

INDICAZIONI PER LA SCELTA DI UN POSSIBILE PERCORSO DIDATTICO DI MATEMATICA PER IL PRIMO BIENNIO DI UNA SCUOLA SECONDARIA DI SECONDO GRADO (Scuole secondarie di II grado con 4 o 5 ore settimanali di Matematica - ottobre 2012)

OSSERVAZIONI GENERALI

Questo documento è stato elaborato da un gruppo di lavoro UMI-CIIM coordinato dal Prof. Ercole Castagnola costituito dai seguenti docenti:

Accomazzo Pierangela

Ajello Marilina

Baruzzo Gianpaolo

Beltramino Silvia

Cappuccio Sebastiano

Chimetto Maria Angela

Garuti Rossella

Manara Raffaella

Ranzani Paola

Ruganti Riccardo

Tomasi Luigi

Zocante Sergio

Il gruppo ha lavorato su mandato (in data 10 gennaio 2011) della CIIM (Commissione Italiana per l’Insegnamento della Matematica, commissione permanente dell’UMI) per dare risposta a una precisa richiesta, da parte di molti docenti del biennio di Scuola Secondaria, di avere indicazioni più dettagliate e precise sui percorsi didattici da programmare e realizzare all’interno delle proprie classi.

Le linee guida date dalla CIIM, su cui il gruppo ha lavorato, possono essere sintetizzate tramite le voci seguenti:

- Coerenza con le *Indicazioni nazionali* e la normativa in vigore sull’obbligo scolastico.
- Continuità con le attuali *Indicazioni nazionali* per la Scuola del Primo Ciclo.
- Flessibilità delle proposte didattiche per un facile adattamento a ogni corso di Studi Superiori.
- Materiali scelti prevalentemente tra quelli disponibili in rete di sicura affidabilità e già sperimentati.
- Esempi e indicazioni per un uso consapevole dello strumento informatico.
- Modalità per la realizzazione di momenti di *Didattica laboratoriale*.
- Esempi di prove di verifica.
- Particolare attenzione alle “novità” delle *Indicazioni* relative agli ambiti “Geometria” e “Dati e previsioni”.

- Indicazioni su pratiche didattiche da evitare.

Il gruppo ha lavorato su due fronti, producendo un documento dal titolo “Un esempio di percorso di matematica per il primo biennio di una Scuola Secondaria di Secondo Grado con una disponibilità oraria di tre ore settimanali” già in fase di divulgazione e completando il mandato della CIIM con una serie di elaborati che compongono il presente documento.

Tra i contenuti dei curricula di matematica, secondo quanto previsto dalle *Indicazioni nazionali per i “nuovi licei”* e dalle *Linee guida per i “nuovi tecnici e professionali”*, la Geometria si presta in modo particolare a sperimentare il forte legame tra osservazione della realtà e formazione dei concetti. Guardare e far guardare intorno a sé è il primo atteggiamento da coltivare nei giovani, per abituare a raccogliere da ciò che si tocca e si vede quella ricchezza di configurazioni e di relazioni che la geometria si occupa di far comprendere in modo consapevole e coerente, portando a formare una visione spaziale e ad astrarre le idee che sono utili a descrivere in modo razionale lo spazio in cui siamo immersi e viviamo. Se si evita una presentazione troppo formale e astratta, che taglia precocemente il flusso di sollecitazioni che proviene alla mente dalla realtà stessa, si può constatare che non solo la Geometria non è “difficile”, ma risulta particolarmente gradita ai giovani. Nel primo biennio essa può essere accostata gradualmente, senza imporre simbolizzazioni rigide e senza pretendere linguaggi artificiali, facendo appello prevalentemente all’esperienza. Con questa parola non si intende semplicemente il ricorso ad attività di manipolazione concreta, che sono anche utili e positive, ma forse più necessarie nell’apprendimento ai livelli della Primaria e della Secondaria di Primo Grado. Piuttosto, l’esperienza è “fare ragionando”, l’agire della persona in modo consapevole e critico, progettando i procedimenti di esplorazione, costruzione e risoluzione che si intraprendono, e sottoponendoli poi a riflessione, discussione, analisi critica e verifica. Dunque, attraverso l’esperienza si possono condurre i giovani a passare dal livello intuitivo a quello razionale argomentativo, in cui congetture, verifiche e dimostrazioni trovano la giusta collocazione. Trascurare la Geometria, dando prevalenza ad ambiti ritenuti più semplici, forse solo perché li si riduce ad acquisizioni piuttosto formali e ripetitive, significa privare i ragazzi di uno strumento importante per decifrare la struttura della realtà fisica, e per descriverla. È meglio allora accettare di trattare meno argomenti, ma aiutare i ragazzi a percorrerli attivamente, sempre alla ricerca del significato, affinché si rendano disponibili non solo a seguire e applicare regole, ma a mettersi in azione con iniziativa e creatività. Nell’apprendimento della geometria nel primo biennio va costruito con gradualità il ragionamento deduttivo lavorando in modo progressivo a partire dalle relazioni che legano oggetti ed enunciati con cui gli studenti hanno familiarizzato nell’esperienza scolastica precedente. L’articolazione in “fasi” proposta nel percorso vuole sottolineare come la successione dei contenuti debba essere accompagnata anche da un progredire metodologico verso una sistemazione via via più razionale e coerente, la cui completezza rimane comunque un obiettivo di lungo periodo. Alcuni contenuti quali le isometrie, per esempio, possono anche essere affrontati in momenti diversi da quelli indicati, ma in questo caso l’approccio metodologico deve essere ricordato con le competenze raggiunte dagli studenti.

Anche l’ambito “Dati e previsioni” viene spesso trascurato addirittura al momento della stesura della programmazione didattica da parte dell’insegnante. Per questo motivo, in questo contesto, si è voluto sottolineare la possibilità di lavorare con dati statistici e previsioni di tipo probabilistico in collegamento con gli altri ambiti. Si è scelto di esplicitare i collegamenti con gli altri ambiti in forma tabellare perché risulti evidente come la trattazione di un argomento relativo all’ambito “Dati e previsioni” utilizzi od offra lo spunto per affrontare anche tematiche legate ad altri ambiti disciplinari attraverso uno strumento concettuale comune. In tal modo l’insegnante ha la possibilità di cogliere dove gli ambiti sono collegati tra loro, che lo studio di alcune tematiche non sono compartimenti stagni e che vi è la possibilità di utilizzare lo stesso strumento concettuale per affrontare problematiche diverse offrendo la possibilità di agevolarne l’insegnamento-apprendimento.

Nella declinazione delle “Competenze” (la terza colonna nella rappresentazione in tabella del percorso) esiste una leggera differenza tra le scelte fatte a proposito di “Aritmetica e algebra” e “Relazioni e funzioni” e gli altri due ambiti. Infatti, ritenendo l’insegnante più a suo agio con gli ambiti “Aritmetica e

algebra” e “Relazioni e funzioni”, il gruppo di lavoro ha utilizzato nella colonna “Competenze” solo le quattro voci degli *Assi culturali* (documento ministeriale agosto 2007). Per gli ambiti “Geometria” e “Dati e previsioni”, secondo quanto precedentemente sottolineato, si è ritenuto opportuno dare un ulteriore contributo alla costruzione del curriculum. Per questo motivo sono state utilizzate, nella terza colonna delle due tabelle, con la stessa intestazione “Competenze”, oltre a quelle degli *Assi culturali*, anche altre voci provenienti dal Quadro di riferimento dell’INVALSI o scelte dal gruppo di lavoro per esplicitare ulteriormente le voci degli *Assi culturali*.

Per quanto riguarda le conoscenze e le abilità declinate nelle tabelle, il gruppo di lavoro ha scelto di utilizzare, senza modificare in alcun modo i contenuti presenti nei documenti ufficiali del MPI, delle descrizioni più esplicite dettate dalle buone pratiche didattiche di questi ultimi anni.

Nella colonna “Conoscenze” sono esplicitati anche i collegamenti fra i diversi ambiti. Per i primi tre ambiti i collegamenti sono evidenziati da una freccia, mentre per “Dati e previsioni”, come già detto, si è preferito utilizzare un’apposita tabella.

Nella quarta colonna delle tabelle di ogni ambito denominata “Attività” sono state indicate numerose proposte didattiche da svolgere in classe che esemplificano soprattutto una metodologia di lavoro tipica della *Didattica laboratoriale*.

Nel presente lavoro il gruppo ha scelto di indicare quattro percorsi biennali relativi ai quattro ambiti e non una scansione “primo anno – secondo anno”. Tale scelta nasce da una convinzione sulla necessità di dover tornare spesso su argomenti già trattati (anche in un anno scolastico diverso) e di dare quindi la possibilità a un insegnante di avere a disposizione una scelta di percorsi più articolata. L’esperienza insegna che occorre anche prestare attenzione alla “manutenzione” degli argomenti già affrontati,.

Nell’altro documento già diffuso, che contiene un esempio di possibile programmazione su conoscenze e competenze essenziali, valido per tutti i tipi di Istituti ma in particolare per quelli che hanno solo tre ore settimanali di matematica, si ha invece la scansione annuale degli argomenti.

Pratiche didattiche da evitare:

- Pretendere fin dall’inizio del primo anno precisione e rigore nel linguaggio: l’acquisizione del linguaggio specifico della matematica è una conquista graduale.
- Assegnare grandi quantità di esercizi ripetitivi che risultano inutili anche in una fase di allenamento: è meglio abbondare con i problemi e la loro formalizzazione (difficoltà maggiore rispetto all’esecuzione dei calcoli).
- Introdurre definizioni precoci, ovvero va evitato di definire oggetti matematici di cui non si possiede ancora una conoscenza adeguata (la definizione è un punto d’arrivo, non di partenza).
- Mantenere compartimenti stagni tra gli ambiti di contenuto.
- Utilizzare il termine “dimostrazione” se prima non si è dato un certo rilievo (e il giusto significato) all’attività del dimostrare in matematica, passando attraverso l’argomentazione e la produzione di congetture. Si può usare il termine “giustificare” in una fase in cui può essere ancora prematuro parlare di “dimostrare” e far invece bene attenzione al significato di “verificare”.
- Assegnare problemi inutilmente artificiosi o finto-reali (che difficilmente si possono incontrare nella realtà).
- Introdurre un nuovo argomento senza tenere conto di quel che gli allievi già conoscono dalla Scuola Primaria e dalla Scuola Secondaria di Primo Grado.

Di seguito riportiamo i percorsi relativi ai quattro ambiti.

Avvertenza: nei percorsi che seguono si fa spesso riferimento a materiali presenti in diversi siti Web; in assenza di indicazioni esplicite, per il relativo sito si rinvia al file “Bibliografia Materiali Sitografia Gruppo UMI-CIIM”.

PERCORSO DI ARITMETICA E ALGEBRA

Premessa

Dalle *Indicazioni Nazionali*: “Il primo biennio sarà dedicato al passaggio dal calcolo aritmetico a quello algebrico” e, più avanti: “Lo studente acquisirà la capacità di eseguire calcoli con le espressioni letterali sia per rappresentare un problema (mediante un’equazione, disequazioni o sistemi) e risolverlo, sia per dimostrare risultati generali, in particolare in aritmetica”. Ciò suggerisce che l’uso delle lettere non debba ridursi al solito calcolo algebrico, ma anzi lo preceda, e serva a *esprimere proprietà* dei numeri e a *rappresentare adeguatamente congetture* sui numeri, fornendo anche, quando possibile, la relativa dimostrazione. In quest’ottica, il calcolo algebrico va *integrato* al calcolo numerico, di cui è il naturale sviluppo.

Questo è quanto propone il percorso presentato: l’utilizzo delle lettere *precede* l’usuale calcolo algebrico ed è inizialmente finalizzato a generalizzare proprietà numeriche, a esprimerle in modo adeguato, a dimostrarle. Solo in un secondo tempo si passerà allo studio esplicito delle tecniche di calcolo.

Questo consentirà di consolidare gradualmente nel tempo la competenza nel calcolo numerico e di giungere a una competenza algebrica adeguata nell’arco del primo biennio.

Proprio per una forte aderenza alle strutture numeriche si suggerisce, come indicato da Giovanni Prodi, di introdurre i polinomi a partire da formule atomiche e poi le operazioni di somma e moltiplicazione. In un secondo momento i polinomi potranno essere considerati come funzioni.

È importante mantenere forte, soprattutto nelle prime manipolazioni algebriche, il *significato* delle formule e far capire all’allievo che il calcolo algebrico non è fine a se stesso. Nell’affrontare le tecniche di calcolo algebrico sarà opportuno individuare il giusto equilibrio fra la ricerca del valore semantico (il ‘senso’ di una formula in un certo contesto) e l’abilità sintattica (cioè di calcolo formale) che è in parte legata all’addestramento. Gli esercizi dovranno essere scelti per la loro valenza operativa e non dovranno costituire compito *eccessivamente* ripetitivo; per fare un esempio, gli esercizi di sviluppo possono essere alternati con gli esercizi di fattorizzazione, per favorire quella ‘reversibilità’ indispensabile per una completa comprensione.

Notiamo qui come, nelle *Indicazioni*, ripetutamente si avverta di non eccedere in tecnicismi manipolatori.

Infine, facciamo notare che la parte relativa ai vettori e alle matrici è di pertinenza del liceo scientifico nella sua interezza [e pertanto va letto come un approfondimento], mentre gli altri indirizzi ne fanno un uso limitato alle operazioni tra vettori e al prodotto scalare, nel secondo biennio.

Molte delle attività proposte per conseguire le conoscenze e le competenze dell’ambito “Aritmetica e algebra”, esplicitate nelle *Indicazioni Nazionali* e nelle *Linee guida*, sono state scelte perché sono naturalmente correlate con conoscenze e competenze caratteristiche degli altri ambiti. Ciò suggerisce l’opportunità di rendere gli stessi studenti consapevoli delle molte connessioni tra i diversi argomenti della matematica: solo la presenza e l’individuazione di intersezioni forti e ampie consentiranno di realizzare effettivamente gli obiettivi delle *Indicazioni* e delle *Linee guida*.

Alcuni esempi: la prima attività, “Il senso del numero”, suggerisce che gli ordini di grandezza, le stime numeriche, le percentuali, l’uso dei numeri per misurare, contare, ordinare, ossia tutte quelle conoscenze e attività che contribuiscono a formare negli studenti una buona sensibilità numerica, possano essere conseguite, consolidate e rafforzate trattando argomenti legati all’elaborazione dei dati e, più in particolare, alla statistica descrittiva.

Il MCD e il mcm, il cui calcolo è già noto agli studenti dalla Scuola Secondaria di Primo Grado, possono essere visti come funzioni a due variabili; anche i polinomi possono essere interpretati come funzioni, limitandosi, inizialmente, a polinomi in una variabile (la presenza di più lettere può essere introdotta in seguito e con parsimonia, considerando dapprima una di esse variabile e le altre parametri).

Allo stesso modo, equazioni e disequazioni possono essere viste come tecniche per determinare zeri e segno di funzioni (ovviamente limitandosi, nel biennio, a quelle lineari e quadratiche).

Un percorso di questo tipo ha il pregio di evidenziare legami strettissimi con gli ambiti “Dati e previsioni” e “Relazioni e funzioni” (ma anche con “Geometria”, quando il contesto dei problemi sarà geometrico) e di individuare in particolare, in questi tre ambiti, due concetti unificanti: quello di “dato” e di “funzione”.

Conoscenze	Abilità	Competenze	Attività
<p><i>Numeri naturali</i></p> <p>Multipli e divisori; numeri primi e scomposizione in fattori. MCD e mcm.</p> <p>Operazioni con i numeri naturali; algoritmi di calcolo ➔ “Dati e previsioni”, calcolo combinatorio</p> <p>La divisione con resto. MCD mediante l'algoritmo di Euclide.</p> <p>Sequenze di operazioni.</p> <p>Proprietà delle operazioni e calcolo mentale. Variabili per generalizzare e per dimostrare: prime formule. Semplici manipolazioni basate sulle proprietà delle operazioni.</p>	<p>Utilizzare le procedure del calcolo aritmetico (a mente, per iscritto, con strumenti di calcolo) per calcolare espressioni aritmetiche e risolvere problemi. Operare con i numeri naturali e valutare l'ordine di grandezza dei risultati. Utilizzare correttamente il concetto di approssimazione. Determinare multipli e divisori di un numero intero e multipli e divisori comuni a più numeri. Conoscere il significato delle operazioni e saper padroneggiare algoritmi operativi. Dare un senso alle operazioni in contesti differenti e insiemi numerici diversi. Usare consapevolmente le parentesi in una sequenza di calcolo. Data un'espressione numerica scrivere un grafo di calcolo ad essa equivalente e viceversa. Padroneggiare l'uso della lettera come simbolo e come variabile. Scoprire regolarità in sequenze di dati o in situazioni osservate e</p>	<p>Utilizzare le tecniche e le procedure del calcolo aritmetico ed algebrico rappresentandole anche sotto forma grafica</p> <p>Analizzare dati e interpretarli sviluppando deduzioni e ragionamenti sugli stessi anche con l'ausilio di rappresentazioni grafiche, usando consapevolmente gli strumenti di calcolo e le potenzialità offerte da applicazioni specifiche di tipo informatico</p>	<p>1A – Il senso del numero (in allegato) <i>Esercizi preliminari sul senso del numero e sull'utilizzo di numeri nella vita quotidiana</i></p> <p>2A – Diverse scritture per un numero (in allegato “Algebra Ciocco”, file “PDAR01.doc”) <i>L'attività prevede di leggere un numero sotto diversi aspetti: doppio di..., successivo di..., ecc</i></p> <p>3A - Numeri primi conosciuti e sconosciuti (m@t.abel) <i>Individuare multipli e divisori di un numero naturale e multipli e divisori comuni a più numeri; scomporre i numeri naturali in fattori primi e conoscere l'utilità di tale scomposizione per diversi fini; utilizzare la notazione usuale per le potenze con esponente intero positivo consapevoli del significato. Utilizzare la scomposizione in fattori per sveltire le operazioni a mente. Uso delle proprietà delle operazioni</i></p> <p>4A – Sciogliamo i nodi (Matematica 2003) <i>Da un'espressione numerica al grafo di calcolo e viceversa</i></p> <p>5A – Scritture simboliche e figure geometriche (IPRASE Scheda “Ricaviamo tante figure”) <i>Semplici scritture simboliche e figure geometriche: schede di lavoro e indicazioni didattiche proposte da un gruppo di insegnanti</i></p>

