

Matematica x Tutti - 31 ottobre 2023

**Le coniche: ellisse, parabola, iperbole:
da Apollonio di Perga al Seicento**

Luigi Tomasi

luigi.tomasi@unife.it



Con il contributo della

**Fondazione
Cassa di Risparmio
di Padova e Rovigo**

Matematica per tutti

Un piccolo corso di presentazione della matematica, con riferimenti storici e ai suoi apporti logico filosofici. La matematica è alla base delle Scienze e della Tecnologia ed ha sempre più vaste applicazioni; quindi fa parte della preparazione del cittadino. Il corso è rivolto a chi ha una preparazione di scuola superiore e voglia rivedere o approfondire, anche dal punto di vista storico e culturale, alcuni concetti fondamentali di matematica.

Prima parte: ottobre-novembre 2023

DATA	TEMA	RELATORE
Martedì 03/10/2023	Origini della matematica. La matematica greca: la geometria, ma non solo (Euclide, III sec. a.C.)	Luigi Tomasi
Martedì 17/10/2023	Archimede: la misura della lunghezza della circonferenza, dell'area del cerchio, del volume e superficie dei solidi rotondi (cilindro, cono e sfera)	Luigi Tomasi
Martedì 31/10/2023	Le coniche. Elisse, parabola e iperbole (da Apollonio di Perga al Seicento...)	Luigi Tomasi
Martedì 14/11/2023	La trigonometria (Tolomeo, i matematici arabi, Copernico...); le funzioni goniometriche	Luigi Tomasi

Seconda parte: maggio-giugno 2024

DATA	TEMA	RELATORE
Martedì 07/05/2024	L'algebra, il contributo della matematica araba e gli algebristi italiani del Cinquecento	Luigi Tomasi
Martedì 14/05/2024	La geometria analitica (Cartesio e Fermat)	Luigi Tomasi
Martedì 21/05/2024	La nascita del calcolo differenziale e integrale (Newton e Leibniz); la Matematica e la rivoluzione scientifica del Seicento	Luigi Tomasi
Martedì 28/05/2024	Gli sviluppi dell'analisi matematica, da Eulero alla nascita del concetto di limite	Luigi Tomasi
Martedì 04/06/2024	Il calcolo delle probabilità e le sue applicazioni	Luigi Tomasi
Martedì 11/06/2024	La teoria degli insiemi. La crisi dei fondamenti. La "matematica moderna". Matematica e Informatica. Matematica dappertutto.	Luigi Tomasi

Sunto dell'intervento

- Apollonio di Perga, «il Grande Geometra»
- Quel che sappiamo sulla sua vita
- Il trattato sulle coniche (8 libri)
- Le coniche dopo 18 secoli: la Rivoluzione scientifica del Seicento: Keplero, Galileo, Cartesio, Newton
- Le coniche in cielo e in terra
- Oltre il Seicento

CRONOLOGIA

- 360	Eudoxus on proportion and exhaustion (approx.)		
- 350	Menaechmus on conic sections (approx.) Dinostratus on quadratrix (approx.)		
- 335	Eudemus: <i>History of Geometry</i> (approx.)	- 347	Death of Plato
- 330	Autolyceus: <i>On the Moving Sphere</i> (approx.)	- 332	Alexandria founded
- 320	Aristaeus: <i>Conics</i> (approx.)	- 323	Death of Alexander
- 300	Euclid's <i>Elements</i> (approx.)	- 322	Deaths of Aristotle and Demosthenes
- 287ca.	Nascita di Archimede	- 311	Beginning of Seleucid Era in Mesopotamia
- 260	Aristarchus' heliocentric astronomy (approx.)	- 306	Ptolemy I (Soter) of Egypt
- 230	Sieve of Eratosthenes (approx.)	- 283	Pharos at Alexandria
- 225	<i>Conics of Apollonius</i> (approx.)	- 264	First Punic War opened
- 212	Death of Archimedes	- 232	Death of Asoka, the "Buddhist Constantine"
- 180	Cissoid of Diocles (approx.) Conchoid of Nicomedes (approx.) Hysicles and 360° circle (approx.)	- 210	Great Chinese Wall begun
		- 166	Revolt of Judas Maccabaeus

Cronologia sintetica

ellenismo greco (323 a.C. - 31 a.C. battaglia di Azio)

ellenismo romano (31 a.C. – 500 d.C. ca.): "[Graecia capta
ferum victorem cepit](#)"

Euclide di Alessandria (vissuto tra il IV
e il III sec. a.C.)

