Matematica x Tutti – 2023-2024

Le origini della matematica.
La matematica dei Greci fino a Euclide: geometria, ma non solo

Luigi Tomasi
3 ottobre 2023

Prima parte: ottobre-novembre 2023

DATA	TEMA	RELATORE
Martedì 03/10/2023	Origini della matematica. La matematica greca: la geometria, ma non solo (Euclide, III sec. a.C.)	Luigi Tomasi
Martedì 17/10/2023	Archimede: la misura della lunghezza della circonferenza, dell'area del cerchio, del volume e superficie dei solidi rotondi (cilindro, cono e sfera)	Luigi Tomasi
Martedì 31/10/2023	Le coniche. Elisse, parabola e iperbole (da Apollonio di Perga al Seicento...)	Luigi Tomasi
Martedì 14/11/2023	La trigonometria (Tolomeo, i matematici arabi, Copernico...); le funzioni goniometriche	Luigi Tomasi

Seconda parte: maggio-giugno 2024

DATA	TEMA	RELATORE
Martedì 07/05/2024	L'algebra, il contributo della matematica araba e gli algebristi italiani del Cinquecento	Luigi Tomasi
Martedì 14/05/2024	La geometria analitica (Cartesio e Fermat)	Luigi Tomasi
Martedì 21/05/2024	La nascita del calcolo differenziale e integrale (Newton e Leibniz); la Matematica e la rivoluzione scientifica del Seicento	Luigi Tomasi
Martedì 28/05/2024	Gli sviluppi dell'analisi matematica, da Eulero alla nascita del concetto di limite	Luigi Tomasi
Martedì 04/06/2024	Il calcolo delle probabilità e le sue applicazioni	Luigi Tomasi
Martedì 11/06/2024	La teoria degli insiemi. La crisi dei fondamenti. La "matematica moderna". Matematica e Informatica. Matematica dappertutto.	Luigi Tomasi

Sunto

- Un piccolo corso di presentazione della matematica, con riferimenti storici e ai suoi apporti logico-filosofici.
- La matematica è alla base delle Scienze e della Tecnologia ed ha sempre più vaste applicazioni; quindi fa parte della preparazione del cittadino.
- Il corso è rivolto a chi ha una preparazione di scuola superiore e voglia rivedere o approfondire, anche dal punto di vista storico e culturale, alcuni concetti fondamentali di matematica.

Origini della matematica

- La origini della matematica possiamo collocarle a circa 10.000 anni fa, al periodo Neolitico.
- Nello stesso periodo nasce anche l'agricoltura.
- I reperti dimostrano come gradualmente si svilupparono tecniche e mestieri elementari
- Dal Neolitico si passa all'età del bronzo.
- Si sviluppano i primi sistemi di numerazione e viene gradualmente a formarsi il concetto di numero
- Ovviamente, lo sviluppo dell'artigianato e del commercio contribuì a sviluppare il concetto di numero

Lo sviluppo dei sistemi di numerazione

Si sviluppano dei sistemi di numerazione (additivi, sottrattivi e infine posizionali).

- In base 5
- In base 10
- In base 20 (per esempio i Celti in Europa e i Maya in Messico)
- In base 60 Assiro-Babilonesi, che ci hanno lasciato questo sistema di numerazione per la misura del tempo e anche degli angoli).
- Tacche su un bastone
- Nodi di una corda
- Ciottoli e conchiglie
- Contare sulle dita

Aritmetica e Geometria

- Numeri e Geometria sono i primi ambiti delle matematica a nascere, per ovvi motivi.
- Quando cominciarono ad essere costruite abitazioni, si costruivano piante ad angolo retto, oppure piante circolari
- La tessitura oppure la ceramica utilizzano motivi geometrici
- Le decorazioni neolitiche rivelano il gusto per le congruenze, le simmetrie e le somiglianze (similitudini).
- Nasce la necessità della misura (come nel racconto di Erodoto, sulla nascita della Geometria in Egitto)

Origini dell'Astronomia, in stretto rapporto con la Matematica

- La matematica delle origini è indissolubilmente collegata con l'astronomia e la misura del tempo.
- Anche nella preistoria troviamo tracce di osservazioni astronomiche e costruzioni nate per la misura del tempo (osservazioni dei moti della luna, del sole, delle stelle e sul susseguirsi delle stagioni)
- Da queste osservazioni astronomiche nascono conoscenze sugli angoli, sui cerchi e sulla sfera.

La matematica degli Egizi

- La matematica degli Egizi, come quella degli Assiro Babilonesi, o anche quella Cinese, ebbe origine come scienza pratica, allo scopo di facilitare il computo del calendario, l'amministrazione dei raccolti, l'organizzazione dei lavori pubblici e la riscossione delle tasse.
- Inizialmente fu naturalmente data importanza all'aritmetica pratica e alla misurazione.
- Con il tempo, si sviluppò la tendenza a studiare certe procedure in modo più astratto, ossia a studiarle «di per se stesse».

La matematica degli Egizi

- La maggior parte delle conoscenze sulla matematica degli Egizi proviene da due papiri di argomento matematico:
- Papiro Rhind (circa 1650 a.C.), che contiene 85 problemi
- Papiro di Mosca (forse 1850 a.C.), che contiene 25 problemi.
- Servivano per insegnare e tramandare alcune conoscenze e procedure per una casta di sacerdoti o di funzionari
- La matematica presente è basta su un sistema di numerazione decimale con simboli speciali per ogni unità decimale.
- L'aritmetica presente è di tipo additivo (la moltiplicazione è ridotta a una somma ripetuta).
- L'aspetto più notevole della matematica egizia era il calcolo con le frazioni. Tutte le frazioni erano ricondotte alla somma di frazioni unitarie (numeratore 1).