	<p>utilizzare linguaggi simbolici per descrivere le regolarità individuate.</p> <p>Verificare congetture in casi particolari con la consapevolezza della distinzione tra verifica e dimostrazione.</p> <p>Confutare congetture mediante contro esempi.</p> <p>Dimostrare congetture facendo ricorso al linguaggio dell'algebra.</p> <p>Elaborare e gestire semplici calcoli attraverso un foglio elettronico.</p>		<p><i>nell'ambito del Centro Territoriale per la Didattica della Matematica di Trento</i></p> <p>6A - Costruzione di formule (in allegato "Algebra Ciocco", file "PDAR04.doc")</p> <p><i>Sfruttando l'abilità degli allievi a riconoscere situazioni di regolarità e strutture simili in forme diverse, si propongono alcuni problemi basati su sequenze numeriche regolari.</i></p> <p>7A – Formule, problemi e foglio elettronico (in allegato, file "Pari_dispari.doc")</p> <p><i>Assegnare un nome in Algebra; il Foglio elettronico come strumento di mediazione. Schede di lavoro e indicazioni didattiche. Ancora dal gruppo di insegnanti nell'ambito del Centro Territoriale per la Didattica della Matematica di Trento</i></p> <p>8A - Parli il matematiche? (m@t.abel)</p> <p>a. <i>Eeguire addizioni, sottrazioni, moltiplicazioni, divisioni e confronti tra i numeri conosciuti (numeri naturali, numeri interi, frazioni e numeri decimali), quando possibile a mente oppure utilizzando gli usuali algoritmi scritti, le calcolatrici e i fogli di calcolo e valutando quale strumento può essere più opportuno, a seconda della situazione e degli obiettivi.</i></p> <p>b. <i>Descrivere con un'espressione numerica la sequenza di operazioni che fornisce la soluzione di un problema.</i></p> <p>c. <i>Eeguire semplici espressioni di calcolo con i numeri conosciuti, essendo consapevoli del significato delle parentesi e delle convenzioni sulla precedenza delle operazioni</i></p>
--	---	--	---

			d. <i>Costruire interpretare e trasformare formule che contengono lettere per esprimere in forma generale relazioni e proprietà</i>
<p>Numeri interi</p> <p>Ordinamento.</p> <p>Operazioni con interi.</p> <p>Proprietà delle operazioni.</p>	<p>Utilizzare le procedure del calcolo aritmetico (a mente, per iscritto, con strumenti di calcolo) per calcolare espressioni aritmetiche e risolvere problemi. Distinguere il segno del numero dal segno di operazione. Rappresentare sulla retta numerica numeri interi, confrontarli e ordinarli. Formalizzare il percorso di soluzione di un problema attraverso modelli algebrici e grafici. Comprendere l'uso strumentale dei numeri interi nel processo di modellizzazione.</p>	<p>Utilizzare le tecniche e le procedure del calcolo aritmetico e algebrico rappresentandole anche sotto forma grafica</p> <p>Analizzare dati e interpretarli sviluppando deduzioni e ragionamenti sugli stessi anche con l'ausilio di rappresentazioni grafiche, usando consapevolmente gli strumenti di calcolo e le potenzialità offerte da applicazioni specifiche di tipo informatico</p>	<p>1B – Ordinamento di interi (in allegato) <i>Proposte di semplici esercizi sull'ordinamento di interi</i></p> <p>2B Operare con i numeri interi (in allegato, file "lumaca_gelsomina.doc") <i>Esercizi con i numeri tratti da alcune gare nazionali e internazionali di matematica</i></p> <p>3B – Le quattro operazioni (Ma.Co.Sa.) <i>Numeri con segno: teoria ed esercizi (interessanti, da scegliere fra un'ampia gamma di proposte).</i></p>
<p>Numeri razionali</p> <p>Frazioni equivalenti e numeri razionali.</p> <p>Scrittura decimale dei razionali: numeri decimali finiti, numeri periodici, approssimazioni → "Dati e previsioni" probabilità come frequenza.</p>	<p>Utilizzare le procedure del calcolo aritmetico (a mente, per iscritto, con strumenti di calcolo) per calcolare espressioni aritmetiche e risolvere problemi. Operare con i numeri razionali e valutare l'ordine di grandezza dei risultati. Comprendere il significato logico operativo di numeri appartenenti a diversi insiemi</p>	<p>Utilizzare le tecniche e le procedure del calcolo aritmetico ed algebrico rappresentandole anche sotto forma grafica</p> <p>Analizzare dati e interpretarli sviluppando deduzioni e ragionamenti sugli stessi anche con l'ausilio di rappresentazioni grafiche, usando consapevolmente gli strumenti di calcolo e le potenzialità offerte da</p>	<p>1C - Frazioni in movimento (m@t.abel) <i>Frazione come rapporto e come quoziente di numeri interi; frazioni equivalenti. Confrontare numeri razionali e rappresentarli sulla retta numerica</i></p> <p>2C - Proprietà dei numeri razionali (m@t.abel) <i>Partendo da una costruzione geometrica, si lavora sulla sistemazione dei razionali sulla retta per aiutare gli studenti a formarsi l'idea della densità dell'insieme \mathbb{Q}</i></p> <p>3C - Dalla frazione al numero decimale.</p>

<p>Ordinamento: disposizione di razionali sulla retta numerica. Confronto fra numeri razionali. Densità dell'insieme \mathbf{Q} dei numeri razionali.</p> <p>Operazioni fra razionali. Proprietà delle operazioni.</p>	<p>numerici. Utilizzare le diverse notazioni e saper convertire dall'una all'altra (da frazioni a decimali, da frazioni apparenti ad interi, da percentuali a frazioni).</p> <p>Riconoscere frazioni equivalenti. Confrontare numeri razionali; individuare la posizione corretta di razionali sulla retta numerica; saper individuare e descrivere intervalli numerici.</p> <p>Risolvere problemi e modellizzare situazioni in campi di esperienza diversi.</p>	<p>applicazioni specifiche di tipo informatico</p>	<p>Esploriamo (m@t.abel) <i>Riconoscere e usare correttamente diverse rappresentazioni dei numeri. Utilizzare in modo consapevole strumenti di calcolo automatico.</i></p> <p>4C – Proprietà delle operazioni e calcolo mentale (in allegato “Algebra Ciocco”, file “PDAR06.doc”) <i>Calcolo mentale con le proprietà delle operazioni, disposizione di numeri sulla retta numerica (es. 5,6,8,9)</i></p> <p>5C – Calcolo mentale e altri esercizi (in allegato) <i>Ancora semplici esercizi di calcolo con razionali</i></p> <p><i>Trasformare i numeri decimali in frazioni</i></p> <p>6C – In cucina, con frazioni e decimali (in allegato, file “Decimali_frazioni.doc”) <i>Situazioni reali in cui si passa dal numero espresso in frazione alla sua forma decimale e viceversa.</i></p> <p>7C – Redditi e tasse (Matematica 2003) <i>Gli strumenti della matematica elementare (frazioni, percentuali, equazioni, ecc) per comprendere il sistema della tassazione dei redditi</i></p> <p>8C – Frazioni e figure geometriche (in allegato, file “rapporti.doc”) <i>Un problema di geometria</i></p> <p>9C - Concentrazione di un medicinale (m@t.abel) <i>Utilizzare in modo consapevole strumenti di calcolo automatico. Riconoscere, in fatti e fenomeni, relazioni tra grandezze. Utilizzare le</i></p>
---	--	--	--

			<i>lettere per esprimere in forma generale semplici proprietà e regolarità (numeriche, geometriche, fisiche, ...).</i>
<p>Numeri reali</p> <p>$\sqrt{2}$, π, esempi di numeri irrazionali.</p> <p>Scrittura decimale dei numeri irrazionali.</p> <p>Costruire e riconoscere numeri irrazionali.</p> <p>Cenno all'insieme R dei numeri reali.</p> <p>Ordinamento. Confronto tra numeri reali.</p> <p>Calcolo con i numeri reali: valori approssimati e valori esatti.</p> <p>Le potenze del 10 e la notazione scientifica. Ordini di grandezza.</p> <p>Stima di un risultato.</p> <p>Insiemi numerici e strumenti di calcolo automatico.</p>	<p>Comprendere il concetto di numero irrazionale e conoscere le forme di rappresentazione di numeri irrazionali.</p> <p>Saper confrontare numeri reali espressi in vario modo (come frazioni, come radici, come numeri decimali); disporre numeri reali sulla retta numerica.</p> <p>Saper eseguire semplici calcoli con radicali quadratici, con un controllo consapevole del risultato in forma approssimata.</p> <p>Eseguire operazioni con numeri reali a mano, a mente e con strumenti di calcolo.</p> <p>Valutare quale strumento di calcolo può essere più adeguato, a seconda della situazione e degli obiettivi.</p>	<p>Utilizzare le tecniche e le procedure del calcolo aritmetico ed algebrico rappresentandole anche sotto forma grafica</p> <p>Analizzare dati e interpretarli sviluppando deduzioni e ragionamenti sugli stessi anche con l'ausilio di rappresentazioni grafiche, usando consapevolmente gli strumenti di calcolo e le potenzialità offerte da applicazioni specifiche di tipo informatico</p>	<p>1D – Fare matematica con i documenti storici - π (IPRASE)</p> <p><i>Dal sito IPRASE un testo sull'evoluzione storica dei concetti matematici. Pag. 92 - 95</i></p> <p>2D – La radice di due va a teatro: dove si siede? (Matematica 2003)</p> <p><i>Si parte da un contesto storico (un brano del Menone di Platone); ci si pone il problema di approssimare a meno di una fissata incertezza risultati di operazioni con numeri decimali e di utilizzare in modo consapevole gli strumenti di calcolo automatico.</i></p> <p>3D – Esercizi su approssimazioni, stime, ... (Ma.Co.Sa)</p> <p>4D - Numeri sulla retta (m@t.abel)</p> <p><i>Obiettivi dell'attività:</i></p> <ol style="list-style-type: none"> <i>saper confrontare numeri espressi in vario modo (come frazioni, come radici, come numeri decimali);</i> <i>individuare la posizione corretta dei numeri sulla retta;</i> <i>saper riconoscere quando tra due numeri sono compresi infiniti altri numeri, e, in tal caso, saperne elencare alcuni</i> <i>comprendere il concetto di prodotto, adattandolo all'ambito dei numeri razionali e reali, e il suoi legami con l'ordine.</i> <p>5D - Il foglio A4 (m@t.abel)</p> <p><i>Obiettivi dell'attività sono:</i></p> <ol style="list-style-type: none"> <i>dimostrare l'esistenza di grandezze incommensurabili;</i>

			<p>b. costruire l'insieme dei numeri reali con il metodo degli allineamenti decimali;</p> <p>c. operare con numeri approssimati, valutando l'attendibilità del risultato.</p> <p>6D - Il livello del mare (m@t.abel)</p> <p>Obiettivi dell'attività:</p> <p>a. conoscere le diverse rappresentazioni dei numeri e saperle utilizzare negli opportuni contesti;</p> <p>b. saper operare con la notazione scientifica</p> <p>c. saper distinguere la rilevanza della precisione e dell'ordine di grandezza nella valutazione di un numero;</p> <p>d. acquisire un senso del numero per valutare l'attendibilità di informazioni numeriche relative a situazioni reali.</p>
<p>Formule algebriche</p> <p>Polinomi e operazioni su di essi.</p> <p>Prodotti notevoli.</p> <p>Sviluppare o fattorizzare una formula.</p> <p>Variabili per generalizzare e dimostrare, seconda parte</p>	<p>Padroneggiare l'uso della lettera come simbolo e come variabile.</p> <p>Eseguire le operazioni con i polinomi; fattorizzare un polinomio.</p> <p>Usare consapevolmente notazioni e sistemi di rappresentazione formale per indicare e per definire relazioni e funzioni.</p> <p>Tradurre dal linguaggio naturale al linguaggio simbolico e viceversa.</p> <p>Costruire formule algebriche per generalizzare o esprimere una proprietà; interpretare formule.</p> <p>Trasformare formule algebriche basandosi sulle proprietà delle</p>	<p>Utilizzare le tecniche e le procedure del calcolo aritmetico ed algebrico rappresentandole anche sotto forma grafica</p> <p>analizzare dati e interpretarli sviluppando deduzioni e ragionamenti sugli stessi anche con l'ausilio di rappresentazioni grafiche, usando consapevolmente gli strumenti di calcolo e le potenzialità offerte da applicazioni specifiche di tipo informatico</p>	<p>1E - Quel che vedo è sempre vero (m@t.abel)</p> <p>Una proposta di lavoro per l'inizio del biennio, riguardante la formalizzazione di proprietà dei numeri (esprimere con lettere relazioni enunciate a parole) e la differenza tra verifica in un numero finito di casi e dimostrazione in generale.</p> <p>2E - Eredità e bagagli: dal linguaggio naturale al linguaggio dell'algebra (m@t.abel)</p> <p>L'attività si propone di passare consapevolmente dal linguaggio naturale a quello simbolico, di imparare ad utilizzare consapevolmente notazioni e sistemi di rappresentazione formale per indicare e per definire relazioni e funzioni. Impostare e risolvere semplici problemi modellizzabili attraverso equazioni, disequazioni e sistemi di primo e secondo grado. Risolvere, per via</p>

	operazioni.	<p><i>grafica o algebrica, problemi che si descrivono mediante equazioni, disequazioni, funzioni.</i></p> <p>3E - L'aritmetica aiuta l'algebra – algebra aiuta l'aritmetica (m@t.abel)</p> <p><i>Si affronta il nodo 'linguaggio naturale e linguaggio algebrico', con l'intenzione di dare significato al calcolo algebrico, per evitare che gli alunni interpretino le formule algebriche come pure sequenze di segni</i></p> <p>4E – Il problema dei barattoli di V. Villani (in allegato)</p> <p><i>Problemi tratti dal libro “Mondo reale e modelli matematici” di B.Spotorno e V.Villani Ed. La Nuova Italia.</i></p> <p><i>Uso delle lettere per capire.</i></p> <p>5E – Dimostrazioni di proprietà: figure e algebra (in allegato “Algebra Ciocco”, file “PDG06.doc”)</p> <p><i>(schede 1, 2, 4, 5, 6)</i></p> <p>6E – Sviluppo e scomposizione di un'espressione: due processi collegati (in allegato)</p> <p><i>Guida alla scomposizione di numeri ed espressioni per un calcolo più rapido.</i></p> <p>7E – Costruzione di formule: numeri figurati (in allegato “Algebra Ciocco”, file “PDAR08.doc”)</p> <p><i>In questa attività i numeri figurati vengono utilizzati per individuare relazioni algebriche con un itinerario esplorativo che può andare dalla manipolazione di oggetti concreti alla visualizzazione geometrica e di arrivare all'espressione algebrico-simbolica passando attraverso la mediazione del linguaggio</i></p>
--	-------------	---

			<p><i>naturale, del linguaggio grafico, di deissi e metafore.</i></p> <p>8E – Condizione necessaria, ma non sufficiente (Matematica 2003)</p> <p><i>Si propone di scoprire e descrivere regolarità in dati o in situazioni osservate. Usare linguaggi simbolici dell'algebra. Verificare una congettura in casi particolari con consapevolezza della distinzione tra verifica e dimostrazione. Confutare congetture mediante contro esempi. È un'attività con un livello di difficoltà un po' alto, forse non è proponibile in tutte le classi.</i></p> <p>9E - Esercizi di addestramento sul calcolo di prodotti notevoli e scomposizione in fattori, reperibili su ogni libro di testo. Si consiglia caldamente di non scegliere lunghe espressioni.</p>
<p><i>Equazioni e disequazioni</i> Equazioni e disequazioni di primo grado: metodi numerici (tabelle), grafici (piano cartesiano), simbolici ➔ “Relazioni e funzioni”, funzioni lineari</p>	<p>Sviluppare il significato di variabile e di equazione, comprendendone il ruolo nei diversi contesti. Tradurre agilmente dal linguaggio naturale al linguaggio algebrico e viceversa. Impostare e risolvere problemi modellizzabili attraverso equazioni, disequazioni e sistemi di primo e secondo grado. Risolvere per via grafica, numerica o algebrica equazioni, disequazioni, sistemi di primo grado; saper verificare la correttezza dei risultati.</p>	<p>Individuare le strategie appropriate per la soluzione di problemi analizzare dati e interpretarli sviluppando deduzioni e ragionamenti sugli stessi anche con l'ausilio di rappresentazioni grafiche, usando consapevolmente gli strumenti di calcolo e le potenzialità offerte da applicazioni specifiche di tipo informatico</p>	<p>1F - Allineamenti – esploriamo le funzioni lineari (m@t.abel) <i>Risolvere, per via grafica e algebrica, problemi che si formalizzano con equazioni e disequazioni di primo grado, individuare relazioni significative fra grandezze di varia natura, utilizzare consapevolmente notazioni e sistemi di rappresentazione vari per indicare e definire relazioni e funzioni, leggere in un grafico o in una tabella numerica le proprietà qualitative delle funzioni</i></p> <p>2F - Equazioni e disequazioni di primo grado (m@t.abel)</p> <p>3F - Risparmiare sulla bolletta del telefono (m@t.abel)</p> <p><i>Impostare e risolvere semplici problemi modellizzabili attraverso equazioni,</i></p>

			<p><i>disequazioni, sistemi di primo e secondo grado. Risolvere, per via grafica o algebrica, problemi che si descrivono mediante equazioni, disequazioni, funzioni</i></p> <p>4 – Fare matematica con i documenti storici – equazioni (IPRASE)</p> <p><i>Documento ricco di spunti e attività. La parte specifica sulle equazioni si trova a pagina 51, Sono riportati esercizi e problemi – proposti nella storia – che in alcuni casi possono essere risolti senza impostare un’equazione, altri invece che richiedono una rilettura attenta per la comprensione del testo.</i></p> <p>5F – Una bilancia virtuale per risolvere equazioni (applet scaricabile dal sito: http://nlvm.usu.edu/en/nav/frames_asid_201_g_4_t_2.html?open=instructions&from=category_g_4_t_2.html)</p> <p><i>Bilancia virtuale, funziona solo con i numeri interi positivi.</i></p> <p>6F – Esercizi sulle equazioni (Ma.Co.Sa)</p> <p>7F – Problemi sui sistemi lineari (Ma.Co.Sa)</p>
<p>Vettori geometrici Definizione, operazioni di somma e di moltiplicazione per uno scalare. Significato geometrico delle operazioni tra vettori. → “Geometria”</p> <p>Vettori linearmente dipendenti e indipendenti.</p>	<p>Conoscere la differenza tra segmento, segmento orientato e vettore. Saper operare con i vettori, e saper interpretare particolari relazioni (parallelismo) o trasformazioni (traslazioni, omotetie,...) mediante modelli vettoriali. Saper decomporre un vettore rispetto ad una base o a due (tre) direzioni.</p>	<p>Utilizzare le tecniche e le procedure del calcolo aritmetico ed algebrico rappresentandole anche sotto forma grafica Confrontare ed analizzare figure geometriche, individuando invarianti e relazioni Individuare le strategie appropriate per la soluzione di problemi Analizzare dati e interpretarli sviluppando deduzioni e ragionamenti sugli stessi anche con l’ausilio di</p>	<p>1G – Traccia sui vettori (in allegato, file “Geometria_vettoriale.pdf) <i>Tratto dalla rivista “L’INSEGNAMENTO DELLA MATEMATICA E DELLE SCIENZE INTEGRATE”, Anno 2007, vol. 30. Il percorso parte dal primo biennio e va esteso al biennio successivo.</i> <i>L’articolo contiene anche alcuni esercizi, in particolare a pag. 7</i></p>

