

TFA –A047 – A048- A049 - Università di Ferrara
Laboratorio pedagogico-didattico di matematica

17 febbraio 2015

**Un percorso di geometria,
secondo le *Indicazioni nazionali*
e le *Linee guida*.
Esempi con il software**

prof. Luigi Tomasi
luigi.tomasi@unife.it

Argomenti dell'incontro

- Lettura delle *Indicazioni nazionali /Linee guida*
- Dalle Indicazioni nazionali/Linee guida si può partire per la progettazione di attività che prevedano il laboratorio di matematica
- Nell'ambito di questa metodologia, uso delle tecnologie e di software di matematica dinamica nell'insegnamento /apprendimento (il "laboratorio di matematica" come metodologia).

2

Indicazioni nazionali sull'uso degli strumenti informatici

- *“Gli strumenti informatici oggi disponibili offrono contesti idonei per rappresentare e manipolare oggetti matematici.*
- *L'insegnamento della matematica offre numerose occasioni per acquisire familiarità con tali strumenti e per comprenderne il valore metodologico. Il percorso, quando ciò si rivelerà opportuno, favorirà l'uso di questi strumenti, anche in vista del loro uso per il trattamento dei dati nelle altre discipline scientifiche.*
- *L'uso degli strumenti informatici è una risorsa importante che sarà introdotta in modo critico, senza creare l'illusione che essa sia un mezzo automatico di risoluzione di problemi e senza compromettere la necessaria acquisizione di capacità di calcolo mentale.”*

3

Concetti e metodi matematici oggetto di studio nei Licei

Nelle Indicazioni nazionali di matematica c'è un forte sottofondo culturale. Riportiamo dalle "linee generali e competenze" (riguardano tutti i licei)

I gruppi di concetti e metodi che saranno obiettivo dello studio:

1. *gli elementi della geometria euclidea del piano e dello spazio entro cui prendono forma i procedimenti caratteristici del pensiero matematico (definizioni, dimostrazioni, generalizzazioni, assiomatizzazioni);*
2. *gli elementi del calcolo algebrico, gli elementi della geometria analitica cartesiana; una buona conoscenza delle funzioni elementari dell'analisi, le nozioni elementari del calcolo differenziale e integrale;*
3. *gli strumenti matematici di base per lo studio dei fenomeni fisici, con particolare riguardo al calcolo vettoriale e alle equazioni differenziali, in particolare l'equazione di Newton e le sue applicazioni elementari;*
4. *la conoscenza elementare di alcuni sviluppi della matematica moderna, in particolare degli elementi del calcolo delle probabilità e dell'analisi statistica;*

4

Le trasformazioni geometriche nelle Indicazioni nazionali

Liceo scientifico – Primo Biennio - **Geometria**

- *Lo studente acquisirà la conoscenza delle principali trasformazioni geometriche (traslazioni, rotazioni, simmetrie, similitudini con particolare riguardo al teorema di Talete) e sarà in grado di riconoscere le principali proprietà invarianti.*
- *La realizzazione di costruzioni geometriche elementari sarà effettuata sia mediante strumenti tradizionali (in particolare la riga e compasso, sottolineando il significato storico di questa metodologia nella geometria euclidea), sia mediante programmi informatici di geometria.*

5

Geometria dello spazio nelle Indicazioni nazionali

Liceo scientifico – Secondo Biennio - **Geometria**

- *Lo studio della geometria proseguirà con l'estensione allo spazio di alcuni dei temi della geometria piana, anche al fine di sviluppare l'intuizione geometrica.*
- *In particolare, saranno studiate le posizioni reciproche di rette e piani nello spazio, il parallelismo e la perpendicolarità, nonché le proprietà dei principali solidi geometrici (in particolare dei poliedri e dei solidi di rotazione).*

6

Geometria dello spazio nelle *Indicazioni nazionali*

Liceo classico – Secondo Biennio - **Geometria**

- *[Lo studente] Affronterà l'estensione allo spazio di alcuni temi e di alcune tecniche della geometria piana, anche al fine di sviluppare l'intuizione geometrica.*
- *In particolare, studierà le posizioni reciproche di rette e piani nello spazio, il parallelismo e la perpendicolarità.*

7

Geometria dello spazio nelle *Linee guida per gli Istituti Tecnici e per gli Istituti Professionali*

Geometria - Linee guida per gli istituti tecnici e per gli istituti professionali (**I biennio**)

- *Conoscenze: Nozioni fondamentali di geometria del piano e dello spazio. Le principali figure del piano e dello spazio.*
- *Abilità: Porre, analizzare e risolvere problemi del piano e dello spazio utilizzando le proprietà delle figure geometriche oppure le proprietà di opportune **isometrie**.*

8

Geometria dello spazio nelle *Indicazioni nazionali e nelle Linee guida*

Commento

- Pur nella diversità tra le *Indicazioni nazionali per i licei* e le *Linee guida per gli Istituti tecnici e gli Istituti professionali*, si propone in tutti gli indirizzi di studio di scuola secondaria di II grado un avvio alla geometria dello spazio.
- Si può proporre questo argomento fondamentale della geometria, inizialmente in modo intuitivo e costruttivo, con l'uso di materiale concreto e di software di geometria.
- Negli indirizzi scolastici che hanno un orario più adeguato si potrà proporre un maggiore approfondimento e la dimostrazione di alcune proprietà fondamentali.

