Corso TFA – 2014-2015 – A047-A048-A049 - Laboratorio pedagogico-didattico di matematica

GeoGebra: esercitazioni sui luoghi geometrici, trigonometria e geometria dello spazio (Vista Grafici 3D) – proposte il 17 febbraio e il 10 marzo 2015
prof. L. Tomasi

GeoGebra è un software di matematica dinamica per la didattica, che comprende geometria, algebra, analisi, statistica.

In GeoGebra è possibile inserire direttamente equazioni e coordinate nella barra di inserimento. GeoGebra quindi consente la gestione contemporanea di variabili, numeri, vettori e punti; calcola derivate e integrali di funzioni e dispone di vari comandi.

In queste esercitazioni si può usare l'impostazione **Geometria** di GeoGebra, non visualizzando, almeno inizialmente, la **Vista Algebra**.

Eseguire le seguenti costruzioni con GeoGebra e salvare i file; su alcune di queste costruzioni è richiesta una scheda didattica di laboratorio da usare in classe.

1) Dati tre punti A, B, C, costruire la circonferenza che passa per questi tre punti (anche se GeoGebra possiede già lo strumento…)

2) Data una circonferenza c e un punto P esterno alla circonferenza, costruire le rette tangenti alla circonferenza passanti per P (anche se GeoGebra possiede già questo strumento).

3) Data una retta d e un punto F (non appartenente alla retta d), costruire la parabola avente per fuoco F e per direttrice d (fare la costruzione usando dapprima lo strumento Traccia e poi lo strumento Luogo). Fare la costruzione anche se GeoGebra possiede già lo strumento Parabola. Costruire una scheda di laboratorio da usare con gli studenti relativa a questo esercizio.

4) Simulare con GeoGebra la costruzione della parabola di fuoco un punto F e di direttrice la retta d con la piegatura della carta.

5) Data una circonferenza c (e centro O) e un punto F (interno alla circonferenza c), costruire l'ellisse di fuochi i punti O e il punto F. (Usare dapprima lo strumento Traccia e poi lo strumento Luogo). Fare la costruzione anche se GeoGebra possiede già lo strumento Ellisse. Costruire una scheda di laboratorio da usare con gli studenti relativa a questo esercizio.

6) Come si deve modificare la costruzione precedente per ottenere una iperbole? Costruire una scheda di laboratorio da usare con gli studenti relativa a questo esercizio.

7) Trovare (con GeoGebra) il luogo dei centri delle circonferenze passanti per due punti dati.

8) Dato un triangolo ABC inscritto in una circonferenza, trovare il luogo geometrico descritto dal baricentro *G* al variare del vertice *C* sulla circonferenza.

9) Applicazioni di trigonometria: con GeoGebra presentare il problema di "risolvere" un triangolo dato un lato e due angoli (la somma deve essere minore di un angolo piatto).

10) Applicazioni di trigonometria: con GeoGebra presentare il problema di "risolvere" un triangolo dati due lati e l'angolo tra esso compresi.

11) Applicazioni di trigonometria: con GeoGebra presentare il problema di "risolvere" un triangolo dati due lati e l'angolo opposto a uno di essi (caso "ambiguo").

12) Con GeoGebra visualizzare il teorema dei seni per un triangolo ABC

13) Con GeoGebra visualizzare il teorema di Carnot (o del coseno) per un triangolo ABC.

Geometria dello spazio

a) Costruire con Geogebra 3D due rette parallele, due rette incidenti, due rette perpendicolari; due rette sghembe.

b) Costruire con GeoGebra 3D l'angolo tra una retta e un piano.

c) Costruire un prisma con GeoGebra 3D.

d) Costruire una piramide con GeoGebra 3D.

e) Costruire un cubo con GeoGebra 3D.

f) Con GeoGebra 3D costruire le coniche come intersezione tra un piano e una superficie conica (a due falde). Scheda didattica sulle coniche definite come sezioni di un cono (a due f alde).

g) Costruire i poliedri regolari con GeoGebra 3D. Scheda didattica: perché sono solo di cinque tipi?