<p>Vettori in fisica.</p> <p>Prodotto scalare nel piano e nello spazio.</p> <p>Prodotto vettoriale nello spazio.</p> <p>Prodotto scalare e vettoriale: significato geometrico e applicazioni in fisica.</p>	<p>Saper riconoscere in vari ambiti fisici le grandezze vettoriali.</p> <p>Saper definire il prodotto scalare nel piano e nello spazio; interpretare geometricamente il prodotto scalare.</p> <p>Saper definire il prodotto vettoriale nello spazio; interpretare geometricamente il prodotto vettoriale.</p> <p>Saper riconoscere in vari ambiti fisici il prodotto scalare e vettoriale.</p>	<p>rappresentazioni grafiche, usando consapevolmente gli strumenti di calcolo e le potenzialità offerte da applicazioni specifiche di tipo informatico</p>	
<p><i>Calcolo matriciale</i></p> <p>Somma e prodotto.</p> <p>Determinanti di matrici di ordine 2 e 3. Significato geometrico.</p>	<p>Saper tradurre in forma matriciale situazioni diverse: sistemi lineari, equazioni di trasformazioni, problemi, e viceversa.</p> <p>Saper risolvere semplici equazioni matriciali con il metodo di Gauss.</p> <p>Saper interpretare geometricamente e algebricamente i determinanti di ordine 2 e 3.</p>	<p>Utilizzare le tecniche e le procedure del calcolo aritmetico ed algebrico rappresentandole anche sotto forma grafica</p> <p>Analizzare dati e interpretarli sviluppando deduzioni e ragionamenti sugli stessi anche con l'ausilio di rappresentazioni grafiche, usando consapevolmente gli strumenti di calcolo e le potenzialità offerte da applicazioni specifiche di tipo informatico</p>	<p>2G – Significato geometrico del determinante 2×2 (in allegato, file “det 2x2.ggb) <i>File GeoGebra per illustrare il significato geometrico del determinante 2×2</i></p> <p>3G - Significato geometrico del determinante 3×3 (in allegato, file “det 3x3.ggb) <i>File GeoGebra per illustrare il significato geometrico del determinante 3×3</i></p>

Consigli e “sconsigli”

Numeri naturali

Si consigliano spunti di riflessione sui vari significati dei numeri da affrontare con i ragazzi. In particolare per quanto riguarda gli esercizi sui numeri primi e sulla scomposizione in fattori si suggeriscono riferimenti alla realtà e la storia, ad esempio la crittografia (si veda ad esempio l'articolo su www.polymath.it o ancora sui numeri primi, magari con il crivello di Eratostene, che può essere un aggancio con la Scuola Secondaria di I Grado).

Si suggeriscono inoltre riflessioni sui teoremi legati ai numeri primi come il teorema sull'infinità dei numeri primi

- Perché si tratta di un'ottima occasione per presentare agli allievi una dimostrazione al di fuori della geometria (onde sfatare il luogo comune secondo cui

“in geometria si dimostrano i teoremi” e “in aritmetica e in algebra si fanno solo conti”)

- Perché può essere lo spunto per una riflessione sul diverso modo di operare del pensiero umano, rispetto a quello dei computer
[da V. Villani “Cominciamo da zero”, pag. 30, Pitagora Editrice, Bologna]

Numeri interi

Si sconsiglia di introdurre il valore assoluto dicendo che il valore assoluto di un numero è il numero stesso privato del segno. Questa formulazione, apparentemente accettabile in questo contesto, rischia di dare luogo a generalizzazioni abusive quando si passa dal calcolo con i numeri al calcolo con le lettere, potrebbe portare ad esempio a affermazioni erronee come $|a| = a$ o $|-a| = a$

[da V. Villani “Cominciamo da zero”, Pitagora Editrice, Bologna]

Numeri razionali

Si consiglia di proporre:

- esercizi con espressioni in cui si chiede di associare frazioni con denominatore uguale
- esercizi in cui si chiede di associare i decimali per raggiungere l'intero come proposto in Esercizi di calcolo
- contemporaneamente alle frazioni e all'introduzione di percentuali proporre un aggancio alla probabilità

Si sconsiglia di proporre:

- lunghe espressioni con frazioni

Numeri reali

Si consiglia di

- esplorare la funzione ‘radice quadrata’
- associare l'operazione di estrazione di radice alla notazione esponenziale

Si sconsiglia di

- Proporre espressioni complesse con radicali

Formule algebriche

Si consiglia di

- riprendere nella fattorizzazione di un polinomio il concetto di divisibilità
- sottolineare il significato della scomposizione in fattori attraverso esercizi
- evitare lunghe espressioni algebriche da fattorizzare negli esercizi di “addestramento”

Si sconsiglia di

- trattare in modo formale la scomposizione di un trinomio di secondo grado che non sia un quadrato: ricorrere eventualmente alla scissione del termine intermedio oppure trattarlo dopo aver visto le equazioni di secondo grado
- introdurre la ‘regola’ di Ruffini in modo meccanico e fine a se stessa

NOTE

Tutti i materiali in allegato si trovano nella cartella “Materiali_Arit_alg” o nella sottocartella “Algebra Ciocco”

Altre attività a cui fare riferimento

- Chicchi di riso (m@t.abel)
Potenze di numeri naturali; proprietà delle potenze; ordine di grandezza di un numero
- Pensiero algebrico: disegni, successioni, formule (IPRASE, file “SCOPRIAMO SUCCESSIONI”)
Attività che si propongono di affrontare la problematica dell'introduzione al pensiero algebrico proposte da un gruppo di insegnanti nell'ambito del Centro Territoriale per la Didattica della Matematica di Trento
- Contar oggetti (in allegato, “Algebra Ciocco” file “PDAR10.doc”)
Dalla ‘conta’ diretta alla conta ‘indiretta’, attraverso la ricerca di relazioni fra insiemi numerici.
- Non è vero che è sempre vero (Matematica 2003)
Formule generatrici di falsi numeri primi
- Multipli e divisori (in allegato, “Algebra Ciocco” file “PDAR02.doc”)
L'attività prevede esercizi per riconoscere multipli e divisori dei numeri; è importante che gli allievi acquisiscano il senso del numero scomposto in fattori, e delle nuove modalità operative che tale forma comporta, sia per arricchire la propria esperienza aritmetica, sia per dare fondamento alle regole di manipolazione algebrica di monomi e polinomi
- Proprietà delle operazioni e calcolo mentale (in allegato, “Algebra Ciocco” file “PDAR06.doc”)
Nel file indicato sono presenti esercizi per la comprensione delle convenzioni di scrittura e di lettura di una formula e per utilizzare le proprietà delle operazioni per calcolare mentalmente
- Alcune proprietà dei numeri irrazionali (in allegato file “Irrazionali.doc”)
Esercizi su radicali quadratici
- La scatola (in allegato)
In questo file sono presenti esercizi sull'uso della bilancia.

Altri materiali

- Introduzione al calcolo letterale (in allegato file “Domingo_variabili.doc”)
A che cosa serve il calcolo letterale? Dal sito di Domingo Paola
- Congiunture e dimostrazioni sui numeri (in allegato. “Algebra Ciocco” file “PDAR09.doc”)
Un percorso didattico di avvio al linguaggio algebrico sperimentato in alcune classi di III media
- Il senso dei numeri negativi (<http://www.treccani.it/scuola>)
Dal sito ‘Treccani per la scuola’, un articolo sul senso dei numeri negativi e delle operazioni su di essi nell'ambito della modellizzazione
- Dai «debiti» ai «numeri negativi» (dal sito <http://www.itg-rondani.it/dida/Matem/ipermonica/numeri/documenti/radice.htm>)
Un brano tratto dal testo di Lucio Lombardo Radice ‘La matematica da Pitagora a Newton’ - Editori Riuniti (pag. 59-62) sul senso dei numeri interi e delle operazioni su di essi

- Sui numeri negativi (<http://www.isisromero.gov.it/Members/gcavagna/varie/articoli-interessanti/Sui%20numeri%20negativi.pdf/view>)
Articolo scritto da Martin Gardner e pubblicato sulla rivista "Le scienze" (ottobre 1997) sul problematico concetto dei numeri negativi nella storia della Matematica, sul 'senso' dei numeri con segno e delle operazioni su di essi
 - Approssimazioni numeriche (Ma.Co.Sa)
 - Risoluzione di equazioni (Ma.Co.Sa)
 - Risoluzione di sistemi lineari (Ma.Co.Sa)
- C'è la bilancia con i numeri negativi al seguente link:
http://nlvm.usu.edu/en/nav/frames_asid_324_g_4_t_2.html?open=instructions&from=category_g_4_t_2.html

Prove di verifica

Alcuni esempi di prove di verifica si trovano nella cartella " Verifiche_Arit_alg"

PERCORSO DI RELAZIONI E FUNZIONI

Premessa

Il curriculum di matematica per tutti gli studenti del primo biennio concorre all'obiettivo di creare una coscienza critica e non solo una preparazione scientifica di base. Tra i procedimenti caratteristici del pensiero matematico un ruolo fondamentale hanno le "rappresentazioni" (privilegiando quella grafica, ma senza rinunciare alle rappresentazioni verbale, algebrica, tabulare, ...) che, nel caso delle relazioni tra grandezze, favoriscono l'acquisizione da parte degli alunni di un "pensiero funzionale", espressione tanto cara al matematico tedesco Felix Klein.

Le funzioni sono strumenti matematici particolarmente adatti alla descrizione di fenomeni, non solo del mondo fisico, e alla costruzione di semplici modelli matematici per effettuare scelte e avanzare previsioni contribuendo ad affinare da parte dello studente la possibilità di argomentare e valutare criticamente le argomentazioni altrui.

Lo sviluppo del concetto di funzione si presta anche a una impostazione storica, fortemente raccomandata nelle *Nuove Indicazioni* (un riferimento fra tanti: in "Il profilo educativo, culturale e professionale dello studente liceale" si raccomanda "lo studio delle discipline in una prospettiva sistematica, storica e critica" pag.10 del documento sulle *Indicazioni Nazionali* relativo al Liceo Scientifico) che contribuirà anche alla formazione del bagaglio culturale del cittadino. Gli studenti che hanno già familiarizzato con i grafici delle funzioni affronteranno più facilmente diversi argomenti al biennio stesso e negli anni successivi di scuola.

Anche lo studio delle equazioni si presta a un approccio storico, oltre che a un approccio funzionale, per esempio, per la vasta scelta di problemi e giochi tratti da testi antichi di cui disponiamo e che possono essere ancora oggi "problemi per rendere acuta la mente dei giovani", come diceva il monaco inglese Alcuino di York (VIII secolo). Inoltre i giochi matematici classici, come quelli di Fibonacci, per esempio, hanno il loro maggior fascino nella proposta di metodi risolutivi "alternativi", alcuni dei quali rientrerebbero oggi nella categoria delle tecniche euristiche non certo meno interessanti (come spunti per discutere e riflettere) delle codificate tecniche standard. Inoltre sarà possibile affrontare questioni che richiedono l'uso elementare di funzioni circolari (come supporto all'insegnamento della fisica, ma anche per la risoluzione di problemi sui triangoli) senza dover necessariamente svolgere una trattazione esaustiva della trigonometria che troverà un ulteriore spazio di svolgimento negli anni successivi.

Si ritiene importante operare direttamente con esempi e applicazioni, rimandando una trattazione formale a tempi scolastici successivi, evidenziando quali parti richiedono un ulteriore approfondimento.

L'organizzazione del percorso proposto prevede che l'alunno utilizzi le procedure del calcolo aritmetico, sia in grado di calcolare espressioni con i numeri razionali (anche con potenze a esponente intero) e, al secondo anno, con i radicali (semplici calcoli soprattutto con i radicali quadratici). Ma non è difficile che si torni a parlare di questioni sulle operazioni numeriche proprio mentre si cerca di trovare le relazioni fra grandezze o si discute sul significato di operazioni inverse nella ricerca dell'invertibilità delle funzioni. Con queste scelte di integrazione tra gli ambiti di contenuto, lo studente diventa più consapevole delle potenzialità del calcolo numerico e letterale. Per quanto riguarda l'uso delle lettere è probabile che proprio le attività proposte di seguito possano contribuire a formare o a consolidare l'uso delle lettere come variabili (incognite o parametri in una formula). Così non bisogna avere timore di affrontare anche nei primi mesi di scuola attività che introducono al concetto di funzione e lavorano nel discreto con le operazioni note su numeri noti. Analogamente i collegamenti con l'aritmetica e con l'algebra sono evidenti soprattutto nel momento in cui si parla di zeri di un polinomio affiancando le scomposizioni in fattori dei polinomi e lo studio dell'andamento del grafico di una funzione. Un esempio si può trovare nell'attività di m@t.abel (nucleo tematico Relazioni e Funzioni) "Aree e pavimentazioni. Esploriamo le funzioni quadratiche." Equazioni e disequazioni sono strumenti per risolvere problemi in tutti gli ambiti di contenuto.

Sono anche facili i collegamenti con “Dati e previsioni” per l’uso comune di grafici e tabelle delle rispettive rappresentazioni. I problemi che si possono offrire per la costruzione di modelli possono spaziare su tutti i contenuti che gli alunni affrontano nel corso dell’anno.

Non è facile distribuire equamente il lavoro indicato tra primo e secondo anno perché è anche probabile che si debba ritornare anche con nuovi esempi e nuove proposte al secondo anno sul concetto di funzione alla luce di una nuova visuale che l’alunno acquisisce nel tempo o semplicemente per un fisiologico ritorno sui propri passi nell’ambito di una didattica a spirale.

Conoscenze	Abilità	Competenze	Attività
<p>Le funzioni e le loro rappresentazioni (numerica, simbolica, grafica). →”Dati e previsioni”</p> <p>Il metodo delle coordinate: il piano cartesiano. →”Geometria”</p>	<p>Rappresentare relazioni. Riconoscere grandezze direttamente o inversamente proporzionali. Riconoscere relazioni funzionali fra grandezze variabili in contesti diversi.</p> <p>Rappresentare sul piano cartesiano le principali funzioni incontrate sia manualmente sia utilizzando opportuni software.</p> <p>Utilizzare il metodo delle coordinate anche con sistemi di riferimento non monometrici; saper scegliere opportunamente la scala di rappresentazione.</p> <p>Passare da un registro rappresentativo ad un altro (considerando tra le rappresentazioni anche quella verbale).</p>	<p>Utilizzare le tecniche e le procedure del calcolo aritmetico ed algebrico rappresentandole anche sotto forma grafica</p> <p>Analizzare dati e interpretarli sviluppando deduzioni e ragionamenti sugli stessi anche con l’ausilio di rappresentazioni grafiche, usando consapevolmente gli strumenti di calcolo e le potenzialità offerte da applicazioni specifiche di tipo informatico</p>	<p>A piccoli o grandi passi verso l’algebra (m@t.abel) <i>Molti spunti per affrontare il passaggio dall’aritmetica all’algebra</i></p> <p>Uso di vari registri rappresentativi (in allegato da Matematica 2003, Elementi di prove di verifica per il 1° biennio)</p> <p>Riconoscimento di funzioni (in allegato da Matematica 2003, Elementi di prove di verifica per il 1° biennio)</p> <p>Crescita (prove OCSE PISA scaricabili dal sito dell’Invalsi) L’automobile migliore (prove OCSE PISA scaricabili dal sito dell’Invalsi) <i>Significativi esempi di situazioni reali con semplici funzioni</i></p> <p>Diversi tra confini uguali (m@t.abel) <i>Un approccio semplice alle funzioni in ambito geometrico da utilizzare all’inizio del primo anno.</i></p> <p>Diete alimentari I (m@t.abel)</p>

<p>Linguaggio degli insiemi e delle funzioni (dominio, composizione, inversa, ecc.) →”Dati e previsioni”</p> <p>Rappresentazione grafica delle funzioni. →”Dati e previsioni”</p>	<p>Riconoscere l’insieme di definizione di una funzione. Comporre semplici funzioni. Riconoscere le condizioni di invertibilità di una funzione. Trovare funzioni inverse.</p> <p>Leggere l’andamento di una funzione dal suo grafico.</p> <p>Utilizzare le simmetrie nelle rappresentazioni grafiche.</p> <p>Costruire modelli matematici di semplici situazioni per effettuare scelte e previsioni.</p>	<p>Confrontare ed analizzare figure geometriche, individuando invarianti e relazioni</p> <p>Individuare le strategie appropriate per la soluzione di problemi</p>	<p><i>Primi passi verso la formalizzazione.</i></p> <p>La matematica e suoi modelli (Ma.Co.Sa) http://macosa.dima.unige.it/schede/lmsm2/lmsm2n.htm <i>Attività sui modelli, che non richiedono molte conoscenze pregresse, ed esercizi interessanti da cui poi prendere spunto per passare agli aspetti teorici sottesi.</i></p> <p>Concentrazione di un medicinale (m@t.abel) <i>Propone lo studio di due sistemi dinamici discreti lineari</i></p> <p>Introduzione al concetto di funzione (m@t.abel) <i>Una prima trattazione esplicita e consapevole del concetto di funzione</i></p> <p>Potere d’acquisto del salario (m@t.abel) <i>Si lavora essenzialmente con registri numerico e grafico, attività adatta anche come introduzione al concetto di funzione.</i></p> <p>Funzione (1) e (2) (Ma.Co.Sa) http://macosa.dima.unige.it/om/ <i>Proposte di attività per consolidare il concetto di funzione, la composizione, le funzioni inverse.</i></p> <p>Lettura di grafici (in allegato da Matematica 2003, Elementi di verifica per il 1° biennio)</p> <p>Una successione di quadrati (in allegato da</p>
---	--	---	--