9

Geometria analitica dello spazio nelle *Indicazioni nazionali*

Liceo classico - Quinto Anno (2 ore settimanali) **Geometria**
Lo studente apprenderà i primi elementi di geometria analitica dello spazio e la rappresentazione analitica di rette, piani e sfere.

- Anche questo argomento, con 2 ore settimanali, sarà difficile da trattare in quasi tutti i licei non scientifici.
- Occorre ricordare che due ore di matematica alla settimana equivalgono a 66 ore in un anno scolastico (33 settimane di scuola).
- Evidentemente questo orario è insufficiente per trattare tutti gli argomenti proposti per il quinto anno, perché nelle 66 ore devono essere svolte tutte le attività, comprese almeno due verifiche per quadrimestre.

10

Geometria analitica dello spazio nelle *Indicazioni nazionali*

Liceo scientifico - Quinto Anno (**4 ore settimanali**)

Geometria

L'introduzione delle coordinate cartesiane nello spazio permetterà allo studente di studiare dal punto di vista analitico rette, piani e sfere.

- Anche su questo argomento non c'è diversità con gli altri licei;
- questo è un aspetto molto positivo;
- tuttavia il numero di ore al liceo scientifico è più adeguato e può permettere uno svolgimento di questo argomento in modo più approfondito.

11

I biennio – Percorso di geometria (proposta CIIM)

- Iniziare dal riconoscimento delle figure tridimensionali che sono intorno a noi rappresenta un'occasione per richiamare e rafforzare le conoscenze degli studenti provenienti da situazioni scolastiche diverse ovvero con livelli e tipologie di preparazione spesso molto eterogenei.
- In ogni caso orientare l'approccio al curricolo del biennio in continuità con quello del primo ciclo determina minori difficoltà e può servire a stabilire un miglior dialogo tra docenti dei due livelli di istruzione.

12

I biennio – Percorso di geometria (proposta CIIM)

Il *percorso di Geometria* del biennio nei Licei e negli Istituti Tecnici e Professionali, interpretando le *Indicazioni nazionali* e le *Linee guida* del MIUR, è articolato in otto fasi. In generale in tutte quelle che abbiamo indicato come *fasi* si agisce per sviluppare la competenza che si riferisce a “confrontare e analizzare figure geometriche, individuando invarianti e relazioni”.

- Le prime tre fasi in particolare suggeriscono come nella Scuola Secondaria di II grado si possa proporre e favorire un buon incremento di questa competenza, rispetto ai semi gettati nel percorso scolastico precedente, in cui sono state poste molte premesse importanti di metodo e di contenuto.

13

Il biennio e V anno – Percorso di geometria (proposta CIIM)

- Si rinnova anche per il secondo biennio il consiglio e l'invito a dedicare alla Geometria un tempo adeguato.
- Si ritiene che la Geometria, in particolare nei licei scientifici, debba avere una presenza particolarmente significativa, in quanto è una parte fondamentale del curriculum di matematica.

14

Il biennio e V anno – Percorso di geometria (proposta CIIM)

- Nelle *Linee generali e competenze* di tutti gli indirizzi previsti dalle *Indicazioni nazionali* si riconosce un posto significativo al ruolo delle competenze di geometria:
- “1- gli elementi della geometria del piano e dello spazio entro cui prendono forma i procedimenti caratteristici del pensiero matematico (definizioni, dimostrazioni, generalizzazioni, assiomatizzazioni)”;
- “2- ...gli elementi della geometria analitica cartesiana...”