Egitto: Sistemi di numerazione

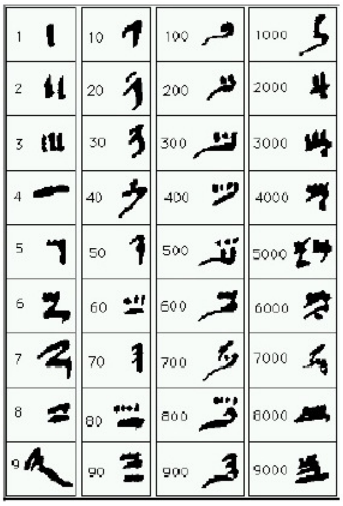
Geroglifico:

1	𓏺	*wa*	10	𓎆	*mD*
2	𓏻	*sn*	20	𓎇	*Dwt*
3	𓏼	*xmt*	30	𓎈	*mabA*
4	𓏽	*fdn*	40	𓎉	*Hmw*
5	𓏾	*dj*	100	𓍢	*Sn.t*
6	𓏿	*sjs*	1000	𓆼	*xA*
7	𓐀	*sfx*	10,000	𓂭	*Dba*
8	𓐁	*xmn*	100,000	𓆐	*Hfn*
9	𓐂	*psD*	1,000,000	𓁨	*HH*

- Base decimale
- Principio additivo
- Senza zero

Egitto: Sistemi di numerazione

Ieratico:



- Base decimale
- Scrittura in cifre
- Senza zero

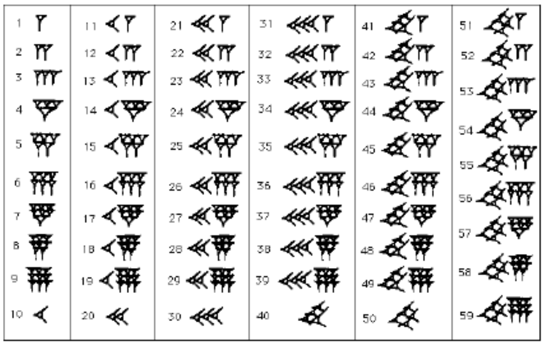
La matematica degli Assiro-Babilonesi

- La matematica in Mesopotamia raggiunse un livello più elevato di quello ottenuto in Egitto
- Scrittura cuneiforme (su tavolette di argilla, che ci sono pervenute). Queste tavolette rivelano una notevole abilità di calcolo
- Usavano un sistema posizionale di numerazione sessagesimale (base 60) del tutto simile a quello attuale (in base 10); per esempio

$$235 = 2 \times 3600 + 3 \times 60 + 5 \times 1$$

- Un tale sistema è enormemente più vantaggioso rispetto al sistema usato dagli Egizi (che era di tipo additivo)
- Questo sistema forse si è sviluppato da tecniche di calcolo e di registrazione come appare in migliaia di tavolette di argilla.

I popoli mesopotamici: Sistemi di numerazione



- Base sessaggesimale
- Scrittura posizionale
- Zero per indicare uno spazio vuoto

I popoli mesopotamici: Operazioni fondamentali

- Addizione e sottrazione come oggi
- Divisioni svolte moltiplicando per il reciproco del divisore
- Estrazione di radici quadrate

La matematica dei Greci (prima di Euclide)

La matematica dei Greci (nasce l’astrazione e la dimostrazione)

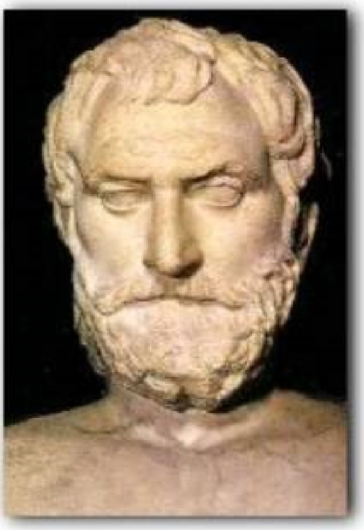
- Le forme di matematica prima dei Greci sono strettamente legate ad esigenze pratiche e alla comprensione della realtà.
- Se si considera il significato più elevato del termine matematica, come sapere teorico formalizzato e autonomo, i primi matematici sono i greci.
- In particolare bisogna riconoscere alla scuola pitagorica il merito di aver dato alla matematica e alla geometria uno status speciale e indipendente, in quanto furono il primo gruppo a trattare concetti matematici e geometrici come astrazioni, e benché Talete avesse già stabilito alcuni teoremi per via deduttiva, essi esplorarono questo procedimento in modo sistematico e rigoroso, distinguendo le teorie della matematica e della geometria dall’attività pratica.

Grecia: origini della matematica greca

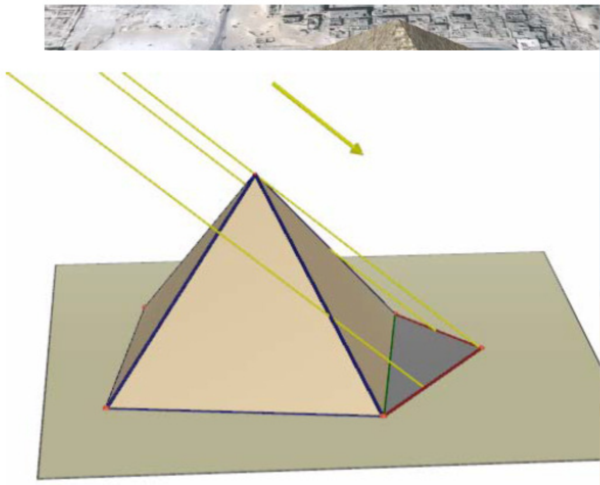
- Origini nelle scuole ioniche e pitagoriche (Talete e Pitagora)
- "Età eroica della matematica"
- In Grecia la matematica non solo risponde alla domanda «Come?» ma si pone anche la domanda che caratterizza la scienza, anche quella attuale, «Perché?»
- Scoperta dell'incommensurabilità e crisi del pensiero pitagorico
- I pensatori successivi misero in discussione il sistema di Pitagora, che era fondato sui numeri interi; si ha quindi la nascita della geometria astratta

Talete (circa 624 a.C.- 546 a.C.)