			<p>Matematica 2003) La concentrazione di un farmaco nel sangue (in allegato da Matematica 2003. Elementi di prove di verifica)</p> <p>Modelli (in allegato tratti dal sito http://www.matematica.it/paola/)</p> <p>Diete II. (m@t.abel) <i>Modellizzazione di un problema più adatto ad una classe seconda</i></p> <p>Rettangoli e fontane (m@t.abel) <i>Si cerca di favorire l'uso di differenti registri di rappresentazione</i></p>
<p>Equazioni e disequazioni di primo e secondo grado. Sistemi di equazioni e di disequazioni. ➔”Aritmetica e algebra”</p> <p>Collegamento tra le funzioni e il concetto di equazione. ➔”Aritmetica e algebra”</p> <p>Collegamento tra scomponibilità di un polinomio in fattori di primo grado, ricerca degli zeri di un polinomio e l’intersezione del grafico della funzione con l’asse</p>	<p>Risolvere equazioni e disequazioni di primo e secondo grado. Risolvere sistemi di equazioni e disequazioni. (Utilizzando anche metodi grafici e i collegamenti con le funzioni).</p> <p>Analizzare il ruolo dei parametri nelle funzioni algebriche.</p>	<p>Utilizzare le tecniche e le procedure del calcolo aritmetico ed algebrico rappresentandole anche sotto forma grafica</p> <p>Individuare le strategie appropriate per la soluzione di problemi</p>	<p>Equazioni e disequazioni di primo grado (m@t.abel) <i>Particolare attenzione alle rappresentazioni funzionali, con interpretazioni grafiche e numeriche</i></p> <p>Risparmiare sulla bolletta del telefono (m@t.abel) <i>Si usano consapevolmente i parametri. Modellizzazione di un problema più adatto ad una classe seconda</i></p> <p>Risoluzione di equazioni (1) e (2) (Ma.Co.Sa) http://macosa.dima.unige.it/om/ <i>Metodi numerici, algebrici e grafici negli esempi di attività e negli esercizi proposti</i> Problemi tratti dalla storia della matematica (in</p>

<p>delle ascisse. Collegamento tra segno della funzione e disequazioni.</p>			<p>allegato)</p>
<p>Funzioni di vario tipo (lineari, quadratiche, circolari, di proporzionalità diretta e inversa). ➔”Geometria”</p> <p>Funzioni definite a tratti.</p>	<p>Studiare le funzioni (analizzare qualitativamente i grafici): $f(x) = x$ $f(x) = a/x$ $f(x) = ax + b$ $f(x) = ax^2 + bx + c$</p> <p>Riconoscere e descrivere analiticamente le proprietà geometriche dei grafici delle funzioni studiate.</p> <p>Risolvere problemi che implicano l’uso di funzioni, di equazioni e di sistemi di equazioni anche per via grafica, collegati con altre discipline e situazioni di vita ordinaria, come primo passo verso la modellizzazione matematica (costruzione di modelli lineari e quadratici).</p>	<p>Confrontare ed analizzare figure geometriche, individuando invarianti e relazioni</p> <p>Individuare le strategie appropriate per la soluzione di problemi</p> <p>Confrontare ed analizzare figure geometriche, individuando invarianti e relazioni</p>	<p>Funzione lineare (in allegato tratti dal sito http://www.matematica.it/paola/)</p> <p>Con i grafici (in allegato tratti dal sito http://www.matematica.it/paola/)</p> <p>Il numero di ferro (m@t.abel) <i>Usò delle lettere per esprimere in forma generale relazioni e proprietà della proporzionalità diretta.</i></p> <p>Allineamenti. Esploriamo le funzioni lineari (m@t.abel) <i>Attenzione agli aspetti qualitativi dei grafici e alla connotazione funzionale anche nella risoluzione di equazioni e disequazioni</i></p> <p>Le camicie di Diofanto (m@t.abel) <i>Semplici problemi ed equazioni di primo grado</i></p> <p>Problemi di I grado (in allegato da Matematica 2003, La traduzione dei problemi: dal linguaggio naturale al linguaggio dell’algebra, Elementi di prove di verifica)</p> <p>Il cellulare di Pierino (in allegato da Matematica 2003, Risparmiare sulla bolletta del telefono, Elementi di prove di verifica)</p>

	<p>Tracciare i grafici delle funzioni circolari $\sin(x)$, $\cos(x)$, $\tan(x)$. Calcolare i valori delle funzioni circolari (e delle relative funzioni inverse) utilizzando una calcolatrice scientifica.</p>	<p>Analizzare dati e interpretarli sviluppando deduzioni e ragionamenti sugli stessi anche con l'ausilio di rappresentazioni grafiche, usando consapevolmente gli strumenti di calcolo e le potenzialità offerte da applicazioni specifiche di tipo informatico</p>	<p>2° grado Funzioni polinomiali http://macosa.dima.unige.it/om/ <i>Esercizi per tutti i livelli di difficoltà</i></p> <p>Aree e pavimentazioni. Esploriamo le funzioni quadratiche. (m@t.abel) <i>Analisi qualitativa dei grafici rispetto alla ricerca di simmetrie, di punto di massimo/minimo, di zeri.</i></p> <p>Funzioni circolari http://macosa.dima.unige.it/om/ <i>Una impostazione meno usuale ma interessante</i></p> <p>http://www.treccani.it/scuola/in_aula/matematica/trigonometria/volpe.html <i>Un articolo con molte indicazioni di lavoro</i></p> <p>http://ww2.unime.it/weblab/ita/wf2/SinCosTan/sincostan_ita.htm <i>Utili applet per analizzare le funzioni circolari</i></p>
--	---	---	---

Consigli e “sconsigli”

- Si consiglia l'uso di software adeguati per le rappresentazioni grafiche delle funzioni.
- Si sconsiglia l'introduzione al concetto di funzione con la rappresentazione sagittale dei due insiemi con le frecce. È utile solo dopo avere messo insieme una vasta gamma di situazioni (empiriche e algebriche) dove si sono cercate e capite le relazioni che intercorrono tra le grandezze in gioco.
- Si sconsiglia di assegnare grandi quantità di esercizi ripetitivi sulla risoluzione di equazioni di primo grado, è meglio abbondare con i problemi e la loro formalizzazione (difficoltà maggiore rispetto all'esecuzione dei calcoli per la risoluzione di una equazione). Così si potrà dare peso alla necessità di formalizzare (risolvere un problema).

NOTE

- I materiali selezionati da Matematica 2003 sono in un unico file nella cartella “Materiali_Rel_funz”
- Altri materiali più articolati tratti da Matematica 2003 si possono scaricare da:

<http://umi.dm.unibo.it/old/italiano/Matematica2003/matematica2003.html>

- I materiali selezionati dal sito <http://www.matematica.it/paola/> sono in un unico file nella cartella “Materiali_Rel_funz”
- I materiali segnalati tratti dalle Prove PISA rilasciate sono reperibili nel sito dell’INVALSI <http://www.invalsi.it>
- I materiali di Ma.Co.Sa sono facilmente reperibili in rete <http://macosa.dima.unige.it/om>
- I materiali “Problemi tratti dalla storia della matematica” sono nella cartella “Storia_Rel_funz” a sua volta contenuta nella cartella “Materiali_Rel_funz”
- Due attività sperimentate dagli autori, non inserite nella tabella: “L’algoritmo di Ruffini –Horner”, “Dalla Terra alla Luna col foglio A4” sono nella cartella “Materiali_Rel_funz”
- Le attività di m@t.abel sono reperibili sul sito dell’INDIRE alla voce “Risorse per docenti dai progetti nazionali”

Alcune attività sono state consigliate con riferimento ad una o più voci tra quelle presenti nella tabella ma in ogni attività di Relazioni e Funzioni (anche quelle progettate per la scuola secondaria di primo grado) si trovano problemi e spunti di riflessione per costruire, in modo coerente, i concetti fondanti dell’ambito di contenuto in questione.

- Test online e altri esercizi su equazioni e funzioni in inglese (selezionati a partire dai link su http://www.treccani.it/scuola/in_aula/matematica/)
<http://www.glencoe.com/sec/math/studytools/cgi-bin/msgQuiz.php4?isbn=0-02-825326-4&chapter=3>
<http://teachers.henrico.k12.va.us/math/HCPSSAlgebra1/index.html>
<http://www.mathsnet.net/algebra/balance.html>

Prove di verifica

- Una vasta scelta di esercizi e problemi, alcuni dei quali utilizzano lo strumento informatico, sono in un unico file nella cartella “Verifiche_Rel_funz”
- Alcune prove di verifica piuttosto semplici e con chiare indicazioni sono in un unico file nella cartella “Verifiche_Rel_funz”

PERCORSO DI GEOMETRIA

Premessa

All'inizio del primo biennio della Scuola Secondaria di Secondo Grado lo studio della geometria può mirare, partendo da quanto è stato affrontato nel corso del precedente livello scolastico, a migliorare e rafforzare la presa di coscienza dello spazio in cui viviamo le nostre esperienze per poi procedere a un approfondimento della conoscenza delle figure e delle loro proprietà con opportune argomentazioni e dimostrazioni.

Per un'azione didattica più efficace è conveniente che lo studente venga gradualmente condotto verso una maggiore consapevolezza argomentativa anche mediante strumenti didattici quali i tradizionali riga e compasso, i software di geometria dinamica e le macchine matematiche.

Iniziare dal riconoscimento delle figure tridimensionali che sono intorno a noi rappresenta un'occasione per richiamare e rafforzare le conoscenze degli studenti provenienti da situazioni scolastiche diverse ovvero con livelli e tipologie di preparazione spesso molto eterogenei. In ogni caso orientare l'approccio al curricolo del biennio in continuità con quello del primo ciclo determina un minor stato di ansia e può servire a stabilire un miglior dialogo tra docenti dei due livelli di istruzione.

Il ricorso a corretti procedimenti dimostrativi deve essere un esempio di ricerca dell'*arte del convincere l'altro* sulla validità di un'affermazione, di una intuizione o di una proprietà scoperta o congetturata attraverso manipolazioni di figure. Una sistemazione più esaustiva della geometria è un punto d'arrivo al termine del curricolo e non certo un punto di partenza imposto.

Talvolta possono essere utili riferimenti storici, introdotti in varie forme (problematiche legate a un contesto storico, contributi di personaggi importanti eventualmente anche mediante la lettura di testi originali o loro traduzioni, ...). Tali riferimenti, se introdotti in modo adatto all'età dello studente e al contesto ambientale, possono servire per far incuriosire e quindi sollecitare l'attenzione e l'ascolto, possono contribuire ad approfondire aspetti culturali di carattere più generale e possono far percepire la matematica come un sapere in continuo sviluppo e come frutto dell'intelletto dell'uomo.

Il *percorso di Geometria* del biennio nei Licei e negli Istituti Tecnici e Professionali, interpretando le *Indicazioni nazionali* e le *Linee guida* del MIUR, è articolato in otto fasi. In generale in tutte quelle che abbiamo indicato come *fasi* si agisce per sviluppare la competenza che si riferisce a "confrontare e analizzare figure geometriche, individuando invarianti e relazioni". Le prime tre fasi in particolare suggeriscono come nella Scuola Superiore si possa proporre e favorire un buon incremento di questa competenza, rispetto ai semi gettati nel percorso scolastico precedente, in cui sono state poste molte premesse importanti di metodo e di contenuto.

Qui di seguito sono indicate le linee essenziali delle scelte di metodo e di contenuto e successivamente viene proposta una tabella più esaustiva e contenente alcuni dettagli e suggerimenti operativi.

Fase 1. Recupero, consolidamento e approfondimento delle conoscenze pregresse sulle figure dello spazio e del piano.

Si propone di guidare gli studenti al riconoscimento di figure geometriche in tre e in due dimensioni facendo riferimento al mondo che li circonda o a una situazione problematica opportunamente scelta, come azione di recupero e di consolidamento delle conoscenze pregresse con l'obiettivo di passare gradualmente da descrizioni intuitive o incomplete a descrizioni consapevolmente sistematizzate delle varie figure.

Dalle figure dello spazio tridimensionale, già studiate durante l'ultimo anno della Scuola Secondaria di Primo Grado (prismi, piramidi, poliedri, cilindri, coni, sfere), si giungerà ad analizzare quelle piane (circonferenze, poligoni, segmenti, angoli).

Si possono, per esempio, invitare gli studenti a guardare ciò che è intorno a loro nell'aula o che notano mentre si affacciano alla finestra o mentre fanno un giro intorno alla scuola. Può essere utile mostrare qualche foto di edifici, di sculture, di animali, di panorami con nubi e profili di montagne oppure far

osservare, coinvolgendo possibilmente il collega di Scienze, alcuni campioni di minerali che presentino la loro struttura cristallina. Importante è giungere a far scoprire come le forme geometriche che si studiano (a scuola) siano suggerite dalla Natura stessa!

Tutto ciò dovrebbe in effetti avere la funzione di motivare lo studio della geometria evidenziandone l'utilità del lessico e del linguaggio specifico oltre che rappresentare un'occasione per affinare le competenze nel descrivere le figure e per potenziare l'intuizione spaziale.

Oltre a piramidi, prismi, cilindri, coni è interessante e culturalmente importante far osservare e arrivare a descrivere, senza esagerare con il rigore formale, i poliedri regolari, sempre a partire da foto o da oggetti (per esempio alcuni dei dadi usati per i "giochi di ruolo") o da letture o da riferimenti storici. Come guida alla descrizione è consigliabile proporre agli studenti la costruzione di una tabella in cui indicare le caratteristiche "non metriche" quali la forma, il numero delle facce, quello dei vertici e degli spigoli e arrivare così alla scoperta di alcune regolarità come, per esempio, la relazione di Eulero (facendo poi eventualmente osservare che questa vale anche per gli altri poliedri già studiati purché non abbiano "buchi").

Fase 2. Proprietà essenziali di triangoli e poligoni attraverso procedimenti costruttivi e argomentativi.

Le caratteristiche fondamentali di triangoli e poligoni vengono scoperte o riscoperte mediante un'attività manipolativa e grafica e poi generalizzate e motivate, ove possibile, con procedimenti argomentativi e con dimostrazioni.

Volendo analizzare le figure poligonali più semplici, quali i triangoli e i quadrilateri, si può inizialmente porre il problema della costruibilità di un triangolo oppure di un quadrilatero (a partire da segmenti assegnati o anche, più concretamente, da bastoncini, da aste o materiali simili) al fine di introdurre e analizzare intuitivamente le relazioni fondamentali tra gli elementi di un triangolo (in particolare la disuguaglianza triangolare) e di un quadrilatero.

Si prosegue poi ponendo l'attenzione sulle proprietà angolari dei poligoni convessi, iniziando ovviamente dalla somma degli angoli interni di un triangolo (proprietà generalmente ben acquisita in precedenza dagli studenti oppure facilmente recuperabile in modo costruttivo) per passare, attraverso costruzioni e successive dimostrazioni, alla somma degli angoli interni di un quadrilatero e di un poligono convesso di n lati. È rilevante, inoltre, far scoprire come la somma degli angoli esterni sia un invariante rispetto al numero dei lati. Le risposte potranno essere ottenute dagli stessi studenti attraverso congetture suggerite loro anche dall'uso di un opportuno software.

Tornando ai poliedri regolari si può a questo punto condurre gli studenti a dimostrare il fatto che sono cinque facendo riferimento all'ampiezza degli angoli dei vari poligoni regolari coinvolti. Molto stimolante e importante per sviluppare l'intuizione spaziale può essere lo studio delle sezioni e degli sviluppi piani di poliedri regolari quali il tetraedro, l'ottaedro e l'esaedro. Interessante può essere un collegamento con l'ambito *Aritmetica e algebra* facendo vedere come si può arrivare a determinare il numero dei poliedri regolari anche a partire dalla relazione di Eulero. Le riflessioni, che portano ad individuare i numeri che abbiano senso per tali poliedri e che siano compatibili con la relazione, sono forse impegnative ma rappresentano un'occasione di una ricerca di soluzioni senza ricorrere ad un algoritmo standard e ripetitivo e di un approfondimento sul calcolo consapevole con le frazioni.

Fase 3. Proprietà e classificazione di triangoli e quadrilateri.

Si affronta lo studio dell'uguaglianza tra poligoni e, in particolare, tra triangoli, enunciandone i tre criteri. È importante far notare come il triangolo è il solo poligono ad essere determinato dai suoi lati mentre i suoi angoli ne determinano solo la "forma".

Un teorema irrinunciabile è quello che riguarda la relazione tra un angolo esterno di un triangolo e ognuno degli angoli interni non adiacenti, con la relativa dimostrazione.

Altre proprietà geometriche irrinunciabili sono:

a) La relazione di perpendicolarità tra rette (evidenziando la differenza tra verticalità e orizzontalità e dimostrando l'unicità della perpendicolare condotta da un punto a una retta). La distanza di un punto da una retta.

b) La relazione di parallelismo tra rette e il relativo criterio.

c) La classificazione dei triangoli e dei quadrilateri e relative proprietà caratteristiche, limitando le dimostrazioni ai soli casi più significativi e magari svolte come esercizi.

Un'importante applicazione di alcuni dei precedenti risultati si può trovare nella dimostrazione del teorema riguardante il segmento che ha per estremi i punti medi di due lati di un triangolo. Tale teorema, tra l'altro, risulta utile nello studio delle proprietà del quadrilatero avente i vertici nei punti medi di un altro dato quadrilatero anche in relazione con eventuali particolarità del quadrilatero dato (occasione di ricerca che può risultare stimolante per gli studenti in quanto non è immediatamente intuibile).

Fase 4. Costruzioni con riga e compasso e loro applicazioni alla risoluzione di problemi.

Certamente gli allievi hanno già avuto modo di cimentarsi con problemi, in particolare con problemi di geometria. Tuttavia il cammino necessario a sviluppare la competenza relativa a “individuare strategie appropriate per la soluzione di problemi” non si interrompe mai, anzi, è sempre suscettibile di crescita. Le occasioni che la geometria offre sono preziose, soprattutto se non si trascura di utilizzare varietà di strumenti, e pluralità di rappresentazioni, come oggi è possibile fare. Le costruzioni con riga e compasso non sono una matematica “povera”, ma un'ottima palestra di individuazione e comprensione di strategie risolutive, anche se possono gradualmente lasciare posto agli strumenti di software dinamico oggi disponibili.

Come esempi di costruzioni con riga e compasso e con software di geometria dinamica possiamo citare: luoghi geometrici fondamentali quali l'asse di un segmento e la bisettrice di un angolo; le altezze di un triangolo intese sia come segmenti che come rette; i quattro punti notevoli di un triangolo (ottenuti come risposta da parte degli studenti a quesiti posti dal docente sulla loro esistenza); determinazione del centro di una circonferenza data.

Si può poi effettuare la dimostrazione di alcuni dei risultati ottenuti con le precedenti ricerche e costruzioni.

L'uso di un software di geometria dinamica può essere utile agli studenti per compiere un'analisi della posizione dei citati punti notevoli rispetto al triangolo (interni, esterni o sul contorno) al variare delle caratteristiche del triangolo stesso.