15

Il biennio e V anno – Percorso di geometria (CIIM)

- *“Al termine del percorso didattico lo studente avrà approfondito i procedimenti caratteristici del pensiero matematico (definizioni, dimostrazioni, generalizzazioni, formalizzazioni), conoscerà le metodologie elementari per la costruzione di modelli matematici in casi molto semplici ma istruttivi e saprà utilizzare strumenti informatici di rappresentazione geometrica e di calcolo.”*
- *“Gli strumenti informatici oggi disponibili offrono contesti idonei per rappresentare e manipolare oggetti matematici. L'insegnamento della matematica offre numerose occasioni per acquisire familiarità con tali strumenti e per comprenderne il valore metodologico.”*

16

Il biennio e V anno – Percorso di geometria (CIIM)

Negli *obiettivi specifici di apprendimento* del secondo biennio e del quinto anno dei Licei scientifici qui considerati si legge:

SECONDO BIENNIO

Aritmetica e algebra

- *“Lo studio della circonferenza e del cerchio, del numero π ... permetterà di approfondire la conoscenza dei numeri reali, con riguardo alla tematica dei numeri trascendenti. ...*
- *Saranno studiate la definizione e le proprietà di calcolo dei numeri complessi, nella forma algebrica, geometrica e trigonometrica.”*

17

Il biennio e V anno – Percorso di geometria (CIIM)

Geometria – le sezioni coniche

- *“Le sezioni coniche saranno studiate sia da un punto di vista geometrico sintetico che analitico.*
- *Inoltre, lo studente approfondirà la comprensione della specificità dei due approcci (sintetico e analitico) allo studio della geometria.”*

18

Il biennio e V anno Percorso di geometria (proposta CIIM)

- [L'allievo] studierà le proprietà della circonferenza e del cerchio e il problema della determinazione dell'area del cerchio, nonché la nozione di luogo geometrico, con alcuni esempi significativi.
- Lo studio della geometria proseguirà con l'estensione allo spazio di alcuni dei temi della geometria piana, anche al fine di sviluppare l'intuizione geometrica.
- In particolare, saranno studiate le posizioni reciproche di rette e piani nello spazio, il parallelismo e la perpendicolarità, nonché le proprietà dei principali solidi geometrici (in particolare dei poliedri e dei solidi di rotazione).”

19

V anno – Percorso di geometria (CIIM)

QUINTO ANNO

- *“Nell’anno finale lo studente approfondirà la comprensione del metodo assiomatico e la sua utilità concettuale e metodologica anche dal punto di vista della modellizzazione matematica. Gli esempi verranno tratti dal contesto dell’aritmetica, della geometria euclidea o della probabilità ma è lasciata alla scelta dell’insegnante la decisione di quale settore disciplinare privilegiare allo scopo.”*

GEOMETRIA

- *“L’introduzione delle coordinate cartesiane nello spazio permetterà allo studente di studiare dal punto di vista analitico rette, piani e sfere.”*

20

Secondo biennio e V anno – Percorso di geometria (proposta CIIM)

Consigli e “sconsigli” relativi alle Coniche

- Si consiglia in ogni caso di privilegiare l'obiettivo di far acquisire agli studenti la conoscenza delle coniche e il significato geometrico delle loro principali caratteristiche quali, per esempio, le simmetrie e l'eccentricità.

21

Secondo biennio e V anno – Percorso di geometria (proposta CIIM)

Consigli e sconsigli relativi alle Coniche

- Nel piano cartesiano si consiglia di iniziare lo studio di ellissi e iperboli riferite ai propri assi di simmetria o nel caso delle iperboli equilatero riferite anche ai propri asintoti e a parabole con l'asse parallelo a uno degli assi del riferimento.
- Importante è che gli studenti sappiano passare con consapevolezza dalle equazioni cartesiane alla rappresentazione grafica e viceversa.

22

Secondo biennio e V anno – Percorso di geometria (proposta CIIM)

Consigli e sconsigli relativi alle Coniche

- Lo studio sarà esteso alle coniche ottenute per traslazione da quelle riferite ai propri assi di simmetria; in particolare si studierà l'iperbole equilatera ottenuta per traslazione da quella riferita ai propri asintoti (detta anche "funzione omografica");
- l'uso di semplici trasformazioni geometriche (traslazioni, simmetrie assiali, simmetrie centrali e in alcuni casi, semplici rotazioni) è fondamentale anche per evitare il ricorso sistematico agli strumenti dell'analisi, non ancora disponibili nel II biennio del corso di studi.
- Naturalmente queste tecniche, basate sulle trasformazioni geometriche elementari del piano, saranno estese anche al grafico di altre funzioni elementari (→Relazioni e funzioni) e utilizzato ogni volta che se ne presenti l'occasione.

23

Secondo biennio e V anno – Percorso di geometria (proposta CIIM)

Consigli e sconsigli relativi alle Coniche

- Nel piano cartesiano si sconsiglia di insistere su problemi troppo laboriosi riguardanti posizioni reciproche di intersezioni o di tangenza tra coniche e tra coniche e rette, anche se è fondamentale interpretare geometricamente alcuni sistemi algebrici e, viceversa, interpretare algebricamente le intersezioni tra coniche e rette o, in alcuni semplici casi, tra due coniche.
- Si consiglia l'uso di software di geometria effettivamente integrato nella didattica.