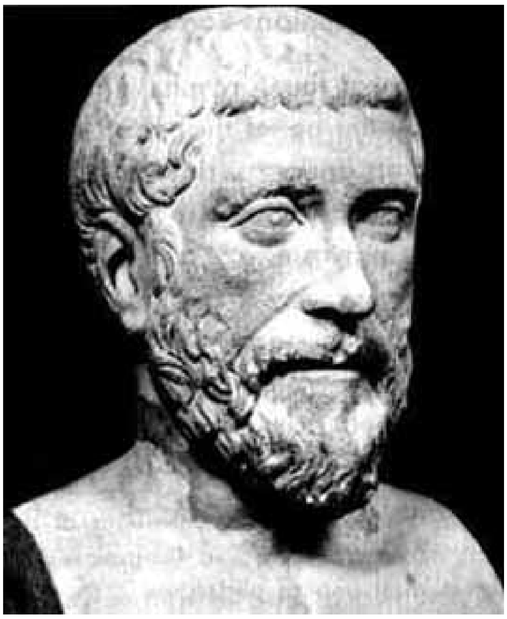
- Figura leggendaria; viene di solito considerato il primo matematico, sicenziato e filosofo della storia
- Nato a Mileto (Asia Minore).
- Grande viaggiatore (viaggiò in Babilonia e in Egitto)
- Ha portato in Grecia le conoscenze matematiche dei Babilonesi e degli Egizi
- Aneddoto (da Erodoto): ha misurato l'altezza della piramide di Cheope, tramite la sua (di Talete…) ombra.



Talete e l'altezza della piramide

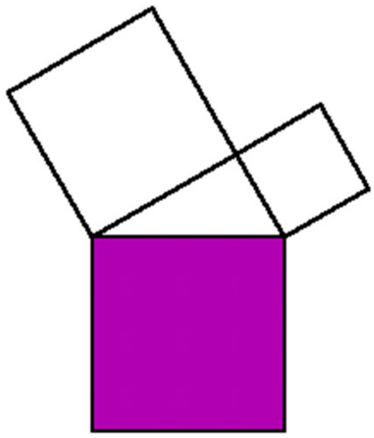


Pitagora (circa 580 a.C. – ca. 500 a.C.)



- Figura mitica e leggendaria; non abbiamo notizie certe sulla sua vita
- Nato a Samo (isola del Mar Egeo); morì a Crotone, nella Magna Grecia
- "Tutto è numero"
- Il teorema di Pitagora è forse il teorema più citato di tutta la matematica
- Ma cosa significa la parola *teorema*?
- *Dimostrazione*: che cos'è una dimostrazione?
- È il teorema per cui esistono più dimostrazioni
- È alla base di tantissimi altri teoremi e formule che si usano correntemente.

Pitagora e il suo teorema



Pitagora e il suo teorema

Forse quello che noi conosciamo come teorema di Pitagora era già noto prima dei Greci.

La novità nella scuola pitagorica è che viene dimostrato in modo deduttivo.

Molte dimostrazioni (questo sito riporta 118 dimostrazioni del Teorema di Pitagora)

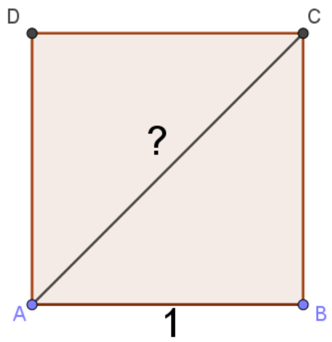
http://www.cut-the-knot.org/pythagoras/

I pitagorici. La crisi dei fondamenti della matematica greca (la scoperta di grandezze tra loro incommensurabili)

Questo titolo sembra paradossale

Ma i pitagorici scoprirono che ci sono grandezze tra loro incommensurabili, ossia che han rapporto non razionale (non è un rapporto tra due numeri interi,...

La diagonale di un quadrato è incommensurabile con il lato.



$$\frac{AC}{AB} \neq \frac{m}{n}$$

Altre difficoltà del pensiero matematico greco

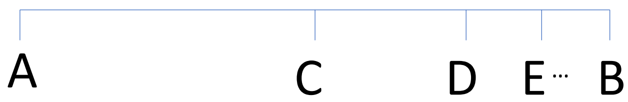
- La scoperta delle grandezze incommensurabili venne forse fatta negli ultimi decenni del V sec. a.C.
- A questa scoperta, venne ad aggiungersi un’altra difficoltà, emersa da argomenti relativi al movimento, al cambiamento e all’infinito.
- Queste difficoltà sono attribuite al filosofo Zenone di Elea (circa 450 a.C.), il principale allievo del filosofo Parmenide.
- Parmenide insegnava che la ragione può riconoscere solo l’essere assoluto e che il cambiamento è solo apparente.
- “L’essere è e non può non essere, il non essere non è e non può essere”
- Dogma fondamentale degli eleatici: unicità e permanenza dell’essere

Zenone di Elea (ca. 450 a.C.) e i paradossi

- Zenone fu il principale discepolo di Parmenide
- Si è attenuto agli insegnamenti del maestro
- Metodo dialettico di argomentare che partendo dalla premesse dell'oppositore le riduceva ad una assurdità
- Celebre per i suoi paradossi
- Questi paradossi ci sono stati tramandati nella *Fisica* di Aristotele (di Achille e la tartaruga, della dicotomia, della freccia, dello stadio).

Paradosso della dicotomia

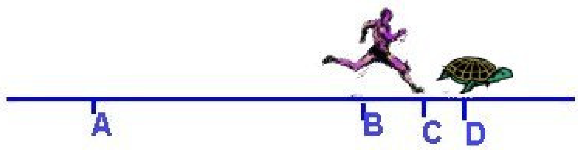
Supponiamo che io voglia andare da A a B lungo una linea retta. Per andare da A a B devo prima raggiungere C (punto medio) e poi D, E, e così via. Dovrò quindi percorrere infiniti segmenti….