Da un punto di vista storico e concettuale è utile e importante sottolineare come per i Greci, e in particolare per Euclide, le figure che vengono studiate sono quelle di cui si può eseguire la costruzione con gli strumenti “base” ovvero con la riga e il compasso ovvero quelle operazioni empiriche che sono assunte con i primi postulati presenti negli *Elementi*. Analogamente si procede nello studio della risolubilità dei problemi. Le figure così ottenute, a livello mentale, appartengono al mondo delle idee e godono delle loro proprietà dimostrate, mentre le stesse figure rappresentate effettivamente tramite un grafico sono solo un'approssimazione di quelli ideali. Se la situazione lo permette può essere importante un collegamento con l'ambito *Relazioni e funzioni* facendo notare come i problemi risolubili con riga e compasso siano quelli che algebricamente sono risolubili con equazioni riducibili a equazioni di primo e di secondo grado.

In tutte le fasi già segnalate, facendo geometria si lavora necessariamente per “Sviluppare deduzioni e ragionamenti anche con l'aiuto di rappresentazioni grafiche”, ed è inevitabile riscontrare un incremento della competenza degli allievi in questo senso, se il lavoro è condotto in modo adeguato. Occorre però che nel procedere si ponga attenzione crescente all'adozione di un linguaggio sempre più appropriato e alla struttura argomentativa del pensiero geometrico.

Fase 5. Circonferenza e poligoni.

Dopo aver guidato gli studenti all'osservazione delle proprietà delle corde di una circonferenza e delle situazioni legate alle posizioni reciproche tra una retta e una circonferenza si affronta lo studio degli angoli alla circonferenza e degli angoli al centro per giungere fino alla dimostrazione del relativo teorema.

Sono da evidenziare alcune importanti applicazioni di tale teorema alle caratteristiche dei triangoli inscritti in una semicirconferenza e alla giustificazione della costruzione delle rette tangenti a una circonferenza condotte da un punto esterno.

Altre attività irrinunciabili in questa fase sono:

- a) Ricerca e studio delle condizioni di inscrivibilità e circoscrivibilità di un quadrilatero a una circonferenza.
- b) Alcuni esempi di costruzione di poligoni regolari.
- c) Costruzione della retta tangente a una circonferenza in un suo punto.

Riprendendo quanto scritto alla fine della Fase 4, si potrebbe sottolineare qui come la circonferenza sia una delle poche curve per le quali nel mondo greco si può costruire e quindi definire una retta tangente, mentre per parlare di retta tangente a curve di carattere più generale si devono aspettare ulteriori sviluppi della Matematica.

Nell'ambito *Relazioni e funzioni*, se il percorso della classe prevede la risoluzione di problemi nel piano cartesiano che riguardano rette e circonferenze, si raccomanda di guidare gli studenti a strategie risolutive che siano riconducibili a procedimenti di tipo geometrico oltre a quelli di tipo più analitico.

Fase 6. Isometrie.

Gli studenti possono essere guidati intuitivamente al riconoscimento di “armonie” nelle figure ovvero a sottolineare caratteristiche riconducibili a simmetrie assiali (riflessioni) o a individuarne un’invarianza per rotazione o per traslazione.

Le attività consigliate sono:

- a) Descrizione degli elementi caratterizzanti le simmetrie assiali, le traslazioni, le rotazioni e le simmetrie centrali (considerate anche come rotazioni di ampiezza 180°).
- b) Costruzione delle trasformate di figure mediante una simmetria assiale o una traslazione o una rotazione o una simmetria centrale.
- c) Descrizione di figure mediante l’individuazione di uno o più loro assi di simmetria oppure del loro centro di simmetria o della loro invarianza per traslazione di un loro elemento base o per rotazione.
- d) Determinazione degli elementi uniti (punti e rette) e degli invarianti (lunghezze, angoli, parallelismo, perpendicolarità) delle varie isometrie proposte.

Per facilitare un apprendimento veramente consapevole dei contenuti e dei procedimenti è indispensabile che tutte le attività relative a questa fase avvengano prevalentemente in modo laboratoriale e in particolare ricorrendo alle “piegature della carta” e all’uso di un software di geometria dinamica.

Nell'ambito *Relazioni e funzioni*, se il percorso della classe prevede di operare nel piano cartesiano e se il contesto classe lo permette, si suggerisce di studiare come vengono trasformate le coordinate dei punti del piano e le equazioni delle rette nelle simmetrie che hanno per asse gli assi cartesiani o le bisettrici dei quadranti o come centro l’Origine e nelle traslazioni individuate da un vettore dato. Anche in questo caso il passare dal linguaggio sintetico a quello analitico e viceversa può abituare a staccarsi da procedimenti di tipo algoritmico ripetitivo per rivolgersi a svolgimenti più consapevoli.

Fase 7. Equivalenza nel piano e misura di superfici.

Si consolidano e si approfondiscono le competenze relative all’equivalenza tra figure del piano mediante attività riguardanti l’equiscomponibilità e l’isoperimetria (eventualmente ricorrendo al “tangram” come ambiente di situazioni problematiche o di gioco relative a lunghezze e superfici riconducibili a figure poligonali). Si potrebbero utilizzare le isometrie, traslazioni – rotazioni – simmetrie assiali (*ribaltamenti*), per passare da una composizione di pezzi a un’altra.

È indispensabile esaminare il teorema di Pitagora e suo inverso. In collegamento con l’ambito “Aritmetica e algebra” si può proporre la ricerca di formule generatrici di terne pitagoriche.

Occorre anche prendere in esame le costruzioni e i teoremi che conducono alla quadratura di un poligono di n lati e anche i teoremi di Euclide.

Si propongono esempi di procedimenti di misura in ambito geometrico e si analizzano le relative problematiche.

Si studiano i segmenti commensurabili e loro rapporto ed esempi di coppie di segmenti incommensurabili quali la diagonale e il lato di un quadrato. In collegamento con l'ambito "Aritmetica e algebra" si suggerisce di ricorrere alla costruzione di triangoli rettangoli opportunamente disposti per disegnare segmenti la cui misura sia la radice quadrata di numeri naturali.

Ulteriori argomenti da sviluppare sono:

- a) Stima e misura di segmenti (perimetri) e di superfici.
- b) Aree di poligoni.

Si possono poi utilizzare i risultati ottenuti per evidenziare e dimostrare proprietà anche in altri ambiti come per esempio in "Dati e previsioni" per fare un confronto tra media geometrica e media aritmetica.

Fase 8. Similitudine nel piano.

È consigliabile iniziare con un'introduzione intuitiva alla similitudine tra figure del piano a partire dall'osservazione di fenomeni legati alle ombre e da riferimenti storici (aneddoto su Talete e la misura delle ombre).

Seguirà poi l'esame del teorema di Talete. È questo uno dei teoremi fondamentali, che può, per esempio, essere utilizzato nell'ambito "Relazioni e funzioni" per la costruzione del piano cartesiano e per determinare l'equazione di una retta (salvo procedere per altra via).

Altri argomenti importanti da trattare sono:

- a) La costruzione di un sottomultiplo di un segmento dato.
- b) I criteri di similitudine tra triangoli.
- c) La relazione tra i perimetri oppure tra le aree di triangoli o di poligoni simili.

È naturale qui sottolineare un collegamento con l'ambito "Relazioni e funzioni".

Ulteriori attività da considerare sono:

- a) Definizione ed esempi di costruzione della sezione aurea di un segmento.
- b) Riconoscimento di proporzioni auree (approssimate) nel mondo reale, nell'architettura o nell'arte.

Se la situazione sia del curriculum sia della classe lo permette, può essere presentata la successione di Fibonacci, in collegamento con l'ambito "Aritmetica e algebra", facendo osservare come sia anch'essa collegabile al "numero d'oro".

Infine occorre trattare l'omotetia e le sue proprietà caratterizzanti.

Una premessa alla lettura della tabella

Sono indicati con T i teoremi che sono ritenuti "esemplari", i cui enunciati e le cui dimostrazioni potrebbero e dovrebbero far parte delle conoscenze matematiche condivise dei quindicenni: sono in tutto 10 in due anni e vanno dalla disuguaglianza triangolare al teorema di Talete.

Si intende in questo modo segnalare che gli altri contenuti esplicitati potrebbero essere comunque dignitosamente ed efficacemente proposti a diversi livelli, a seconda del tempo, del tipo di scuola e delle classi: seguendo un approccio esclusivamente induttivo – intuitivo che privilegi attività osservative ed euristiche, ma anche curando maggiormente la crescita linguistico-argomentativa, dimostrando in modo accurato anche molte più proprietà e teoremi di quelli qui segnalati, ad esempio nei licei scientifici.

Le competenze che sono indicate nella terza colonna della seguente tabella esplicitano quanto previsto per il primo biennio dalle Indicazioni per i Licei (DM n. 211 del 7 ottobre 2010) e dalle Linee guida per gli Istituti Tecnici e Professionali (Direttive n. 57 del 15/07/2010 e n. 65 del 28/07/2010) ma fanno anche

riferimento al curricolo e ai materiali didattici di *Matematica 2001* e *Matematica 2003* e a quanto proposto dall'INVALSI nel quadro di riferimento per la matematica e dal documento sugli Assi culturali e sulle Competenze di base del 22 agosto 2007.

Conoscenze	Abilità	Competenze	Attività
<p><i>Fase I.</i> Ripresa delle nozioni intuitive (note agli allievi dai precedenti livelli scolari) sulle figure geometriche in tre e in due dimensioni (rette, semirette, segmenti, angoli, poligoni, poliedri, solidi di rotazione elementari,...).</p>	<p>Individuare e riconoscere nel mondo reale le figure geometriche note e descriverle con linguaggio naturale e progressivamente con la terminologia specifica.</p> <p>Individuare le proprietà essenziali delle figure e riconoscerle in situazioni concrete.</p> <p>Analizzare con strumenti intuitivi forme, sezioni e sviluppi piani di semplici poliedri.</p>	<p>Conoscere e padroneggiare i contenuti specifici della matematica (oggetti matematici, proprietà, strutture...)</p> <p>Conoscere e padroneggiare diverse forme di rappresentazione e sapere passare da una all'altra (verbale, scritta, simbolica, grafica, ...)</p> <p>Acquisire progressivamente forme tipiche del pensiero matematico (congetturare, verificare, giustificare, definire, generalizzare, dimostrare,...)</p> <p>Sapere riconoscere le forme dello spazio (riconoscere forme in diverse rappresentazioni, individuare relazioni tra forme, immagini o rappresentazioni visive, visualizzare oggetti tridimensionali a partire da una rappresentazione bidimensionale e, viceversa, rappresentare sul piano una figura solida, saper cogliere le proprietà degli oggetti e le loro relative posizioni, ...)</p>	<p>Osservazione di opportune situazioni "concrete".</p> <p>Costruzione di modelli (piegature della carta, riga e compasso, cartone, software dinamici in 2D e 3D...) di solidi, di sviluppi e di sezioni.</p> <p>Leggiamo in 2D un mondo a 3D (Matematica 2001). <i>Esempi di occasioni e suggerimenti metodologici finalizzati a sviluppare le abilità coinvolte nella rappresentazione su un piano di figure tridimensionali e, viceversa, nella interpretazione e visualizzazione di figure tridimensionali a partire dalla loro immagine o rappresentazione piana.</i></p> <p>Ville e palazzi: forme geometriche e simmetrie (m@t.abel). Le opere del Palladio: forme geometriche e simmetrie (Matematica 2003). <i>Entrambe le attività mirano alla condivisione del linguaggio geometrico che gli alunni hanno in precedenza acquisito e vogliono essere una proposta per avviare il percorso di geometria, Si inizia da un confronto con il mondo reale,</i></p>

			<p><i>visitando e osservando costruzioni architettoniche e analizzando fotografie, piante, sezioni degli edifici con lo scopo di riconoscervi figure note e relazioni di tipo isometrico (simmetrie, traslazioni, rotazioni).</i></p> <p>Origami, riga e compasso, software geometrico (Matematica 2003).</p> <p><i>Viene proposta la costruzione di un pentagono regolare in tre modi diversi, in un contesto di “apprendistato cognitivo” con l’obiettivo di far nascere negli studenti l’esigenza di dare una spiegazione della correttezza della costruzione eseguita.</i></p> <p><i>Spunto storico. Le origini della geometria: Talete, Pitagora, Euclide.</i></p>
<p><i>Fase 2.</i> Condizioni per l’esistenza di triangoli.</p> <p>Disuguaglianza triangolare (T1) e somma degli angoli interni per via intuitiva.</p> <p>La somma degli angoli interni e la somma degli angoli esterni di un poligono convesso ed in particolare di un poligono regolare.</p> <p>I cinque poliedri regolari.</p>	<p>Realizzare costruzioni geometriche elementari utilizzando strumenti diversi (riga e compasso, software di geometria dinamica, ...).</p> <p>Produrre congetture e riconoscerne la validità con semplici dimostrazioni.</p> <p>Comprendere i principali passaggi logici di una dimostrazione.</p>	<p>Confrontare e analizzare figure geometriche, individuando invarianti e relazioni</p>	<p>Costruire poligoni (Matematica 2001). Costruire poligoni (m@t.abel).</p> <p><i>Si tratta di itinerari proponibili anche come primo approccio alla geometria del piano guidando i ragazzi a riconoscere, prima, e definire, poi, le principali figure piane attraverso la scoperta delle loro proprietà e attraverso la loro descrizione. È fondamentale l’equilibrio tra fasi operative e graduali sistemazioni teoriche per permettere un percorso che, partendo da evidenze visive o da ragionamenti su figure, arrivi gradualmente ad argomentazioni e concettualizzazioni sempre più rigorose.</i></p>

<p>➔ “Aritmetica e algebra”</p>			<p>Solidi noti e solidi misteriosi (m@t.abel). <i>Questa attività ha come obiettivo lo sviluppo e il potenziamento della visione spaziale e di figure tridimensionali a partire da loro rappresentazioni fisiche, grafiche e mentali. Attraverso un approccio laboratoriale si giunge alla identificazione e alla scoperta di alcuni solidi e delle loro proprietà geometriche sostenute con argomentazioni e concettualizzazioni sempre più rigorose.</i></p> <p>L’investigatore geometrico (Matematica 2001). <i>Attraverso un’attività ludica, con lo scopo di favorire un clima che faciliti l’apprendimento, si indirizza l’attenzione sui processi più che sui contenuti in modo che gli studenti possano affinare le proprie capacità argomentative.</i></p> <p>Esplorazione di figure piane: dalle congetture alla dimostrazione (Matematica 2003). Esplorazione di figure piane: dalle congetture alla dimostrazione (m@t.abel). <i>Si mira a sviluppare negli studenti le abilità necessarie a sostenere, con corrette argomentazioni, congetture da essi stessi formulate nell’ambito di situazioni analizzate e studiate anche con l’aiuto di un software di geometria dinamica. Particolare attenzione viene posta a far comprendere la differenza tra verifica e dimostrazione. Viene affrontata, come esempio, una situazione problematica relativa ad una relazione tra bisettrice e altezza di un triangolo isoscele.</i></p>
---------------------------------	--	--	--

<p><i>Fase 3.</i> Relazione di congruenza (uguaglianza): tra segmenti, angoli, poligoni, in particolare i triangoli.</p> <p>Teorema dell'angolo esterno (T2).</p> <p>Relazione di perpendicolarità: unicità della perpendicolare da un punto a una retta (T3).</p> <p>Classificazione dei triangoli.</p> <p>Relazione e criterio di parallelismo (T4).</p> <p>Classificazione dei quadrilateri e relative proprietà caratterizzanti.</p>	<p>Applicare i criteri di congruenza (uguaglianza) dei triangoli.</p> <p>Classificare i triangoli rispetto ai lati e rispetto agli angoli. Conoscere e sapere applicare le condizioni di parallelismo.</p> <p>Classificare i quadrilateri secondo criteri dati e in modo coerente con le definizioni date (trapezi, parallelogrammi, ...).</p>	<p>Acquisire progressivamente forme tipiche del pensiero matematico (congetturare, verificare, giustificare, definire, generalizzare, dimostrare,..)</p>	<p>Attività con software geometrico (Matematica 2003). <i>Vengono proposte attività di risoluzione di problemi di costruzione e di esplorazione mediante l'uso strumenti di riga e compasso e di software di geometria dinamica (molto utile nella fase di esplorazione). Si mira a sviluppare negli studenti l'esigenza di sostenere congetture con opportune dimostrazioni e la consapevolezza dei relativi processi.</i></p> <p>Esplorazione di figure piane: dalle congetture alla dimostrazione (m@t.abel). <i>(Vedere la descrizione nella Fase 2)</i></p> <p>Definizioni e costruzioni geometriche "in discussione" (Matematica 2001). <i>Si vuole mettere lo studente in posizione critica rispetto alle definizioni proponendo loro di analizzare e validare la correttezza di alcune costruzioni con riga e compasso, di definizioni presenti nel libro di testo, "figure geometriche" facendo emergere la differenza tra disegno e costruzione geometrica.</i></p>
<p><i>Fase 4.</i> I principali luoghi geometrici del piano e le loro costruzioni (con riga e compasso e con software di geometria dinamica): asse di un segmento (T5), bisettrice di un angolo,</p>	<p>Utilizzare i principali luoghi geometrici del piano nella risoluzione di semplici problemi.</p>		<p>Esplorazione di figure piane: dalle congetture alla dimostrazione (m@t.abel). <i>(Vedere la descrizione nella Fase 2)</i></p>

<p>circonferenza. → “Relazioni e funzioni”</p> <p>Esempi (condotti attraverso esplorazione e congetture, eventualmente con dimostrazione successiva) di applicazione dei luoghi citati, come la determinazione dei punti notevoli di un triangolo o del centro di una circonferenza.</p>	<p>Risolvere problemi; produrre congetture e riconoscerne la validità con semplici dimostrazioni.</p>	<p>Sapere risolvere problemi utilizzando gli strumenti della matematica (individuare e collegare le informazioni utili, confrontare strategie di soluzione, individuare schemi risolutivi di problemi come ad esempio sequenza di operazioni, esporre il procedimento risolutivo,...)</p>	<p>Problema del lampione (Prove OCSE PISA) [i materiali relativi alle Prove PISA sono tutti liberamente scaricabili dal sito dell’INVALSI (v. Bibliografia e sitografia)] <i>“Il consiglio comunale ha deciso di mettere un lampione in un piccolo parco triangolare in modo che l’intero parco sia illuminato. Dove dovrebbe essere collocato il lampione?”</i> <i>Si tratta di un problema di matematizzazione che si presta ad essere risolto con un software di geometria dinamica e una discussione in laboratorio.</i></p>
<p><i>Fase 5.</i> Proprietà della circonferenza: angoli alla circonferenza e angoli al centro (T6), proprietà di inscrivibilità dei triangoli rettangoli, condizione di inscrivibilità dei quadrilateri.</p> <p>Costruzione (con riga e compasso, e/o software dinamico) di alcuni poligoni regolari. → “Relazioni e funzioni”</p> <p>Posizioni reciproche di retta e circonferenza, con attenzione particolare alla tangente (T7). → “Relazioni e funzioni”</p>	<p>Dimostrare il teorema (T6) sull’angolo al centro e l’angolo alla circonferenza che insistono sullo stesso arco.</p> <p>Costruire (con un software di geometria dinamica, con riga e compasso, piegando la carta,...) un triangolo equilatero, un esagono regolare, un quadrato, un pentagono regolare,...</p> <p>Costruire la tangente a una circonferenza in un suo punto.</p> <p>Costruire le tangenti a una circonferenza condotte da un</p>	<p>Conoscere e padroneggiare algoritmi e procedure (in ambito geometrico....)</p>	<p>Origami, riga e compasso, software geometrico (Matematica 2003). <i>(Vedere la descrizione nella Fase 1)</i></p>