Archimede di Siracusa (ca. 287 a.C. – 212 a.C.)

Apollonio di Perga (ca. 262 a.C. – 190 a.C.)

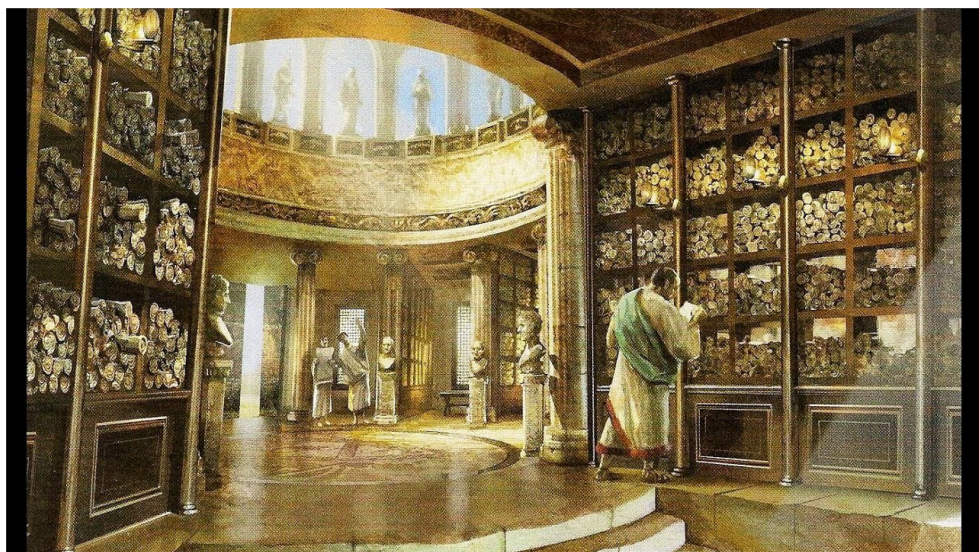
**Alessandria d'Egitto: fondata nel 332 a.C. da
Alessandro Magno (356 a.C. – 323 a.C.)**



Alessandria: la grande Biblioteca e il Museo



Alessandria: la grande Biblioteca e il Museo



Pergamo: l'Accademia e la grande Biblioteca

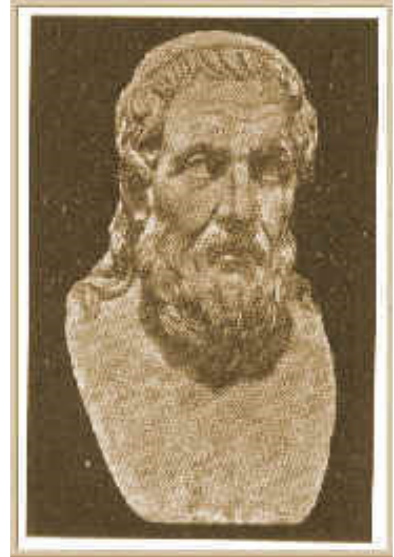


Pergamo: l'altare di Pergamo (a Berlino)



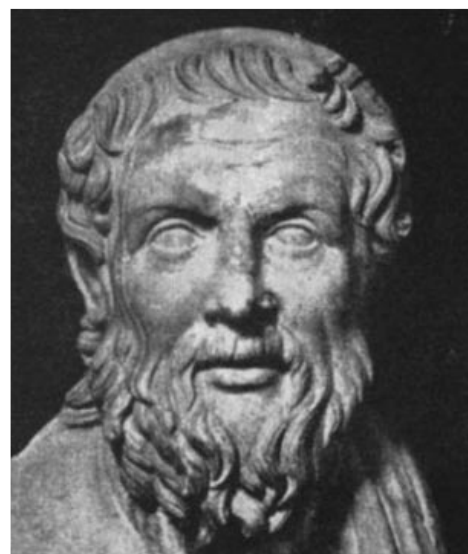
Apollonio di Perga (ca. 262 a.C. – 190 a.C.)