24

Secondo biennio e V anno – Percorso di geometria (proposta CIIM)

Consigli e sconsigli relativi alla Trigonometria

- Si consiglia di sottolineare la stretta connessione con la geometria euclidea piana, della quale la trigonometria rappresenta l'aspetto algoritmico e di mettere in evidenza i collegamenti con il calcolo vettoriale e con i numeri complessi e le relative operazioni.
- Una efficace introduzione all'argomento può partire da situazioni e problemi reali; anche l'uso di elementi di storia (della matematica, dell'astronomia, della geodesia, della navigazione) darà valore e significato a concetti e formule.

25

Secondo biennio e V anno – Percorso di geometria (proposta CIIM)

Consigli e sconsigli relativi alla Trigonometria

- Sarà opportuno fare largo uso di strumenti di calcolo automatico.
- È da evitare il proliferare di formule, sottolineando, ogniqualvolta sia possibile, che le relazioni in trigonometria si possono ricondurre tutte a poche relazioni fondamentali che descrivono le relazioni geometriche tra gli enti.
- È opportuno evitare problemi inutilmente laboriosi e limitare l'uso di parametri allo stretto necessario evitando sterili casistiche e formalismi.

26

Secondo biennio e V anno – Percorso di geometria (proposta CIIM)

Consigli e sconsigli relativi alla Geometria dello Spazio

- Non partire da un'impostazione assiomatica della Geometria dello spazio, ma mettere in evidenza l'importanza di alcuni teoremi, senza far imparare troppe dimostrazioni; questo risulta impossibile, non c'è il tempo e si perderebbe il significato di quelle poche che sono veramente importanti: dimostrare tutto è come non dimostrare nulla.
- Fare ricorso ad ampie ammissioni di carattere intuitivo.
- Argomentare e congetturare vengono prima di dimostrare.

27

Secondo biennio e V anno – Percorso di geometria (proposta CIIM)

Consigli e sconsigli didattici relativi alla Geometria dello Spazio

- Far vedere come la Geometria sia connessa agli altri ambiti (*Aritmetica e algebra, Relazioni e funzioni, Dati e previsioni*) e sottolineare sempre i collegamenti tra di essi.
- La Geometria non è un formulario per trovare lunghezze, aree e volumi; è necessario presentarla come un ambito molto importante per scoprire, sperimentare, visualizzare, argomentare proprietà e collegamenti tra una teoria matematica e il mondo reale.

28

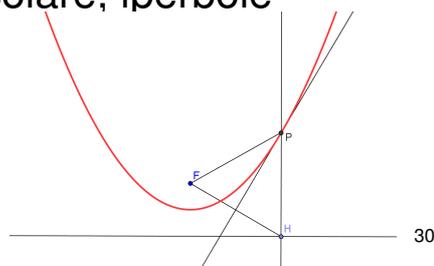
Traccia e Luogo in *GeoGebra*: strumenti per congetturare ed esplorare proprietà

- **Traccia**: è uno strumento per esplorare e per congetturare
- **Luogo**: è uno strumento che di solito dovrebbe essere usato **dopo** aver usato Traccia (questo è un consiglio...)
- Vediamo di seguito alcuni esempi per scoprire le potenzialità (e anche le limitazioni) di questo strumento in *GeoGebra*: rettangoli isoperimetrici (già visto) oppure “Rettangoli e fontane” (attività del Piano $m@t.abel$)

29

Geometria analitica del piano: coniche (come luoghi)

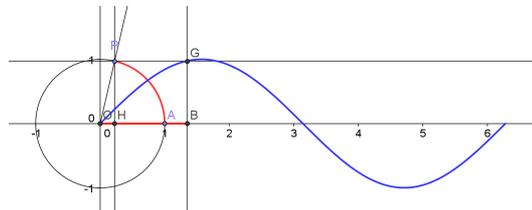
- Circonferenza per tre punti
- Fasci di circonferenze
- Parabola (vivamente consigliato)
- Ellisse
- Iperbole (caso particolare, iperbole equilatera)



30

Modello sinusoidale (armonico)

- Il moto circolare unif.
- Il moto armonico
- Il modello sinusoidale
- Trasformazioni delle curve armoniche
- Le curve $y=a \cos x + b \sin x$ (combinazioni lineari di $\sin x$ e $\cos x$)

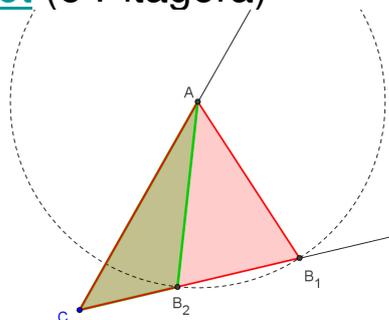


31

Trigonometria

Risoluzione triangoli

- Caso 1 (un lato e due angoli)
- Caso “ambiguo” (due lati e l’angolo opposto a uno di essi)”
- Teorema di Carnot (e Pitagora)



32