<p>Costruzione (con riga e compasso e con software dinamico) della retta tangente alla circonferenza in un suo punto e delle tangenti da un punto esterno. → “Relazioni e funzioni”</p> <p>Poligoni circoscritti a una circonferenza: i quadrilateri e i poligoni regolari.</p>	<p>punto esterno.</p> <p>Sapere (e motivare) quando si può inscrivere una circonferenza in un quadrilatero.</p> <p>Sapere (e motivare) quando si può circoscrivere una circonferenza ad un quadrilatero.</p>		
<p><i>Fase 6.</i> Attraverso esplorazione delle figure con l’ausilio di software dinamici, riconoscimento e descrizione delle isometrie piane: simmetrie, rotazioni e traslazioni. → “Relazioni e funzioni”</p> <p>Attraverso esplorazione (con un software di geometria dinamica) e congetture, individuazione delle più semplici tassellazioni del piano con poligoni</p>	<p>Saper individuare anche con l’ausilio di software dinamici le proprietà e gli invarianti delle simmetrie, delle traslazioni e delle rotazioni del piano.</p> <p>Saper disegnare le simmetriche di figure piane rispetto ad una retta o rispetto ad un punto.</p> <p>Saper disegnare le corrispondenti di figure piane in una rotazione di centro e ampiezza dati o in una traslazione assegnata.</p>	<p>Acquisire progressivamente forme tipiche del pensiero matematico (congetturare, verificare, giustificare, definire, generalizzare, dimostrare,...)</p> <p>Saper risolvere problemi utilizzando gli strumenti della matematica (individuare e collegare le informazioni utili, confrontare strategie di soluzione, individuare schemi risolutivi di problemi come ad esempio sequenza di operazioni, esporre il procedimento risolutivo,...)</p>	<p>Regolarità e modularità nella natura e nell’opera dell’uomo (Matematica 2001). Regolarità e simmetria (m@t.abel). <i>Le attività si riferiscono al nodo concettuale delle trasformazioni elementari nel piano, esplorato attraverso la ricerca di regolarità nel quotidiano e la costruzione di significati relativi a traslazioni e simmetrie. Lo studente è condotto in modo operativo ad individuare le caratteristiche della simmetria assiale, della simmetria centrale, della traslazione per poi proporle come uno strumento per modellizzare la realtà con riferimento sia alla natura che all’opera dell’uomo.</i></p> <p>Definire quadrilateri con le simmetrie (Matematica 2001). <i>Si guidano gli studenti ad una classificazione e a definizioni dei quadrilateri facendo riferimento alle simmetrie assiali e centrali che</i></p>

			<p><i>essi presentano con attività di tipo laboratoriale e collaborativa.</i></p> <p><i>Il biliardo (Matematica 2003). A partire da un contesto di vita reale quale il gioco del biliardo si propone un percorso risolutivo di un problema che fa riferimento alle isometrie del piano.</i></p> <p><i>I pentamini (Matematica 2001). Si propone la costruzione di “pentamini” invitando gli studenti alla scoperta di quali e quanti possono essere, facendone calcolare perimetri e aree o determinare le eventuali simmetrie, chiedendo di individuare quali rappresentano lo sviluppo piano di una scatola cubica con sole cinque facce.</i></p> <p><i>Tassellazioni del piano (Matematica 2003). Viene proposto la ricerca e lo studio di possibili tassellazioni (regolari e non) del piano anche con riferimento alle trasformazioni geometriche del piano individuandone eventuali proprietà invarianti.</i></p> <p><i>Tangram e tassellazioni (m@t.abel). L’attività ricorre al “tangram” per affrontare il nodo concettuale delle tassellazioni in un contesto di gioco, con lo scopo di sviluppare i nodi concettuali dell’equiestensione, dell’equivalenza di figure piane, dell’isoperimetria. Gli studenti sono coinvolti nell’individuare e riconoscere proprietà di figure del piano, invarianti per isometrie nel</i></p>
--	--	--	---

			<p><i>piano, non solo, ma anche nell'applicare isometrie per risolvere semplici problemi, riconoscendo poligoni equiscomponibili. Nel formalizzare gli oggetti della geometria elementare si passa dal registro geometrico al registro algebrico e viceversa in modo da favorire un apprendimento di tali rappresentazioni in modo consapevole e motivato.</i></p> <p>Simmetrie nei poliedri (Matematica 2003). <i>Si indaga su come estendere, in forma intuitiva, ai poliedri le proprietà di simmetria dei poligoni fino ad individuarne gli eventuali piani di simmetria, centri di simmetria, assi di simmetria e assi di rotazione. Si giunge anche ad una descrizione corretta e condivisa di poliedro regolare e si affinano le abilità di intuizione e visione delle figure nello spazio tridimensionale.</i></p>
<p><i>Fase 7.</i> Ripresa critica del significato del procedimento di misura, riferito al contesto geometrico.</p> <p>Relazione di equiscomponibilità tra le figure poligonali; legame tra le unità di misura di lunghezza e di area (area del quadrato in funzione del suo lato).</p>	<p>Riconoscere e costruire poligoni equiscomponibili.</p>	<p>Sapere riconoscere in contesti diversi il carattere misurabile di oggetti e fenomeni e saper utilizzare strumenti di misura (saper individuare l'unità o lo strumento di misura più adatto in un dato contesto, saper stimare una misura,...)</p> <p>Conoscere e padroneggiare algoritmi e procedure (in ambito geometrico....)</p>	<p>L'area di un continente (Prove OCSE PISA) <i>E' un esempio molto interessante di misura approssimata di una superficie. Si fornisce inizialmente agli allievi una carta geografica dell'Antartide e si pone il problema: "Stima l'area dell'Antartide utilizzando la scala della carta geografica. Mostra il tuo lavoro e spiega come hai fatto la tua stima. (Puoi disegnare sulla carta se questo può aiutarti a fare la tua stima".</i> <i>L'attività si presta a una metodologia laboratoriale, con l'uso di materiale</i></p>

<p>Teorema di Pitagora (T8) e il suo inverso. ➔ “Aritmetica e algebra”</p> <p>Esempi di segmenti tra loro incommensurabili (T9), incommensurabilità tra lato e diagonale di un quadrato). ➔ “Aritmetica e algebra”</p> <p>Teoremi di Euclide.</p> <p>Aree delle principali figure piane, esplorazione del problema delle aree di figure a contorno curvilineo.</p>	<p>Dimostrare e ripercorrere logicamente almeno una delle dimostrazioni del teorema di Pitagora (T8).</p> <p>Utilizzare il teorema di Pitagora nella risoluzione di problemi.</p> <p>Dimostrare che il lato e la diagonale di un quadrato sono incommensurabili (T9).</p> <p>Calcolare perimetri e aree di poligoni.</p> <p>Saper individuare tra rettangoli isoperimetrici quelli di area massima.</p>		<p><i>tradizionale (righelli, fotocopie della carta geografica, ecc.) oppure di un software di geometria dinamica.</i></p> <p>Tangram e tassellazioni (m@t.abel). <i>(Vedere la descrizione nella Fase 6)</i></p> <p>Superfici scomode (Matematica 2003). Superfici comode e scomode (m@t.abel). <i>Si affronta il nodo concettuale dell'area di figure piane. Viene proposto un percorso per ricavare direttamente l'area di superfici a partire da esperienze di misure dirette tramite approssimazioni per eccesso e per difetto per poi passare a misure indirette di aree di figure poligonali con l'uso di formule, procedimenti e regole tipiche della geometria. Si ripercorre, inoltre, il procedimento di Archimede per determinare una approssimazione, per difetto e per eccesso, dell'area del cerchio. In tal modo viene toccato il nodo concettuale del numero π e quindi il significato di numero reale a partire da un'esperienza di misura.</i></p> <p>Il teorema di Pitagora tra leggenda e storia (Matematica 2003). Il teorema di Pitagora tra leggenda e storia (m@t.abel). <i>Si propongono alcune dimostrazioni del teorema di Pitagora prendendo spunto dalla lettura di un racconto per risvegliare l'interesse nei confronti del teorema, già noto agli allievi, e facendo riferimento</i></p>
--	---	--	--

			<p><i>all'equivalenza e all'equiscomponibilità di figure piane. L'attività si sviluppa attraverso congetture, argomentazioni, verifiche e dimostrazioni, anche ricorrendo all'ausilio di software di geometria dinamica.</i></p> <p>La radice di due va a teatro: dove si siede? (Matematica 2003).</p> <p><i>Gli studenti sono coinvolti in una rappresentazione di un passo tratto dal "Menone" di Platone per affrontare la scoperta di segmenti incommensurabili e il concetto di numero irrazionale procedendo per gradi mediante intuizioni, congetture e verifiche.</i></p> <p>Il foglio A4 (m@t.abel).</p> <p><i>Questa attività propone una prima costruzione dei numeri reali ponendo delle domande: Perché, quando si fotocopio un foglio A4, lo si può ingrandire esattamente su un foglio A3? A partire da queste domande si sviluppa un percorso che mostra la necessità di uscire dal mondo dei numeri razionali, e costruirne di nuovi: i numeri irrazionali. Il percorso prosegue mostrando come sia possibile rappresentare mediante allineamenti decimali un qualsiasi numero reale, e come si possano eseguire calcoli tra questi.</i></p> <p>Diversi tra confini uguali (m@t.abel)</p> <p><i>Partendo da una situazione concreta si pone e si affronta il problema: "figure che hanno lo stesso perimetro devono essere necessariamente anche equiestese?". Il</i></p>
--	--	--	---

			<p><i>percorso porta gli alunni a scoprire relazioni tra figure piane, a consolidare i concetti di perimetro e area di un poligono e ad acquisire piena consapevolezza della diversità esistente tra le due nozioni. Infine li porta a modellizzare la famiglia dei rettangoli isoperimetrici con la relazione algebrica $x + y = k$ e con il grafico della funzione $y = k/x$.</i></p> <p>Rettangoli e fontane (m@t.abel) <i>Quest'attività propone alcune situazioni problematiche che hanno a che fare con funzioni quadratiche: attraverso l'uso di questo tipo di funzioni come modelli per affrontare problemi relativi a situazioni realistiche. Offre un esempio di come si può utilizzare lo strumento algebrico come linguaggio per rappresentare formalmente oggetti della geometria elementare.</i></p> <p>Spunto storico: La scoperta delle grandezze incommensurabili.</p> <p>Spunto storico: Archimede e l'approssimazione della circonferenza.</p>
<p><i>Fase 8.</i> Relazione di similitudine tra le figure.</p> <p>Teorema di Talete (T10) e sue conseguenze. ➔ “Relazioni e funzioni”</p> <p>Criteri di similitudine tra</p>	<p>Individuare nel mondo reale situazioni riconducibili alla similitudine e descrivere le figure con la terminologia specifica.</p> <p>Individuare proprietà invarianti per similitudini.</p>	<p>Sapere riconoscere le forme nello spazio (riconoscere forme in diverse rappresentazioni, individuare relazioni tra forme, immagini o rappresentazioni visive; visualizzare oggetti tridimensionali a partire da una rappresentazione bidimensionale e, viceversa, rappresentare sul piano una</p>	<p>Alla ricerca della città perduta (Matematica 2001). <i>Offre un esempio di una situazione problematica che introduce lo studente al concetto di similitudine e che fa riferimento alle carte geografiche. A partire da conoscenze intuitive in tale contesto si giunge a costruire le conoscenze fondamentali che riguardano le</i></p>

<p>triangoli. Relazione tra i perimetri oppure tra le aree di triangoli o di poligoni simili. → “Relazioni e funzioni”</p> <p>Ripresa dei teoremi di Euclide dal punto di vista della similitudine.</p> <p>Esplorazione dinamica dell’omotetia.</p>	<p>Analizzare e risolvere semplici problemi mediante l’applicazione di similitudini (in particolare, di omotetie) e del teorema di Talete (T10).</p> <p>Saper confrontare per via geometrica le medie aritmetica e geometrica.</p>	<p>figura solida; cogliere le proprietà degli oggetti e le loro relative posizioni; ...)</p>	<p><i>figure simili.</i></p> <p>Ombre e proporzionalità (m@t.abel). <i>Si affronta il nodo concettuale delle similitudini, partendo dall’analisi di situazioni reali fino a giungere al nodo cruciale del teorema di Talete, unitamente alle sue conseguenze nel piano favorendo l’acquisizione della consapevolezza del suo ruolo fondamentale nella geometria piana. Gli studenti sono coinvolti in situazioni problematiche, in cui devono individuare relazioni significative tra grandezze di varia natura (proporzionalità diretta,...), quindi costruire modelli a partire da dati, utilizzando le principali famiglie di funzioni (lineari,...). Infine entrando nello specifico delle similitudini, da un punto di vista teorico, ne analizzano proprietà e invarianti, collegandole alle situazioni reali ad esse riconducibili.</i></p> <p>Superfici comode e scomode (m@t.abel). <i>(Vedere la descrizione nella Fase 7)</i></p> <p>Alla ricerca del rettangolo più bello (Matematica 2003). <i>L’attività mira a far riconoscere in contesti reali (arte, architettura, tecnica, ...) figure simili avvalendosi di immagini e fotografie e utilizzando, possibilmente, un software di geometria dinamica.</i></p> <p>Quanto costa una pizza all’equatore? (Matematica 2003).</p>
---	--	--	---

			<p><i>L'attività, specialmente nei primi due problemi che propone, rappresenta un buon esercizio sulle similitudini e sulla proporzionalità per verificare la consapevole acquisizione di tali concetti da parte degli studenti.</i></p> <p>Spunto storico: Talete e la misura dell'altezza della piramide. Sezione aurea.</p>
--	--	--	--

Consigli e “sconsigli”

- Non partire da un'impostazione assiomatica, ma mettere in evidenza l'importanza dei teoremi, senza far imparare troppe dimostrazioni; è impossibile, non c'è il tempo e si perderebbe il significato di quelle poche che sono veramente importanti: dimostrare tutto è come non dimostrare nulla.
- Argomentare e congetturare vengono prima di dimostrare
- Sottolineare che la geometria rappresenta “Il punto d'incontro tra la matematica intesa come teoria e la matematica intesa come serbatoio di modelli” [da C. Mammana, V. Villani (editors), *Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century. An ICMI Study*, Kluwer, 1998, p. 338]
- Mantenere la geometria connessa agli altri ambiti (Aritmetica e algebra, Relazioni e funzioni, Dati e previsioni) e sottolineare continuamente i collegamenti tra di loro
- La geometria non è un formulario per trovare lunghezze, aree e volumi; è necessario presentarla come un ambito molto importante per scoprire, sperimentare, visualizzare, argomentare proprietà e collegamenti tra una teoria matematica e il mondo reale
- Si sconsiglia di trascurare la geometria: vuol dire privare gli allievi di un ambito estremamente importante per l'apprendimento della matematica e tarpare le ali anche agli altri ambiti del sapere matematico
- Si sconsiglia di chiedere definizioni imparate solo a memoria; prima occorre capire e costruire i concetti e poi definire; gli allievi comprendono anche se non sanno ancora definire
- Si sconsiglia di presentare una dimostrazione in modo dettagliato (mettendo cioè in evidenza i vari passi e che cosa si utilizza per giustificarli) se prima non è chiaro il significato che ha “il dimostrare” e che cosa esso presuppone (una teoria, degli assiomi,...)

NOTE

Prove di verifica

Alcuni esempi di prove di verifica si trovano nella cartella “ Verifiche_Geom”

Altri materiali

Altri materiali sono presenti nella cartella “Materiali_Geom”

PERCORSO DI DATI E PREVISIONI

Premessa

Nel vivere quotidiano sta diventando sempre più importante saper valutare le numerose informazioni statistiche che giungono da diverse fonti, comprenderne il significato e riconoscerne l'attendibilità. Inoltre il saper affrontare l'incertezza fornisce al cittadino responsabile e consapevole uno strumento utile per capire i fenomeni (naturali, sociali, economici e politici) in modo da svolgere un'attività di osservazione e di controllo.

“Dati e previsioni”, ossia statistica e probabilità, offrono l'opportunità di avvicinare lo studio della matematica alla realtà quotidiana, creando curiosità nello studente verso informazioni quantitative che egli stesso può raccogliere sul mondo che lo circonda, portandolo ad analizzare dati, misure, tabelle e loro elaborazioni, grafici che aiutano a comprendere fenomeni complessi. Valorizzando il contatto col mondo reale, lo studente può essere gradualmente guidato ad affrontare gli esiti di eventi incerti e la misura della verosimiglianza del loro verificarsi. Non è solo la vita quotidiana a poter richiedere la raccolta di informazioni quantitative, la loro organizzazione e analisi, ma anche le attività sperimentali proprie delle scienze: fisiche, biologiche, mediche, ecc. Ciò fornisce l'opportunità di fare affrontare agli studenti problemi di misurazione e gestione degli errori, coinvolgendo argomenti di statistica, probabilità e di altre discipline sperimentali, mostrando la valenza interdisciplinare di questo ambito.

È indispensabile saper cogliere i vantaggi che l'insegnamento-apprendimento di questi argomenti ha per le altre parti della matematica. Infatti uno sviluppo adeguato di statistica e probabilità è utile per passare in modo semplice dal linguaggio naturale a quello simbolico e per rafforzare le conoscenze legate agli altri ambiti quali “Aritmetica e algebra”, “Geometria” e “Relazioni e funzioni”. Tra l'altro la statistica offre la possibilità di far entrare contesti reali in classe, di affrontare gli argomenti con strategie di problem solving, anche avvalendosi dell'uso di fogli di calcolo di grande diffusione. Il momento della comunicazione, competenza di cui la società moderna fa largo uso, dà modo di esporre conclusioni basate su numeri, che sono il risultato dell'elaborazione di dati.

La probabilità, coniugata con la statistica, offre poi strategie da perseguire per affrontare al meglio (e correttamente) l'incertezza; il chiedersi cosa potrà accadere e il poterlo verificare attraverso esperimenti o simulazioni sarà un elemento decisivo per superare alcuni degli innumerevoli misconcetti che, in ambito statistico e probabilistico, sono troppo spesso presenti negli adulti.