Geometria analitica dello spazio

Premessa. L'insegnamento della geometria analitica 3D è previsto nelle *Indicazioni nazionali* per i Licei per il V anno e in alcuni indirizzi nelle *Linee Guida* per gli Istituti Tecnici e per gli Istituti Professionali.
Problemi di apprendimento: il principale è la difficoltà di visualizzazione spaziale da parte degli allievi; questo è dovuto al fatto che si trascura, di solito per mancanza di tempo, la geometria dello spazio sintetica. Un software come GeoGebra può aiutare moltissimo questa visualizzazione (assieme eventualmente alla costruzione di modelli materiali di alcuni solidi geometrici o loro sezioni).
Un'osservazione ovvia: non si può fare geometria analitica dello spazio senza conoscere le nozioni fondamentali di geometria sintetica dello spazio.

1. Punti. I punti possono essere creati in modo interattivo, con un clic. Creare e trascinare dei punti (far variare x e y; far variare la z: clic sul punto per cambiare la modalità di trascinamento). Oppure si può definire un punto tramite le sue coordinate, con il suo nome; basta scrivere ad esempio A=(2,1,3).
   Un punto può essere libero (3 gradi di libertà) oppure può essere definiti su un oggetto (con 2 oppure 1 grado di libertà). Punti definiti come intersezione di due oggetti (ad es. retta-piano); in questo caso ha 0 gradi di libertà..

2. Vettori. Per definire un vettore nello spazio, scrivere ad esempio: a=(2,1,3) e b=(4,-3,1). Attenzione, la lettera deve essere minuscola! Il vettore viene applicato all'origine degli assi cartesiani e viene scritto nella Vista Algebra di GeoGebra come vettore *colonna*.
   In GeoGebra si può facilmente determinare o visualizzare
   - Il modulo di un vettore: si usa abs(a), funzione valore assoluto (o modulo)
   - le operazioni con i vettori, ad esempio -a, 2a, -a/2, a+b, a-b, a-2b,…
   - prodotto scalare: a*b
   - prodotto vettoriale: a⊗b (visualizzare anche b⊗a). Attenzione al simbolo di prodotto vettoriale: si trova nella tabella dei simboli matematici e greci.

3. Piani (costruzione di un piano; piano per tre punti; piano retta-punto, piano definito da due rette incidenti,…); costruzione di un vettore perpendicolare a un piano;
   equazione generale di un piano (una dimostrazione) ax+by+cz+d=0 (a, b, c non tutti nulli); equazione ax+by+cz=0.
   Esempi: disegnare il piano 2x-y+3z+1=0 e il vettore v=(2,-1,3). Che cosa si osserva?
   Piani particolari (a=0 oppure b=0, ecc.).
   Disegnare ad esempio i piani
   y-3z+1=0 (a=0)
   2x+3z-2=0 (b=0)
   2x-y+4=0 (c=0)

4. La forma esplicita dell'equazione di un piano (funzione di due variabili): z=mx+ny+q. Esempio: trovare l'equazione esplicita (quando esiste?) del piano α passante per i punti A(2,0,0), B(0,1,0), C(0,0,3).

5. Piani paralleli; condizione di parallelismo. Fascio improprio di piani. Esempio: visualizzare con GeoGebra il fascio di piani paralleli al piano di equazione 2x-y+3z=0 (usare uno slider da chiamare d ed eventualmente la traccia del piano).

6. Piani perpendicolari: condizione di perpendicolarità tra piani: *aa'+bb'+cc'*=0 (questa condizione è forse più facile da dimostrare se si usano due vettori, rispettivamente perpendicolari ai piani, e il loro prodotto scalare).
   Esempio. Visualizzare i piani (α) x-2y+z=0 e (β) 3x+2y+z-2=0 con GeoGebra. Determinare un vettore v perpendicolare al piano α e un vettore w perpendicolare al piano β. Trovare il prodotto scalare v*w.

7. Rette: intersezione di due piani; le equazioni di una retta; le equazioni *ridotte* di una retta. Esempio: disegnare i piani x+2y-4z=1 e x-y-2z=0. Visualizzare l'intersezione. Trovare un sistema di equazioni ridotte della retta (rispetto a z).