Si dovrebbe esaurire una collezione di infiniti elementi in un tempo finito…

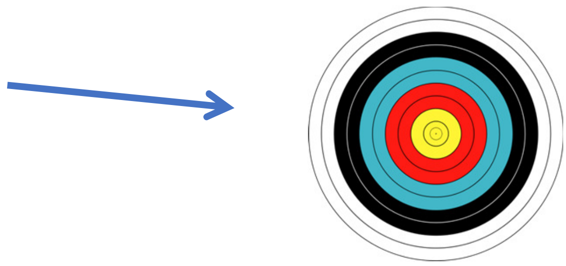
Si pensa che questi paradossi fossero in polemica con l'idea di spazio dei pitagorici.

Paradosso di Achille e la tartaruga



Achille nel punto A
Tartaruga nel punto B
Per poter raggiungere la tartaruga deve prima raggiungere il punto B, e così via…
Achille non raggiungerà mai la tartaruga…

Paradosso della freccia



La freccia che vola è in quiete in ogni istante…

Interpretazione moderna dei paradossi

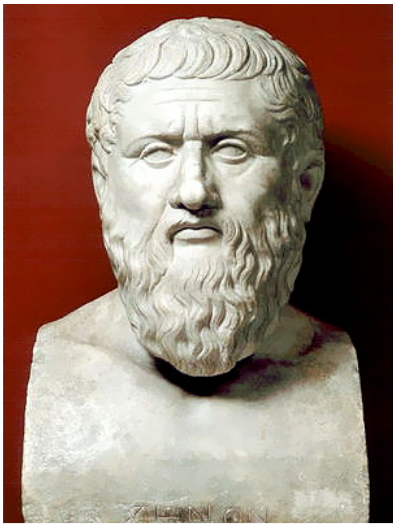
- Aristotele: distinzione tra piano fisico-reale e logico-matematico
- Carl Boyer: impossibilità del moto
- Confronto tra spazio e tempo
- Mancata conoscenza delle serie
- Federigo Enriques: inconciliabilità con l'ipotesi monadica dei pitagorici

Influsso dei paradossi sulla matematica greca

- Gli argomenti di Zenone cominciarono a preoccupare i matematici ancor più della scoperta degli irrazionali
- Crisi della matematica greca (alla fine del V secolo a.C.)…
- Il superamento di questa crisi si avrà con Eudosso di Cnido e Democrito
- Le grandezze sono associate a segmenti
- La geometria, non più il numero intero, "governa il mondo"

Platone (ca. 428 a.C. – ca. 348/347 a.C.)

- Discepolo di Socrate
- Interesse profondo per la matematica (influenzato dai pitagorici, in particolare Archita, nella Magna Grecia)
- Fondò l’Accademia («Non entri chi ignora la geometria»)
- Il suo pensiero influenzò molto i matematici, per es. Euclide.
- Matematici che si formarono all’Accademia di Platone: Archita, Teeteto, Eudosso di Cnido



Platone. Teoria delle idee

- Esistenza di una realtà immateriale, universale, immutabile ed eterna: mondo delle idee
- Idee come oggetto della scienza
- Nascita della geometria astratta (le figure sono ideali; es. l’idea di quadrato)

Eudosso di Cnido (ca. 408 a.C. – ca. 355 a.C.)

- Allievo di Platone e più abile matematico e astronomo del suo tempo (IV sec. a.C.)
- Teoria delle proporzioni (anche tra grandezze non commensurabili)
- Metodo di esaustione per il calcolo di aree e volumi

Eudosso: Teoria delle proporzioni

- I Greci consideravano quattro grandezze in proporzione $a : b = c : d$ se i due rapporti erano uguali
- Scoperta dell'incommensurabilità (nella scuola pitagorica): i numeri interi e i loro rapporti non erano più sufficienti a descrivere la natura
- Nuovo metodo nel confrontare le grandezze:

$$ma > nb \rightarrow mc > nd$$
$$ma < nb \rightarrow mc < nd$$
$$ma = nb \rightarrow mc = nd$$

Eudosso: metodo di esaustione

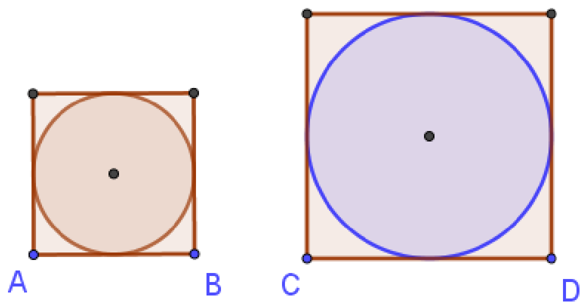
- Confronto tra figure rettilinee e curvilinee
- Assioma di continuità
- Proprietà di esaustione:

  Se da una qualsiasi grandezza si sottrae una parte non inferiore alla sua metà e se dal resto si sottrae ancora non meno della sua metà e se questo processo di sottrazione viene continuato, alla fine rimarrà una grandezza inferiore a qualsiasi grandezza precedentemente assegnata.

Eudosso: rapporto tra le aree di due cerchi

- Teorema

  Le aree dei cerchi stanno tra loro come i quadrati costruiti sui rispettivi diametri.