Indicazioni metodologiche

- a) Come precedentemente sottolineato, utilizzare le informazioni tratte dalla vita quotidiana e dai mezzi di comunicazione serve a invogliare e motivare sempre di più gli studenti ad affrontare argomenti di statistica e di calcolo delle probabilità.
- b) Operare in contesti quantitativi interessanti e coinvolgenti può essere un utile supporto per passare dalla realtà alla sua astrazione simbolica, introducendo gradualmente il linguaggio formale della matematica, in modo che gli studenti arrivino a percepire che le formule non sono altro che un linguaggio che ha il vantaggio della concisione e della non ambiguità.
- c) L'attività di problem solving abituerà gli studenti ad accettare con “dignità” i propri errori nella risoluzione dei problemi e permetterà loro di capire che, talvolta, una risoluzione adeguata e soddisfacente a un problema può essere determinata solo con un cambio di prospettiva reso possibile anche dall'acquisizione e dallo sviluppo di nuovi concetti e dalla scelta di strategie diverse.
- d) Per la conduzione delle attività in classe viene suggerita soprattutto la tecnica del lavoro in gruppi che favorisce la cooperazione e collaborazione fra studenti e l'interazione continua con il docente.
- e) Si ribadisce l'importanza dell'uso delle tecnologie informatiche che, semplificando alcuni aspetti operativi come elaborazioni, modellizzazioni e simulazioni, permette di focalizzare l'attenzione sulla parte più strettamente concettuale dei contenuti.

- f) Le attività di “Dati e previsioni” possono essere utilizzate anche come supporto allo studio delle altre tematiche in quanto i collegamenti sono molti, suggestivi e basati su informazioni quantitative, interessanti e coinvolgenti [tali collegamenti saranno evidenziati all’interno del percorso].
- g) Gli argomenti di questo ambito possono essere introdotti in un qualunque momento della programmazione in quanto possono operare trasversalmente e non richiedono continuità se non quella dovuta alla necessità del richiamo alle conoscenze e abilità presenti nei contenuti già svolti.
- h) Le attività di probabilità vanno svolte dando agli studenti il tempo adeguato per appropriarsi di concetti e dei metodi di base della teoria piuttosto complessa.

Dalle *Indicazioni Nazionali*: ”Lo studente sarà in grado di rappresentare e analizzare in diversi modi (anche utilizzando strumenti informatici) un insieme di dati, scegliendo le rappresentazioni più idonee. Saprà distinguere tra caratteri qualitativi, quantitativi discreti e quantitativi continui, operare con distribuzioni di frequenze e rappresentarle. Saranno studiate le definizioni e le proprietà dei valori medi e delle misure di variabilità, nonché l’uso strumenti di calcolo (calcolatrice, foglio di calcolo) per analizzare raccolte di dati e serie statistiche. Lo studio sarà svolto il più possibile in collegamento con le altre discipline anche in ambiti entro cui i dati siano raccolti direttamente dagli studenti.

Lo studente apprenderà la nozione di probabilità, con esempi tratti da contesti classici e con l’introduzione di nozioni di statistica.

Lo studente studierà alcuni esempi di modelli matematici in diversi ambiti, apprenderà a descriverne le caratteristiche principali e distinguerne gli aspetti specifici.”

Il percorso qui proposto comprende:

- a) lo sviluppo di conoscenze disciplinari relative alla statistica e al calcolo delle probabilità, in continuità con quanto acquisito durante il precedente corso di studi, a partire dall’esperienza diretta degli studenti;
- b) la continua applicazione di contenuti presenti anche in altri ambiti che dovrebbero essere già in possesso degli studenti, e che dagli argomenti in questione vengono ulteriormente rinforzati e approfonditi (frazioni, decimali, percentuali, proporzioni, linguaggio degli insiemi);
- c) l’avvio al pensiero combinatorio, che verrà poi sviluppato in forma compiuta nel secondo biennio, attraverso la risoluzione di problemi che richiedano il calcolo della numerosità di insiemi in situazioni semplici, con metodi intuitivi e attraverso il ricorso a strumenti di rappresentazione

Si ritiene essenziale introdurre l’ambito “Dati e previsioni” mediante un’indagine.

Condurre una indagine offre agli studenti e agli insegnanti la possibilità di far matematica a partire da dati relativi a fenomeni reali provenienti dall’esperienza diretta degli studenti o dallo studio di altre discipline scolastiche, quali ad esempio la Geografia, la Storia o le Scienze; permette inoltre di formulare congetture, risolvere problemi o verificare ipotesi mediante l’osservazione dei dati organizzati in tabelle, rappresentati con opportuni grafici, sintetizzati attraverso indici opportuni. Offre al docente la possibilità, a partire dai dati rilevati, di passare dal linguaggio naturale a quello simbolico; permette di affrontare tematiche appartenenti ad altri ambiti (insiemi e operazioni fra essi; frazioni e numeri decimali, percentuali; funzioni e loro rappresentazioni ...)

Si fa notare che l’indagine non ha bisogno di prerequisiti particolari e può essere condotta a inizio anno scolastico anche per riprendere alcuni concetti che gli studenti hanno già acquisito negli anni precedenti.

Statistica descrittiva

Conoscenze	Abilità	Competenze	Attività
<p><i>a) I dati, loro organizzazione e rappresentazione:</i> Definire la popolazione, l'unità statistica, e il collettivo statistico. Definire i caratteri e le modalità.</p>	<p>Saper progettare e condurre semplici indagini statistiche.</p> <p>Raccogliere ed organizzare una serie di dati relativi ad un fenomeno oggetto di studio anche attraverso l'uso di un questionario o l'utilizzo delle fonti.</p> <p>Individuare l'unità statistica, il collettivo statistico, i caratteri da analizzare e loro classificazione.</p> <p>Predisporre la matrice dei dati raccolti.</p>	<p>Individuare le strategie appropriate per la soluzione di problemi</p>	<p>I giovani e la musica (m@t.abel) <i>Organizzare una indagine, Classificazione dei caratteri: distribuzione di frequenze assolute, relative, e loro uso</i></p> <p>Come ci alimentiamo (Matematica 2001) <i>Conduzione di una indagine su un tema coinvolgente di interesse generale (la salute fisica) e investe anche la sfera emotiva per i significati psichici e sociali che l'alimentazione investe</i></p> <p>Come ci alimentiamo (m@t.abel) <i>Organizzare una ricerca, interpretare i dati usando metodi statistici, usare ed interpretare misure di centralità e dispersione</i></p> <p>Indagine: Il censimento a scuola (ISTAT - http://petra1.istat.it/censb/index.htm)</p> <p>Rivista Induzioni n.21 "Una indagine in classe per apprendere la statistica", pp. 15 – 27</p> <p>Rivista Induzioni n. 29 "Didattica per concetti ed insegnamento della statistica", pp. 33 – 49</p> <p>Indagine: "Arrivare a scuola" (Matematica 2003) <i>L'attività prevede la problematizzazione delle situazioni, la predisposizione di un questionario, la raccolta dei dati, la loro elaborazione e rappresentazione grafica, la loro interpretazione</i> oppure:</p>

<p><i>b) Distribuzioni delle frequenze a seconda del tipo di carattere</i></p> <p>Conoscere la frequenza assoluta come conteggio. Conoscere la differenza tra frequenza assoluta (conteggio) e intensità (misura).</p>	<p>Saper costruire la distribuzione di frequenze associata ad un carattere qualitativo o quantitativo anche suddiviso in classi, con le informazioni necessarie per la sua lettura.</p> <p>Saper calcolare la frequenza relativa e la frequenza percentuale.</p> <p>Saper distinguere le distribuzioni di frequenza dalle distribuzioni di intensità.</p> <p>Saper leggere e interpretare una tabella che riporta la distribuzione di frequenza associata ad un carattere sia in termini assoluti che relativi o percentuali sviluppando deduzioni e ragionamenti sugli stessi.</p>	<p>Analizzare dati e interpretarli sviluppando deduzioni e ragionamenti sugli stessi anche con l'ausilio di rappresentazioni grafiche, usando consapevolmente gli strumenti di calcolo e le potenzialità offerte da applicazioni specifiche di tipo informatico (<i>per la costruzione di tabelle</i>)</p>	<p>http://www.indire.it/studicaso/html/index.php?id_cs=258</p> <p>I giovani e la musica (m@t.abel) <i>L'attività prevede la conduzione di una indagine statistica su una problematica scelta e condivisa con gli studenti e va dalla predisposizione del questionario, alla raccolta dei dati, alla loro elaborazione e rappresentazione grafica ed alla loro interpretazione</i></p> <p>Come ci alimentiamo (Matematica 2001) <i>Conduzione di una indagine su un tema coinvolgente di interesse generale (la salute fisica) e investe anche la sfera emotiva per i significati psichici e sociali che l'alimentazione investe</i></p> <p>Il censimento a scuola (ISTAT - http://petra1.istat.it/censb/index.htm)</p> <p>Pivot è bello (Matematica 2003) <i>Uso del computer per classificazione dei caratteri: distribuzione di frequenze assolute, relative, cumulate e loro uso</i></p> <p>Rivista Induzioni n.21 "Una indagine in classe per apprendere la statistica", pp. 28 – 36</p> <p>Pivot è bello (m@t.abel) <i>L'attività evidenzia la necessità della "codifica numerica" delle informazioni acquisite in una indagine e la predisposizione di un database contenete in ogni record tutte le caratteristiche osservate per ogni unità statistica. La costruzione della distribuzione di frequenza associata ad un carattere viene effettuata attraverso l'uso del foglio elettronico (strumento tabelle pivot) che rende comoda e agevole la manipolazione di una grande quantità di dati tratti da un database</i></p>
--	---	--	--

			<p>Concetti chiave della statistica.pdf (in allegato) <i>M. G. Ottaviani, Note importanti sui concetti chiave della statistica come: elementi base, sistemazione dei dati, i grafici</i></p>
<p><i>c) e principali rappresentazioni grafiche.</i> Conoscere i grafici a barre, a settori circolari, per punti (o per ordinate), l'istogramma.</p>	<p>Scegliere e costruire il tipo di grafico più adatto a rappresentare una distribuzione statistica (a barre, a settori circolari, per ordinate, istogramma). Saper identificare le distribuzioni statistiche rappresentabili mediante istogramma (distribuzioni in classi); Saper leggere e interpretare le informazioni derivanti dai grafici sviluppando deduzioni e ragionamenti sugli stessi.</p>	<p>Analizzare dati e interpretarli sviluppando deduzioni e ragionamenti sugli stessi anche con l'ausilio di rappresentazioni grafiche, usando consapevolmente gli strumenti di calcolo e le potenzialità offerte da applicazioni specifiche di tipo informatico (<i>per la costruzione di grafici</i>)</p>	<p>I giovani e la musica (m@t.abel) <i>L'attività prevede la conduzione di una indagine statistica su una problematica scelta e condivisa con gli studenti e va dalla predisposizione del questionario, alla raccolta dei dati, alla loro elaborazione e rappresentazione grafica ed alla loro interpretazione</i></p> <p>Grafico è bello (Matematica 2003) <i>L'attività mostra come passare dai dati grezzi alle distribuzioni di frequenze ed alle corrispondenti rappresentazioni grafiche. Studia contesti axtramatematici in quanto si basa su un'attività interdisciplinare con la storia e l'educazione civica</i></p> <p>I grafici parlano ... (Matematica 2003) <i>Attività che utilizza i risultati di una indagine per mostrare rappresentazioni grafiche particolarmente utili a sintetizzare le tabelle a coglierne il significato</i></p> <p>I grafici ... questi sconosciuti (m@t.abel) <i>L'attività coniuga la conoscenza delle diverse rappresentazioni grafiche usate per le distribuzioni statistiche con la capacità di saperle costruire e la competenza di saper scegliere quella più adatta a risolvere il problema reale da studiare</i></p> <p>Rivista Induzioni n. 21 "Una indagine in classe per apprendere la statistica" pp. 37 – 49.</p>

<p><i>d) Valori medi</i> Conoscere il significato generale di Media. Conoscere la media aritmetica, la moda e la mediana. Conoscere le proprietà della media aritmetica.</p> <p>Conoscere l'esistenza di altre medie analitiche utilizzante anche nelle scienze sperimentali (geometrica, armonica, quadratica).</p>	<p>Individuare la moda e la mediana di una serie di dati e la moda di una distribuzione di frequenza.</p> <p>Calcolare la media aritmetica di una serie di dati e di una distribuzione di frequenza.</p> <p>Scoprire l'esistenza di altri valori medi in situazione problematiche diverse (es. dalla fisica, dall'economia).</p> <p>Saper scegliere quale valor medio utilizzare per sintetizzare una distribuzione di frequenza.</p> <p>Saper interpretare il significato del valor medio utilizzato.</p> <p>Saper riconoscere ed utilizzare in contesti reali gli indici di sintesi più idonei evitando di usare sempre e solo la media aritmetica.</p>	<p>Individuare le strategie appropriate per la soluzione di problemi</p> <p>Analizzare dati ed interpretarli sviluppando deduzioni e ragionamenti sugli stessi anche con l'ausilio di rappresentazioni grafiche, usando consapevolmente gli strumenti di calcolo e le potenzialità offerte da applicazioni specifiche di tipo informatico</p>	<p>Di media non ce n'è una sola 1-2 (m@t.abel) <i>L'attività coniuga la conoscenza dei principali valori medi per caratteri quantitativi e delle loro proprietà con la capacità di saperli calcolare, del loro contesto e con la competenza di saper scegliere fra i diversi valori medi quello più opportuno per il problema da affrontare</i></p> <p>Rivista Induzioni n. 21 "Una indagine in classe per apprendere la statistica" pp. 50 – 61.</p> <p>Di media <u>non</u> ce n'è una sola (Matematica 2003) <i>L'attività ha l'obiettivo di "fugare" la credenza ampiamente diffusa nell'opinione pubblica, che esita soltanto la media aritmetica (la cosiddetta "media matematica") utile per giustificare o risolvere qualunque problema in cui occorra individuare un indice sintetico</i></p> <p>Rivista Induzioni n. 23</p> <p>Proprietà della media aritmetica.doc (in allegato) G. Baruzzo e P. Ranzani, <i>Applicazione del calcolo letterale per dimostrare alcune proprietà della media aritmetica. Verifica delle stesse tramite simulazione al computer</i></p> <p>Mediana e quantili. pdf (in allegato) M. G. Ottaviani, <i>Induzioni, 23, 2001, pp. 33 - 81</i> <i>Informazioni fondamentali sulla mediana e i quantili e sul loro utilizzo in statistica</i></p> <p>Stocastica e ... legami intradisciplinari (m@t.abel) <i>Offre un esempio di utilizzo di alcuni valori medi in geometria e la verifica delle proprietà della media aritmetica</i></p>
---	---	---	---

<p><i>e) Misure di variabilità.</i> Conoscere il campo di variazione, la varianza e lo scarto quadratico medio (deviazione standard).</p> <p>Conoscere il coefficiente di variabilità come strumento di confronto tra caratteri diversi.</p>	<p>Calcolare i diversi indici di variabilità per un carattere quantitativo: campo di variazione, varianza, scarto quadratico medio e coefficiente di variabilità.</p> <p>Padroneggiare l'uso della lettera come mero simbolo e come variabile.</p> <p>Saper scegliere, descrivere ed interpretare l'indice di variabilità utilizzato in contesti diversi.</p>	<p>Individuare le strategie appropriate per la soluzione di problemi.</p> <p>Analizzare dati ed interpretarli sviluppando deduzioni e ragionamenti sugli stessi anche con l'ausilio di rappresentazioni grafiche, usando consapevolmente gli strumenti di calcolo e le potenzialità offerte da applicazioni specifiche di tipo informatico.</p>	<p>Rivista Induzioni n.21 “Una indagine in classe per apprendere la statistica”, pp. 62 – 70</p> <p>Pivot è bello (m@t.abel) <i>L'attività evidenzia la necessità della “codifica numerica” delle informazioni acquisite in una indagine e la predisposizione di un database contenete in ogni record tutte le caratteristiche osservate per ogni unità statistica. La costruzione della distribuzione di frequenza associata ad un carattere viene effettuata attraverso l'uso del foglio elettronico (strumento tabelle pivot) che rende comoda e agevole la manipolazione di una grande quantità di dati tratti da un database</i></p> <p>“Siamo vincoli o sparpagliati” (m@t.abel) <i>Questa attività si configura come un percorso per l'analisi della variabilità di dati osservati attraverso la costruzione di indici che mettano in luce la variabilità fra i dati oppure rispetto ad un valore medio preso come termine di riferimento. In questo caso l'uso e la comprensione della geometria potrà aiutare gli studenti a meglio capire i concetti proposti e la loro misura. Il percorso è stato predisposto in modo che siano possibili diversi livelli di approfondimento, tenuto conto della conoscenze e competenze già sviluppate dagli studenti</i></p> <p>Approfondimenti sulla Variabilità.pdf (in allegato) M. G. Ottaviani, <i>Induzioni</i>, 23, 2001, pp. 33 - 81 <i>Informazioni fondamentali di statistica descrittiva sugli indici di variabilità, le loro proprietà ed il loro utilizzo</i></p>
---	---	---	--

Collegamenti

Argomento	Strumenti	Collegamenti con	Attraverso
<i>a) I dati, loro organizzazione e rappresentazione</i>	Definire la popolazione, l'unità statistica, il collettivo statistico. Definire i caratteri e le loro modalità.	Aritmetica e algebra Relazioni e funzioni	Dare importanza ai dati per acquisire informazioni e per prendere decisioni La distribuzione statistica come insieme di dati da esaminare, rappresentare ed esplorare congiuntamente per cogliere l'informazione statistica La variabilità dei dati come caratteristica della realtà e conseguente esigenza di individuarne le fonti causali, distinguendole da quelle casuali
<i>b) Distribuzioni delle frequenze a seconda del tipo di carattere</i>	Tabelle e loro distribuzione di frequenza.	Aritmetica e algebra Relazioni e funzioni	Frazioni, numeri decimali, percentuali Valori approssimati Notazione scientifica L'uso dello strumento elettronico per costruire una tabella <i>Gli studenti devono apprendere che i dati sono generati con riferimento a fenomeni o situazioni particolari e sono qualcosa di più che numeri e che la statistica trasforma i numeri in conoscenza</i>
<i>c) e principali rappresentazioni grafiche</i>	Diagrammi cartesiani Grafici a settori circolari Istogrammi	Relazioni e funzioni Geometria Aritmetica e algebra Geometria Relazioni e funzioni Aritmetica e algebra	Prodotto cartesiano, relazioni binarie, funzioni Il metodo delle coordinate: il piano cartesiano Rappresentazione grafica delle funzioni Lo strumento elettronico per fare i grafici Frequenze percentuali Individuazione dei settori circolari Area dei rettangoli Densità di frequenza
<i>d) Valori medi</i>	I diversi tipi di media (aritmetica, geometrica, armonica), moda e mediana.	Aritmetica e algebra Geometria	Il calcolo delle diverse medie e la verifica delle loro proprietà Uso del formalismo algebrico La media aritmetica è associativa? Riscoprire l'uso di alcuni valori medi in proprietà di figure geometriche (teoremi di Euclide) Riscoprire l'uso di alcuni valori medi in alcuni teoremi di

			geometria
<i>e) Misure di variabilità</i>	Campo di variazione e deviazione standard.	Aritmetica e algebra	Il calcolo delle misure di variabilità Uso del formalismo algebrico Padroneggiare l'uso della lettera come simbolo e come variabile