8. Equazioni di una retta per due punti (equazioni in forma *frazionaria*). Parametri direttori (l, m, n) di una retta.
   Esempio con GeoGebra: trovare le equazioni frazionarie della retta passante per i punti A(0,0,2) e B(3,2,0). Disegnare la retta. Trovare una terna di parametri direttori (l, m, n) di questa retta (la più semplice terna di parametri direttori è ….).

9. Le equazioni parametriche di una retta (e l'equazione vettoriale di una retta).
   Esempio con GeoGebra: trovare una terna di equazioni parametriche della retta passante per i punti A(0,0,2) e B(3,2,0). Disegnare la retta. Osservare nella Vista Algebra come GeoGebra scrive l'equazione della retta AB. Usare uno slider per il parametro (λ) e visualizzare il significato delle equazioni parametriche di una retta.
   Equazione vettoriale di una retta definita da due punti A e B; $\vec{X} = \vec{A} + \lambda\overrightarrow{AB}$.

10. Posizioni reciproche tra due rette nello spazio: usando GeoGebra visualizzare i vari casi: rette complanari (incidenti o parallele) o non complanari (sghembe), ecc..

11. Posizioni reciproche tra una retta e un piano nello spazio: visualizzare i vari casi.
    Esempio: visualizzare la retta AB del precedente esercizio 9 e il piano di equazione x+2y-z=2. Si intersecano? Se sì, dove?
    Retta parallela a un piano; Condizione di parallelismo retta piano: $al+bm+cn=0$ (la dimostrazione è veloce se si usano i vettori).

12. Retta perpendicolare a un piano passante per un punto.
    Distanza punto-piano. La formula conviene darla per analogia tra la distanza punto-retta nel piano.
    Esempio: anche se non si dimostra la formula, conviene fare la costruzione geometrica necessaria per trovare la distanza tra il punto P(-1,3,2) e il piano (α) 3x-2y+z=3 (si fa passare una retta r per P che sia perpendicolare al piano α e poi si trova l'intersezione H tra questa retta r con il piano α.

13. Piano perpendicolare a una retta passante per un punto.
    Condizione di perpendicolarità piano retta: $a/l=b/m=c/n$ (la dimostrazione è veloce se si usano i vettori).
    Distanza punto-retta.
    Esempio: fare la costruzione per trovare la distanza tra il punto P(0,-1,0) e la retta di equazioni ridotte x=2z-1 e y=z+1.

14. Sfera: disegnare una sfera (superficie sferica); intersezione sfera-piano.
    Esempio con GeoGebra: trovare il centro e il raggio della circonferenza ottenuta intersecando la sfera di centro C(0,0,1) e raggio 5, con il piano 2x-y-2z=4. Fare la costruzione geometrica della circonferenza e del suo centro.

15. Superfici di equazione esplicita f(x,y)=un'espressione contenente (x,y).
    Esempio: disegnare ad esempio f(x,y)=x^2+y^2. Si ottiene quale superficie? Disegnare le curve di livello.

16. Superfici di equazione esplicita f(x,y)=un'espressione contenente (x,y).
    Esempio: disegnare ad esempio f(x,y)=x^2 - y^2. Si ottiene quale superficie? Disegnare le curve di livello.

17. Superfici di equazione esplicita f(x,y)=un'espressione contenente (x,y).
    Esempio: disegnare ad esempio f(x,y)=3x^2+2y^2. Si ottiene quale superficie? Disegnare le curve di livello.

18. Superfici di equazione esplicita f(x,y)=un'espressione contenente (x,y).
    Esempio: disegnare ad esempio f(x,y)= 2xy. Si ottiene quale superficie? Disegnare le curve di livello.

19. Superfici di equazione esplicita f(x,y)=un'espressione contenente (x,y).
    Esempio: disegnare ad esempio f(x,y)=sin(x+y). Descrivere la superficie ottenuta.

20. Superfici di equazione esplicita f(x,y)=un'espressione contenente (x,y).
    Esempio: disegnare ad esempio f(x,y)=sin(x^2+y^2). Descrivere la superficie ottenuta.