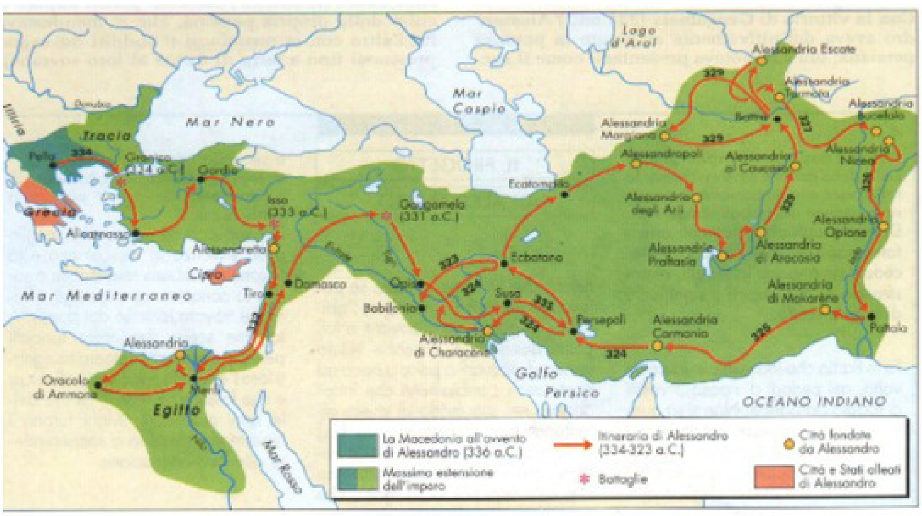


$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{AB^2}{CD^2}$$

Euclide di Alessandria (III sec. a.C.)

Euclide, il contesto storico: periodo ellenistico

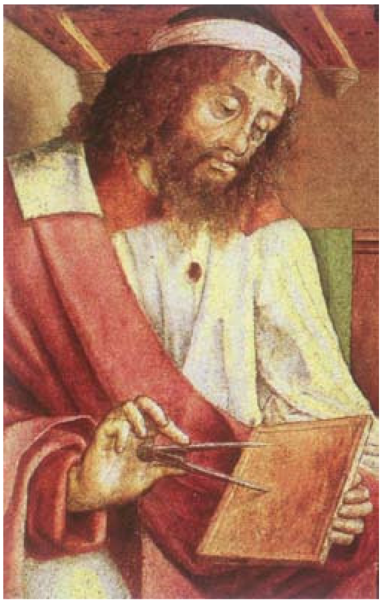
Alessandro Magno (356-323 a.C)



Dopo Alessandro Magno: l'Impero d'Egitto

- 323 a.C. : morte di Alessandro Magno;
- Lotte intestine tra i generali dell'esercito greco; suddivisione dell'Impero in tre parti indipendenti;
- 306 a.C. : controllo dell'Impero d'Egitto nelle mani di Tolomeo I;
- Istituzione del *Museo*;
- Biografia di Euclide di "Alessandria".

Euclide di Alessandria (III secolo a.C.)



- Autore degli *Elementi* , il più grande trattato di Matematica dell'antichità (e non solo), secondo solo alla Bibbia per numero di edizioni.
- Grande sistematore della matematica greca
- Non abbiamo informazioni sulla sua vita. Unica cosa che ci è stata tramandata: visse ad Alessandria attorno al III secolo a.C.
- Forse allievo di una delle scuole filosofiche più famose dell'antichità: l'Accademia di Platone ad Atene.
- Era direttore della grande Biblioteca e insegnava al Museo di Alessandria.
- "Non esiste una via regia alla geometria".

Le opere

Spesso, Euclide e gli *Elementi* vengono considerati come sinonimi.
In realtà, Euclide ha scritto anche una dozzina di trattati, che coprivano vari argomenti: dall'ottica all'astronomia, dalla musica alla meccanica, e anche un libro sulle sezioni coniche.
Ma più della metà di ciò che scrisse Euclide è andato perduto, comprese alcune delle sue opere più importanti, come il trattato sulle coniche.
Tra le opere perdute:

- *Luoghi superficiali*
- *Pseudaria* (o *False conclusioni*)
- *Porismi*

Cosa sono gli *Elementi* ?

- Cosa sono gli *Elementi*?
  Non erano una raccolta di tutte le conoscenze geometriche del tempo, ma un *manuale* (anche se non il primo) introduttivo che si limitava ad esporre tutta la matematica elementare.
- Qual è il segreto del suo successo?
  Abilità didattica di Euclide. La trattazione si basa su un processo di *deduzione logica* di teoremi, da un insieme di definizioni, postulati e assiomi.
- È originale?
  A volte attinse dalle opere dai suoi predecessori. Si ritiene che la *disposizione* del materiale fosse opera sua, e che anche qualche dimostrazione sia stata sviluppata da lui stesso. Ma al di là di questo, è difficile valutare l'effettivo grado di originalità.

Gli *Elementi*

- Qual è il ragionamento usato?
  Il ragionamento algebrico viene rivestito di una forma geometrica, ad es:
  l'espressione $\sqrt{A}$ è introdotta come lato di un quadrato di area A;
  equazioni lineari e quadratiche vengono risolte per mezzo di costruzioni geometriche che conducono all' "applicazione di aree".
- Com' è strutturata?
  Gli *Elementi* sono suddivisi in 13 libri, o capitoli, di cui:
  - I primi quattro trattano di *GEOMETRIA PIANA*, e conducono dalle proprietà più elementari di linee ed angoli a: congruenza di triangoli, eguaglianza di aree, teorema di Pitagora, cerchio,...;
  - Tra il sesto e il nono, troviamo temi come *teoria dei numeri e delle proporzioni*;
  - Il decimo tratta degli *incommensurabili*;
  - Gli ultimi tre trattano di *geometria solida*.

Non c'è alcuna introduzione all'opera. Il Libro I si apre bruscamente con un elenco di 23 definizioni.
Ma la "definizione" non era intesa dai Greci nel senso logico che noi oggi le attribuiamo: per i Greci, ha un significato *REALE* anziché *nominale*, cioé sta ad indicare un oggetto cui si attribuisce in qualche modo esistenza fuori di noi, piuttosto che spiegare un processo costruttivo.

Definizione (1)

Punto è ciò che non ha parti.

Il termine adoperato da Euclide, che significa letteralmente "segno", allude all'INESISTENZA sensibile del punto.

Elementi, Libro I

Non c'è alcuna introduzione all'opera. Il Libro I si apre bruscamente con un elenco di 23 definizioni.
Ma la "definizione" non era intesa dai Greci nel senso logico che noi oggi le attribuiamo: per i Greci, ha un significato *REALE* anziché *nominale*, cioé sta ad indicare un oggetto cui si attribuisce in qualche modo esistenza fuori di noi, piuttosto che spiegare un processo costruttivo.

