato AB (vedi figura) tali che

$$AD : DC = BE : EA = 1 : 2.$$

Indicato con P il punto di intersezione di BD e CE, dimostrare che:

a) il quadrilatero $AEPD$ è ciclico (ossia, si può inscrivere in una circonferenza);

b) l'angolo $A\widehat{P}C$ è retto.



Commento

Il problema poneva un quesito relativo a un triangolo equilatero in cui erano disegnate due particolari ceviane. Occorreva dimostrare che, nel loro punto di intersezione, veniva a formarsi un angolo retto, se congiunto con un vertice del triangolo equilatero.

Il quesito si è rivelato particolarmente difficile ed è arrivata una sola risposta, da una classe III di liceo classico. La risposta arrivata è corretta e ben motivata in entrambe le parti del problema.

Abbiamo ricevuto una sola risposta da uno studente della seguente scuola:

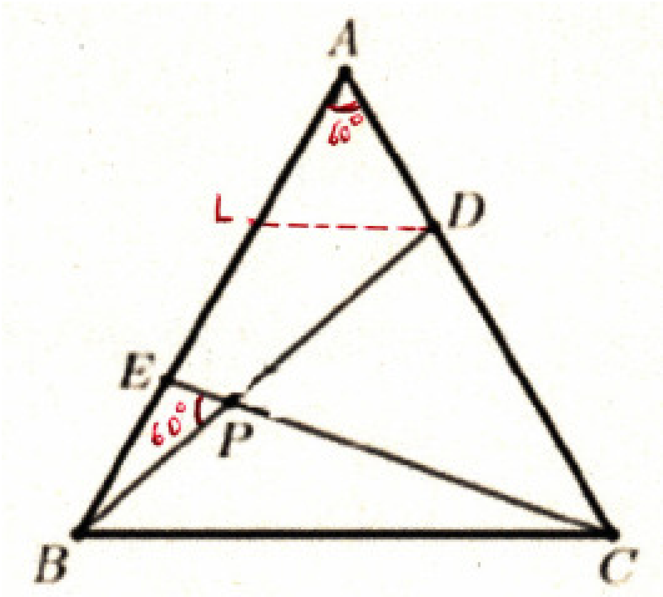
- Liceo Classico "Don Mazza", Verona

Nota. *Nelle soluzioni riportate, le correzioni, le aggiunte o i commenti sono scritti fra parentesi quadre. Con doppia parentesi quadra vengono indicate le parti omesse.*

Soluzione arrivata

Soluzione inviata da: Ettore Costa, Terzo anno Liceo Classico "Don Mazza", Verona

FLATLANDIA - PROBLEMA DI NOVEMBRE 2024



Il triangolo ABC è equilatero: ha tutti i lati uguali e tutti gli angoli di 60°.

Indicherò gli angoli racchiudendo i vertici in parentesi rotonde.

I triangoli BEC e BAD sono uguali per il primo criterio di uguaglianza:

DA = BE = $\frac{1}{3}$ BA; BA = BC; (BAD) = (CBE) = 60°.

Il triangolo BEP è simile al triangolo BDA: essi hanno tutti gli angoli uguali.

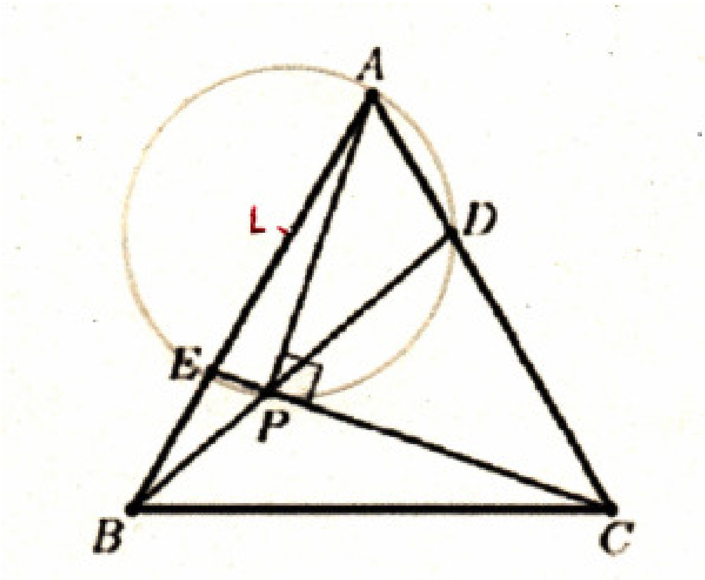
Infatti (EBP) è in comune; (BEP) = (BEC) = (BDA); di conseguenza (BPE) = (BAD) = 60°.

L' angolo (EPD), adiacente a (BPE), è quindi ampio 120°.

Nel quadrilatero EPDA gli angoli opposti (EPD) = 120° e (DAE) = 60° sono supplementari:

il quadrilatero EPDA ha gli angoli opposti a due a due supplementari, perché la somma degli angoli interni di un quadrilatero convesso è 360°. EPDA è CICLICO (= inscrittibile).

.



Poiché BE = $\frac{1}{3}$ BA, fisso il punto L tale che BE = EL = LA.

Congiungo L con D: il triangolo LAD è isoscele perché LA = AD, ma è anche equilatero perché (LAD) = 60°: quindi LD = LA = EL.

Con centro in L e raggio LA, traccio [corrige: la circonferenza] [[errata: una circonferenza]] di diametro EA.

Essa passa per i punti A, D, P, E, vertici del quadrilatero inscrittibile.

Il triangolo EAP, la cui base è il diametro EA, è inscritto in una semicirconferenza ed è perciò un triangolo RETTANGOLO nell' angolo (EPA): l' angolo (APC), adiacente, è quindi retto.