Avvio al pensiero combinatorio e calcolo della probabilità

Conoscenze	Abilità	Competenze	Attività
<p><i>a) Esperimenti</i></p> <p>Conoscere le caratteristiche di un esperimento (deterministico e casuale). Individuare l'insieme dei possibili esiti di un esperimento casuale. Conoscere il linguaggio degli insiemi: unione, intersezione, insieme differenza, insieme complementare. Conoscere il principio di addizione e sottrazione. Conoscere algoritmi e procedure (in ambito aritmetico, geometrico...).</p> <p>Conoscere diverse forme di rappresentazione e sapere passare da una all'altra (verbale, scritta, simbolica, grafica, ...).</p>	<p>Saper costruire lo spazio degli eventi elementari in situazioni semplici e determinarne la cardinalità.</p> <p>Saper individuare gli esiti di un esperimento aleatorio in contesti diversi.</p> <p>Saper utilizzare il principio di addizione e sottrazione per il calcolo di cardinalità di insiemi finiti.</p> <p>Saper utilizzare algoritmi e procedure (in ambito aritmetico, geometrico...).</p> <p>Saper utilizzare diverse forme di rappresentazione ed essere in grado di passare da una all'altra (verbale, scritta, simbolica, grafica, ...).</p>	<p>Individuare le strategie appropriate per la soluzione di problemi</p>	<p>Un gioco con tre dadi (Matematica 2003) Un gioco con tre dadi (m@t.abel) <i>Nozioni di probabilità, con esempi tratti da contesti classici e con l'introduzione di concetti di statistica</i> Frequenza relativa e assoluta (Matematica 2001) <i>Interpretazione in termini probabilistici dei risultati relativi a prove multiple di eventi in contesti reali</i></p> <p>Rivista Induzioni n. 41 "Una linea costruttiva nell'insegnare permutazioni e combinazioni", pp. 147 – 151</p> <p>Calcolo_Combinatorio.pdf (in allegato) <i>G. Anichini, Il calcolo combinatorio aiuta "a fare i conti"</i></p> <p>Calcolo_Combinatorio1.pdf (in allegato) <i>G. Anichini, Informazioni sul calcolo combinatorio e suo utilizzo nella probabilità. Vari esempi di applicazione in contesti diversi</i></p> <p>PilloleDiCalcoloCombinatorio.pdf (in allegato)</p>

	Acquisire progressivamente forme tipiche del pensiero matematico (congetturare, verificare, giustificare, definire, generalizzare, ...).		<i>R. Paoletti</i> www.matapp.unimib.it/~paoletti/sociologia/corso_sociologia.pdf <i>Informazioni sul calcolo combinatorio e vari esempi di applicazione dal principio della moltiplicazione alla formalizzazione</i>
<i>b) Evento impossibile, ed evento certo; eventi contrari, eventi incompatibili ed eventi compatibili.</i> Conoscere le diverse tipologie di eventi casuali associati ad un esperimento aleatorio (elementari e non, incompatibili, compatibili). Prodotto cartesiano. Principio di moltiplicazione.	Saper riconoscere i diversi tipi di eventi casuali. Saper riconoscere eventi casuali certi, possibili ed impossibili. Saper riconoscere eventi casuali contrari. Saper riconoscere e distinguere eventi casuali compatibili ed incompatibili. Saper rappresentare gli esiti di un esperimento casuale con strumenti diversi (insiemi, grafi ad albero, prodotto cartesiano, tabelle). Saper applicare il principio di moltiplicazione per contare gli oggetti che si possono rappresentare in questo modo. Saper rappresentare il risultato del lancio di due o più dadi, di due o più monete, come coppie, terne, sequenze ordinate (prodotto cartesiano di due o più insiemi). Saper usare strumenti per la rappresentazione (tabelle, diagrammi ad albero) per il prodotto cartesiano di due o più insiemi.	Individuare le strategie appropriate per la soluzione di problemi (<i>anche con l'aiuto di conoscenze in ambiti diversi (insiemi e loro operazioni; tipi di rappresentazioni)</i>)	Dolci... Eventi (m@t.abel) <i>Questa attività ha lo scopo di indurre ad un'individuazione corretta dello spazio degli eventi elementari per esperimenti casuali attraverso l'esame di diverse situazioni problematiche e tende a condurre gli allievi a considerare gli esiti elementari associati ai diversi esperimenti casuali e a costruire eventi composti</i> Esperimenti... Esiti... Eventi (m@t.abel) <i>Questa attività vuole far acquisire agli allievi l'importanza di conoscere, comprendere e utilizzare le informazioni disponibili relative all'esperimento casuale che si intende condurre, al fine di pervenire alla corretta individuazione di tutti gli esiti possibili: lo spazio degli eventi elementari</i> Riflessione linguistica sul "mondo della probabilità" (Matematica 2001) <i>L'attività propone di indurre negli studenti una riflessione linguistica sul "mondo della probabilità". Si intende far acquisire la consapevolezza della varietà e la ricchezza dei termini che si incontrano nel linguaggio ordinario per esprimere "l'incerto", il "possibile", il "verosimile", fanno riferimento ad</i>

			<i>un ampio ventaglio di contesti e situazioni che si presentano nella vita quotidiana.. Quando si passa, invece, all'uso formale dei termini in campo scientifico, nasce la necessità di definire in maniera precisa e in termini quantitativi, la nozione di probabilità)</i>
<p><i>c) Probabilità di un evento.</i> Conoscere l'interpretazione classica nell'assegnazione della probabilità di un evento casuale. Conoscere il valore della probabilità dell'evento casuale certo e dell'evento impossibile; conoscere il valore della probabilità di un evento casuale e del suo complementare.</p>	<p>Assegnare la probabilità ad un evento casuale: certo, impossibile, possibile e al suo complementare.</p>	<p>Individuare le strategie appropriate per la soluzione di problemi (<i>anche con l'aiuto di conoscenze in ambiti diversi (insiemi e loro operazioni; tipi di rappresentazioni)</i>)</p>	<p>Assegnazioni.pdf (in allegato) <i>G. Anichini, Eventi casuali e loro probabilità. Cosa si intende per probabilità e riflessioni sulle diverse assegnazioni di probabilità (classifica, frequentista, soggettiva,</i></p> <p>Vorrei una figlia con i capelli rossi (m@t.abel) <i>Ha lo scopo di far acquisire agli allievi l'importanza di conoscere, comprendere e utilizzare le informazioni disponibili sull'esperimento casuale che si intende condurre, per una corretta assegnazione della probabilità agli eventi casuali semplici e composti che un esperimento aleatorio può produrre</i></p> <p>Qual è la probabilità di .. sapendo che ... (m@t.abel) <i>L'attività porta ad individuare eventi casuali dipendenti ed indipendenti, eventi casuali provenienti da esperimenti articolati in più fasi fino ad assegnare a ciascuno le rispettive probabilità composte, totali, e ad applicare la regola di Bayes</i></p>
<p><i>d) Probabilità degli eventi compatibili ed incompatibili.</i> Conoscere le modalità di calcolo della probabilità dell'unione di eventi casuali</p>	<p>Calcolare la probabilità di eventi ottenuti come unione o intersezione di altri eventi compatibili e non. (proprietà additiva).</p>	<p>Individuare le strategie appropriate per la soluzione di problemi (<i>anche con l'aiuto di conoscenze in ambiti diversi (insiemi e loro operazioni; tipi di rappresentazioni)</i>)</p>	<p>Qual è la probabilità di .. sapendo che ... (m@t.abel) <i>L'attività porta ad individuare eventi casuali dipendenti ed indipendenti, eventi casuali provenienti da esperimenti articolati in più fasi</i></p>

compatibili ed incompatibili.			<i>fino ad assegnare a ciascuno le rispettive probabilità composte, totali, e ad applicare la regola di Bayes</i>
<i>f) Eventi indipendenti ed eventi dipendenti; probabilità condizionata.</i> Riconoscere quando due eventi casuali sono indipendenti e quando sono dipendenti; Conoscere le modalità di calcolo della probabilità dell'intersezione di eventi casuali dipendenti ed indipendenti;	Rappresentare eventi indipendenti o dipendenti, associati ad un esperimento, con modalità diverse (insiemi, tabelle, grafi ad albero). Assegnare la probabilità all'evento intersezione di due eventi indipendenti o dipendenti. Saper valutare la probabilità in contesti problematici diversi.	Individuare le strategie appropriate per la soluzione di problemi	Indipendenza.pdf (in allegato) <i>G. Anichini, Eventi condizionati e loro probabilità. Il concetto di indipendenza (stocastica)</i> Qual è la probabilità di ... sapendo che ... (m@t.abel) <i>L'attività porta ad individuare eventi casuali dipendenti ed indipendenti, eventi casuali provenienti da esperimenti articolati in più fasi fino ad assegnare a ciascuno le rispettive probabilità composte, totali, e ad applicare la regola di Bayes</i>
<i>g) Frequenza relativa e probabilità</i> Conoscere l'assegnazione della probabilità di un evento casuale in ambito frequentista.	Sapere le diverse concezioni e valutazione della probabilità. Saper valutare la probabilità in contesti problematici diversi.	Individuare le strategie appropriate per la soluzione di problemi	Se si insiste ... non si vince (Matematica 2003) <i>L'attività consente di analizzare e valutare la probabilità in diversi contesti problematici</i> Frequenza assoluta o frequenza relativa? (Matematica 2001) <i>L'attività favorisce una discussione e una riflessione che metta in evidenza i numerosi misconcetti e fraintendimenti che sono alla base delle considerazioni che vengono fatte nelle situazioni di incertezza. Tali fraintendimenti nascono anche dalla mancata distinzione tra frequenza assoluta e frequenza relativa</i> Frequenza assoluta o frequenza relativa? (m@t.abel) <i>L'attività favorisce una discussione e una riflessione che metta in evidenza i numerosi</i>

			<p><i>misconcetti e fraintendimenti che sono alla base delle considerazioni che vengono fatte nelle situazioni di incertezza. Tali fraintendimenti nascono anche dalla mancata distinzione tra frequenza assoluta e frequenza relativa</i></p> <p>Qual è la probabilità di ... sapendo che ... (m@t.abel)</p> <p><i>L'attività porta ad individuare eventi casuali dipendenti ed indipendenti, eventi casuali provenienti da esperimenti articolati in più fasi fino ad assegnare a ciascuno le rispettive probabilità composte, totali, e ad applicare la regola di Bayes</i></p> <p>Calcolo_Combinatorio1.pdf (in allegato) G. Anichini, <i>Informazioni sul calcolo combinatorio e suo utilizzo nella probabilità. Vari esempi di applicazione in contesti diversi</i></p>
--	--	--	---

Collegamenti

Argomento	Strumenti	Collegamenti con	Attraverso
<i>a) Esperimenti</i>	<p>Lo spazio degli eventi casuali elementari in semplici esperimenti aleatori e valutazione della cardinalità.</p> <p>Il principio di addizione e sottrazione per il calcolo di cardinalità di insiemi finiti.</p>	<p>Relazioni e funzioni</p> <p>Aritmetica e algebra</p>	<p>Terminologia degli insiemi, la loro rappresentazione, le loro operazioni;</p> <p>Le relazioni e le loro rappresentazioni: per elencazione, in tabella, mediante grafo;</p> <p>L'insieme dei numeri naturali e dei numeri razionali;</p>
<i>b) Evento impossibile, ed evento certo</i> <i>Eventi contrari o</i>	Evento casuale certo, impossibile, contrario o complementare.	Relazioni e funzioni	<p>Terminologia degli insiemi, la loro rappresentazione, le loro operazioni</p> <p>Le relazioni e le loro rappresentazioni: per elencazione, in</p>

<i>complementari Eventi incompatibili ed eventi compatibili.</i>	Eventi casuali compatibili ed incompatibili. Rappresentazione degli esiti di un esperimento casuale con modalità diverse (insiemi, tabelle, grafi ad albero, prodotto cartesiano).		tabella, mediante grafo Coppie ordinate; prodotto cartesiano
<i>c) Probabilità di un evento.</i>	Assegnazione di probabilità ad un evento aleatorio; certo, impossibile; al suo complementare.	Aritmetica e algebra	Frazioni, loro struttura d'ordine, loro equivalenza, loro operazioni Numeri decimali, loro struttura d'ordine; numeri percentuali
<i>d) Probabilità degli eventi compatibili ed incompatibili;</i>	Assegnazione di probabilità all'unione, intersezione di eventi casuali incompatibili, compatibili.	Relazioni e funzioni Aritmetica e algebra	Terminologia degli insiemi, le loro operazioni, la loro rappresentazione Frazioni, loro struttura d'ordine, loro equivalenza, loro operazioni; Numeri decimali, loro struttura d'ordine
<i>f) Eventi indipendenti ed eventi dipendenti; probabilità condizionata;</i>	Rappresentazione di esiti di un esperimento casuale, con modalità diverse, riconoscendo eventi casuali indipendenti o dipendenti ed operazioni fra eventi. Assegnazione di probabilità all'evento casuale intersezione di due eventi indipendenti e di due eventi dipendenti.	Relazioni e funzioni	Il linguaggio degli insiemi e delle operazioni fra insiemi, tabelle, grafi ad albero
<i>g) Frequenza relativa e probabilità</i>	Significato della probabilità e delle sue valutazioni.	Aritmetica ed algebra	Numeri decimali e percentuali

Consigli e “sconsigli”

a) Far raccogliere agli studenti, sfruttando la loro innata curiosità, informazioni quantitative su argomenti che li coinvolgono direttamente, ma anche su argomenti che riguardano le altre materie oggetto dei loro studi come la fisica, l'economia, la storia, la biologia e che richiedono o la ripetizione della stessa esperienza o la gestione di un collettivo di osservazioni empiriche.

b) Operare in contesti quantitativi interessanti e coinvolgenti può essere un utile supporto per passare dalla realtà alla sua astrazione simbolica, introducendo gradualmente il linguaggio formale della matematica.

c) Si invita a insistere sui seguenti punti:

- l'importanza dei dati per acquisire informazioni e per prendere decisioni;
- la distribuzione statistica come insieme di dati da esaminare, rappresentare ed esplorare congiuntamente per cogliere l'informazione statistica e prendere decisioni;
- la variabilità dei dati come caratteristica della realtà, alla quale consegue l'esigenza di individuarne le fonti causali, distinguendole da quelle casuali;
- il valore medio, come espressione di sintesi statistica di un insieme di dati, la cui scelta dipende spesso dalla natura dei dati, dalla forma della distribuzione che emerge a sua volta dalla sua rappresentazione grafica;
- il modello statistico come strumento, la cui utilità è legata alla sua capacità di spiegare i dati facendo attenzione alla difficoltà di spersonalizzare il dato e alla tendenza della riattribuzione del dato sintetico (valore medio) al singolo (vedi sonetto di Trilussa);
- la casualità degli eventi come concetto generale per cui, dato un esperimento casuale, non si è in grado di prevedere l'esito di una singola prova, ma si è in grado di descrivere tutti gli esiti possibili e di assegnarne la probabilità.

a) Si eviti di introdurre la statistica e la probabilità come un insieme di calcoli su numeri inventati e senza che abbiano un significato in un contesto reale. La statistica e la probabilità sono un valido aiuto per i futuri cittadini e promuovono l'acquisizione di abilità utili nella vita quotidiana a comprendere in modo consapevole e critico la realtà ed in particolare quei suoi aspetti “disorientanti” che sono la variabilità dei fenomeni, la necessità di trattare grandi quantità di dati o l'incompletezza dell'informazione.

b) Si eviti la prassi di trattare gli argomenti dell'ambito “Dati e previsioni” come slegati rispetto al resto della matematica, spesso alla fine dell'anno, quasi si trattasse di un'appendice di “matematica applicata”, contrapposta a quella “pura”. La statistica e il calcolo delle probabilità vanno integrati con i contenuti degli altri ambiti, ai quali spesso forniscono applicazioni e significato.

c) Quando la classe affronta un problema del nucleo dati e previsioni l'insegnante non anticipi mai le conclusioni del problema, ma inviti la classe a riflettere, in modo attivo e partecipato, sull'esperienza che si sta facendo, stimolando riflessioni, provocando osservazioni, aiutando negli esperimenti, ma evitando di dare risposte.

NOTE

Altri materiali

www.fardicono.it/statisticamente/index.htm

Cliccando su Archivio si possono trovare dei problemi che utilizzano elementi di statistica in contesti diversi.

www.istat.it/servizi/studenti/

Supporti utili sono: Statistica per esempi- Il valore dei dati – progetto Censimento a scuola. Oltre ad utilizzare dati raccolti e analizzati dall'ISTAT.

www.sis-statistica.it/index.php

Alla voce La didattica della statistica è possibile trovare informazioni utili per reperire materiali vari e link utili.

www.invalsi.it

Prove INVALSI/ OCSE PISA: dove si possono trovare applicazioni di statistica e di calcolo delle probabilità in contesti diversi.

Altri materiali più articolati tratti da Matematica 2001 e 2003 si possono scaricare da:

<http://umi.dm.unibo.it/old/italiano/Matematica2001/matematica2001.html>

<http://umi.dm.unibo.it/old/italiano/Matematica2003/matematica2003.html>

Riviste

INDUZIONI Demografia, probabilità, statistica a scuola Istituti Editoriali e Poligrafici Internazionali: dove si possono trovare spunti per affrontare problematiche di statistica e di calcolo delle probabilità, per ogni ciclo scolastico. (a pagamento)

L'INSEGNAMENTO DELLA MATEMATICA E DELLE SCIENZE INTEGRATE Centro ricerche didattiche Ugo Morin (tutti gli articoli sono scaricabili gratuitamente, tranne le ultime due annate)

C. BATANERO, G. BURRILL, C. READING (Eds.) *Teaching Statistics in School Mathematics-Challenges for Teaching and Teacher Education*.

A Joint ICMI/IASE Study, DOI 10.1007/978-94-007-1131-0_15, ©Springer Science+Business Media B.V. 2011.

L. GATTUSO, M. G. OTTAVIANI (2011). Complementing mathematical thinking and statistical thinking in school mathematics. In: C. Batanero, G. Burrill, C. Reading (Eds.) *Teaching Statistics in School Mathematics-Challenges for Teaching and Teacher Education*. *A Joint ICMI/IASE Study*, DOI 10.1007/978-94-

007-1131-0_15, ©Springer Science+Business Media B.V. 2011.