Definizione (1)

Punto è ciò che non ha parti.

Il termine adoperato da Euclide, che significa letteralmente "segno", allude all'INESISTENZA sensibile del punto.

I cinque Postulati (della Geometria)

Dopo le definizioni, Euclide elenca 5 postulati e 9 nozioni comuni. I postulati sono:

- Si possa tracciare una retta da un punto qualsiasi a un altro punto qualsiasi;
- Si possa prolungare indefinitamente una linea retta;
- Si possa descrivere un cerchio con un centro qualsiasi ed un raggio qualsiasi;
- Tutti gli angoli retti siano uguali tra loro;
- Se una retta che interseca due altre rette forma dalla stessa parte angoli interni inferiori a due angoli retti, le due rette, se estese indefinitamente, si incontrano da quella parte dove gli angoli sono inferiori a due angoli retti.

Nozioni comuni

Le nozioni comuni sono:

- Cose uguali alla stessa cosa sono anche uguali tra loro;
- Se a cose uguali si aggiungono cose uguali, le somme sono uguali;
- Se da cose uguali si tolgono cose uguali, i resti sono uguali;
- Se a cose disuguali si aggiungono cose uguali, i tutti sono disuguali;
- I doppi di una stessa cosa sono uguali tra loro;
- Le metà di una stessa cosa sono uguali tra loro;
- Le cose che si sovrappongono l'una all'altra sono uguali tra loro;
- Il tutto è maggiore della parte;
- Due rette non comprendono uno spazio.

Libro I: 48 proposizioni

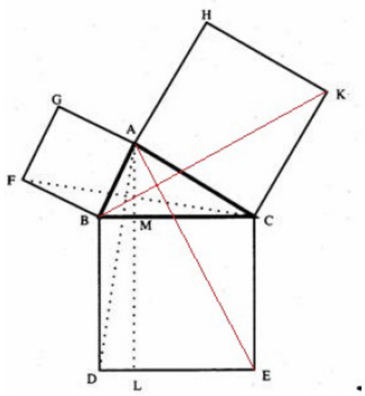
Seguono poi 48 proposizioni;
nelle prime tre si dimostra che è sempre possibile una costruzione con l'uso del compasso euclideo, e quindi Euclide mostra che si può usare liberamente il compasso, come si fa di solito, per riportare le lunghezze.

- Prop. 1:*"Sopra una data retta terminata, costruire un triangolo equilatero"*;
- Prop. 2:*"Per un punto dato condurre una retta uguale ad una retta data"*;
- Prop. 3:*"Date due rette diseguali, togliere dalla maggiore una retta eguale alla minore"*.

Il Libro I si chiude con le proposizioni 47 e 48, ovvero con la dimostrazione del *Teorema di Pitagora* e del suo *reciproco*.

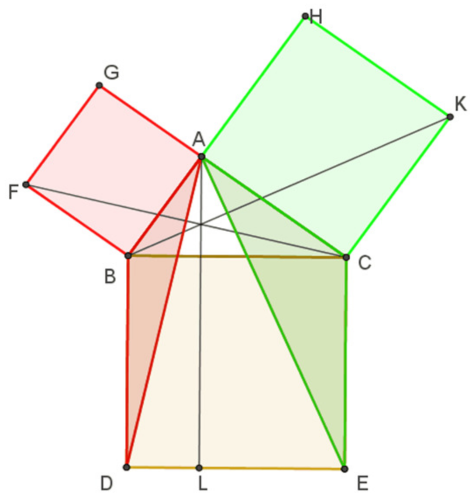
Libro I: la Prop. 47 (teorema di Pitagora)

Prop.47: "Nei triangoli rettangoli, il quadrato del lato che sottende l'angolo retto è uguale alla somma dei quadrati costruiti sui lati che comprendono l'angolo retto."



Prop.48: "Se in un triangolo il quadrato costruito su uno dei lati è uguale alla somma dei quadrati costruiti sugli altri due lati, l'angolo compreso tra questi due lati è retto."

Teorema di Pitagora: animazione della dimostrazione di Euclide



52

Libro II, detto «dell'algebra geometrica»

Il Libro II è breve e contiene solo 14 proposizioni, nessuna delle quali compare oggi nei moderni manuali.
Tuttavia, al tempo di Euclide, questo libro aveva una grande importanza.

- *Prop.1: "Se vi sono due segmenti, e uno di essi viene tagliato in un numero qualsiasi di segmenti, il rettangolo delimitato dai due segmenti è uguale alla somma dei rettangoli delimitati dal segmento non tagliato e da ciascuno dei segmenti."*

Questa equivale all'identità geometrica:

$$a(b + c + d + \dots) = ab + ac + ad + \dots,$$

oggi nota come *legge distributiva*.

Libro II, Proposizione 4

- *Prop.4: "Se un segmento viene tagliato a caso, il quadrato costruito sull'intero segmento è uguale alla somma dei quadrati costruiti sui segmenti e al doppio del rettangolo delimitato dai segmenti.*

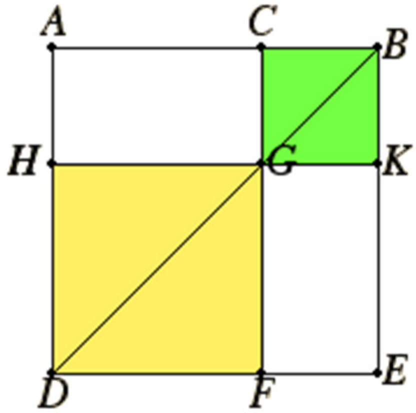
Questa equivale all'identità geometrica:

$$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab.$$

Nelle dimostrazioni delle proposizioni 5 e 6, invece, le figure che Euclide usa hanno un particolare significato:
queste figure erano infatti l'equivalente geometrico della soluzione di un'equazione di secondo grado per uno studente della Grecia antica; in particolare, la figura usata nella proposizione 11, costituisce la base per illustrare la proprietà iterativa della sezione aurea.

Libro II, Proposizione 4 (noi lo vediamo come il «quadrato del binomio»…, ma per Euclide?)

- “*Se si divide a caso una linea retta, il quadrato di tutta la retta è uguale alla somma dei quadrati delle parti e del doppio del rettangolo compreso dalle parti* [*stesse*]”.



Libro II, Proposizione 14 (animazione)

Libri III e IV: geometria del cerchio

Il Libro III contiene 11 definizioni e 37 proposizioni.

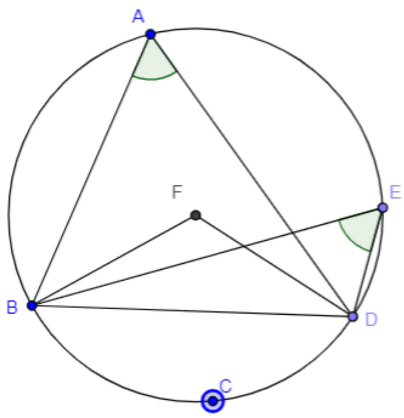
- Prop.1, Libro III: *"Dato un cerchio, trovarne il centro."*

Il Libro IV contiene 7 definizioni e 16 proposizioni (riguardano, in gran parte, figure inscritte o circoscritte ad un cerchio).

Questi due libri trattanno la *GEOMETRIA DEL CERCHIO*.

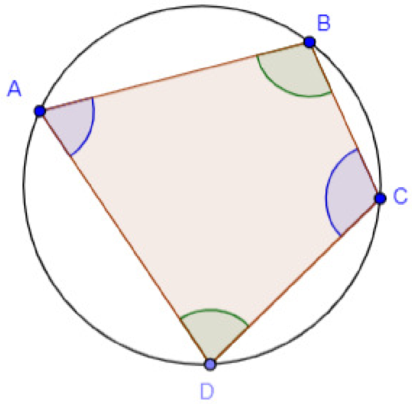
Libro III, Proposizione 21. Angoli alla circonferenza

- Prop.21: In un cerchio gli angoli nella stessa corda sono uguali tra loro



Libro III, Proposizione 22. Quadrilatero inscritto in una circonferenza

- Prop.22: Gli angoli opposti dei quadrilateri nei cerchi sono uguali [hanno per somma] a due retti.



Libro IV: poligoni inscritti e circoscritti al cerchio

Il Libro III contiene 11 definizioni e 37 proposizioni.

- Prop.1, Libro III: *"Dato un cerchio, trovarne il centro."*

Il Libro IV contiene 7 definizioni e 16 proposizioni (riguardano, in gran parte, figure inscritte o circoscritte ad un cerchio).

Questi due libri trattanno la *GEOMETRIA DEL CERCHIO*.

Libri V: Teoria delle proporzioni

- Libro **V**:
  1. Riprende la definizione di Eudosso e Archimede:*"due grandezze stanno in rapporto l'una con l'altra, quando, se ne sono presi multipli, sono in grado l'una di superare l'altra."*
  2. Proprietà distributive e associative e proprietà delle proporzioni.

Libro VI: Similitudine di poligoni

- Libro **VI**: contiene la generalizzazione del teorema di Pitagora e i due teoremi di Euclide sui triangoli rettangoli:
  1. Teorema di Pitagora:*"Nei triangoli rettangoli, la figura costruita sul lato che sottende l'angolo retto è uguale alle figure simili e similmente costruite sui lati che contengono l'angolo retto."*
  2. Primo teorema di Euclide:*"In un triangolo rettangolo il cateto è medio proporzionale tra la sua proiezione sull'ipotenusa e l'ipotenusa stessa"*
  3. Secondo teorema di Euclide:*"In un triangolo rettangolo l'altezza relativa all'ipotenusa è media proporzionale tra le proiezioni dei cateti relative sull'ipotenusa."*

Libro VI: Similitudine e risoluzione geometrica delle proporzioni

Euclide indica i procedimenti per risolvere le proporzioni geometricamente.
I principali problemi sono:

1. la costruzione della quarta proporzionale: $a : b = c : x$ (Prop. VI.12);
2. la costruzione della media proporzionale: $a : x = x : b$ (Prop. VI.13);
3. la costruzione della sezione aurea: $a : x = x : (a - x)$ (Prop. VI.30).

Libri VII, VIII, IX: libri aritmetici (Teoria dei numeri)

La teoria generale dei numeri viene trattata nei libri **VII, VIII, IX**.
I temi principali sono:

1. geometria dei numeri: numeri primi, composti, piani, solidi, quadrati e cubi;
2. l'algoritmo di Euclide e il massimo comune divisore;
3. dimostrazione della quantità infinita di numeri primi;
4. sequenze di numeri in proporzione geometrica, numeri pari, dispari e perfetti.

Libro VII: le prime definizioni (sui numeri)

Def. VII.1:*"Unità è ciò secondo cui ciascun ente è detto uno."*
Def. VII.2:*"Numero è una pluralità composta da unità"*
Def. VII.3:*"Un numero è parte di un [altro] numero, il minore di quello maggiore, quando esso misuri il maggiore. "*
Def. VII.11:*"Numero primo è quello che è misurato soltanto dall'unità."*
Def. VII.12:*"Numeri primi fra loro sono quelli che hanno soltanto l'unità come misura comune."*
Def. VII.13:*"Numero composto è quello che è misurato da qualche numero."*

Definizioni da VII.16-19 riguardano le "forme geometriche" dei numeri:
numero piano è il prodotto di due numeri chiamati lati;
numero solido è il prodotto di tre lati;
numero quadrato è il prodotto di due lati uguali,
numero cubo è il prodotto di tre lati uguali.

Def. VII.22: *"Numero perfetto è quello che è uguale alla somma delle proprie parti."*

Libro IX: numeri in progressione geometrica

In termini eleganti, Euclide ci fornisce una formula per la somma dei numeri in progressione geometrica:

Prop. IX.35:*"Se tanti numeri quanti se ne vuole sono in proporzione continua, dal secondo all'ultimo si sottraggono numeri uguali al primo, allora come l'eccesso del secondo starà al primo così l'eccesso dell'ultimo starà a tutti quelli che lo precedono."*

Equivalente, in termini moderni : $\frac{a_{n+1}-a_1}{a_1+a_2+\ldots+a_n} = \frac{a_2-a_1}{a_1}$

Libro IX, Proposizione 20: l’infinità dei numeri primi

Sui numeri primi afferma :

Prop. IX.20: *"I numeri primi sono più di una qualsiasi assegnata moltitudine di numeri primi."*

La dimostrazione è di tipo indiretto: l’ipotesi dell’esistenza di un numero finito di numeri primi porta ad una contraddizione.

P=prodotto di numeri primi
N=P+1, dunque N non è primo.
N è un numero composto, dunque esiste p primo che lo misura.
Ma p non è un fattore di P, altrimenti sarebbe anche un fattore di 1.
Quindi p è diverso dai primi prodotto di P.
Concludiamo che è falso che P è prodotto di tutti i numeri primi.

Euclide, un teorema mirabile:
I numeri primi sono infiniti

Prime numbers

	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
101	102	103	104	105	106	107	108	109	110
111	112	113	114	115	116	117	118	119	120

Libro IX, Proposizione 36: i numeri perfetti

Prop. IX.36:*"Se, a partire dall'unità, si prende un numero a piacere di numeri successivamente proporzionali in ragione doppia, fino a che la loro somma sia un numero primo, il prodotto di tale somma per l'ultimo numero sarà un numero perfetto."*

Equivalente, in termini moderni :
"Se $S_n = 1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{n-1} = 2^n - 1$" è primo, allora $2^{n-1}(2^n - 1)$ è un numero perfetto.

Esempi di numeri perfetti: 6, 28, 496,….

Libro X: grandezze incommensurabili

1. Nel libro **X** definisce le grandezze commensurabili *"Due grandezze sono dette commensurabili se il loro rapporto è un numero razionale"* e ottiene un criterio sulla incommensurabilità per mezzo dell'algoritmo di divisione.

   Prop. X.2 :*"Date due grandezze disuguali, se sottraendo ripetute volte di seguito dalla grandezza maggiore la minore , la misura delle grandezze che si hanno per resto misura la precedente, le grandezze saranno incommensurabili."*

2. intraprende una classificazione dei tipi di irrazionali

Libri XI, XII e XIII: geometria solida

1. Libro **XI**: geometria tridimensionale,

   Prop. XI.1 *Un solido è ciò che ha lunghezza, larghezza e profondità.*
   Prop. XI.2 *Limite di un solido è una superficie.*

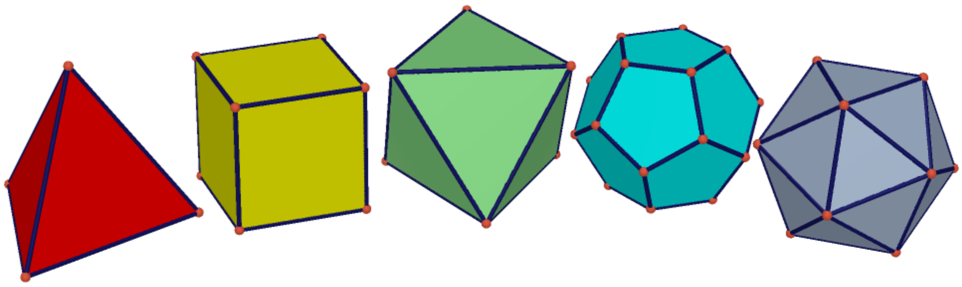
2. Libro **XII**: misurazione di figure;

3. Libro **XIII**: proprietà dei poligoni regolari; vi è il primo esempio di teorema di classificazione.

   Prop. XIII.18: *"Non può essere costruita nessun'altra figura, oltre alle cinque già dette, che è contenuta da figure equilatere ed equiangolari uguali l'una all'altra."*

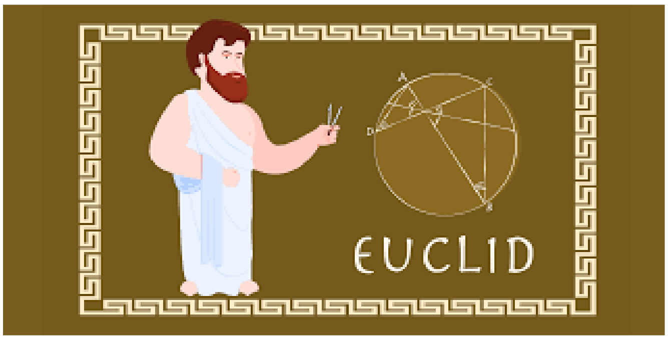
Libro XIII, Proposizione 18, i solidi platonici sono solo di 5 tipi

Prop. XIII.18: *"Non può essere costruita nessun'altra figura, oltre alle cinque già dette, che è contenuta da figure equilatere ed equiangolari uguali l'una all'altra."*



Gli *Elementi* di Euclide: conclusioni

Secondo Proclo si possono chiamare "elementi" tutte le cose *"la cui teoria aiuta a penetrare nella comprensione delle altre cose, e a partire dalle quali ci riesce facilitata la risoluzione delle difficoltaà insite in queste altre cose".* Gli elementi sono, dunque, la strada maestra che ci conduce alla conoscenza della matematica.
Gli Elementi sono la prima fonte sostanziale di conoscenza matematica, usata da tutte le generazioni successive,e i loro contenuti determinarono il corso del pensiero successivo.



Grazie dell'attenzione!

luigi.tomasi@unife.it