- Matematico greco (262 circa -180 a. C. circa); studiò in Alessandria con gli allievi di Euclide, come del resto Archimede (più vecchio di circa 30 anni).
- Della sua opera fondamentale, in otto libri, sulle *Coniche*, solo i primi quattro ci sono pervenuti nell'originale greco, i tre successivi attraverso traduzioni arabe, e l'ultimo è andato perduto.
- In quest'opera si trovano, ottenute per via diretta, sintetica, quasi tutte le proprietà delle coniche quali vengono oggi ricavate con i metodi della geometria analitica e proiettiva.



Apollonio di Perga (ca. 262 a.C. – 190 a.C.)

- Apollonio studiò anche curve d'ordine superiore e affrontò altri problemi, dei quali è rimasto classico il [problema di Apollonio](#): è tra i problemi più difficili trattati nell'altra sua opera *Sui contatti*.
- L'opera d'Apollonio fu prezioso punto di partenza per la ripresa della ricerca geometrica nell'età moderna: fu studiata, fra gli altri, da B. Cavalieri, Keplero, Cartesio, Newton.



Cosa sappiamo di Apollonio?

- Di Apollonio si sa che era nato a Perga, in Pamfilia, e che aveva ricevuto la sua educazione scientifica ad Alessandria.
- Per un certo periodo visse anche a Pergamo, dove c'era una Accademia e una Biblioteca che in ordine di importanza veniva immediatamente dopo quella del Museo di Alessandria.
- Non conosciamo con esattezza le date della sua vita, ma la tradizione riferisce che egli fu attivo durante i regni di Tolomeo Evergete e Tolomeo Filopatore: è stata avanzata l'ipotesi che sia vissuto dal 262 al 190 a.C..
- L'opera che ha fatto sì che Apollonio diventasse noto come "il Grande Geometra" è intitolata le *Coniche*.

Perga



Perga



Le città di Apollonio

Perga

Pergamo

Alessandria



Le Coniche: trattato in 8 libri (ca. 225 a.C.)

- Di questo trattato in otto libri, solo i primi quattro sono pervenuti nel testo originale greco; i tre successivi invece sono giunti a noi tramite una traduzione araba. L'ottavo libro è andato perduto.
- Le sezioni coniche erano già note da un secolo e mezzo quando Apollonio compose questo celebre trattato su queste curve, ma nessuna opera precedente (neppure le *Coniche* di Euclide) aveva raggiunto un livello così alto.

Le coniche, frontespizio dell'edizione (in latino) del 1697



Le coniche: trattato in 8 libri

- Il Libro I si apre con una esposizione delle motivazioni che avevano portato Apollonio a scrivere l'opera.
- Mentre si trovava ad Alessandria, Apollonio aveva ricevuto la visita di un geometra di nome Neucrate e fu per le sue sollecitazioni che Apollonio scrisse una prima versione affrettata delle *Coniche* in otto libri.

Le coniche: trattato in 8 libri

- Più tardi, a Pergamo, l'autore ebbe il tempo di perfezionare ogni libro e per questo i Libri IV e VII si aprono con dediche ad Attalo, re di Pergamo.
- L'autore considera i **primi quattro libri** un'introduzione allo studio delle coniche e perciò si è avanzata l'ipotesi che gran parte del loro contenuto fosse già apparso in precedenti trattati.

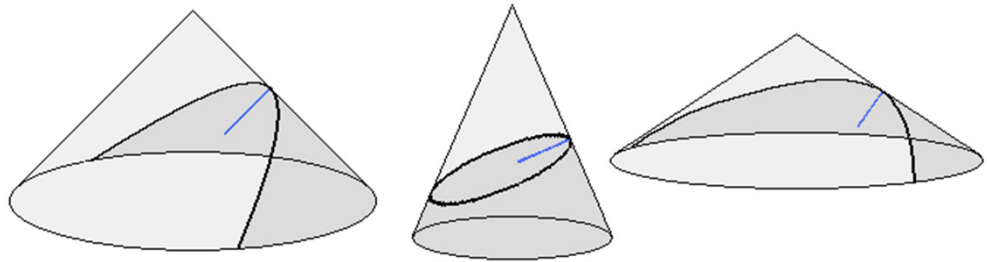
Le coniche: trattato in 8 libri

- Gli ultimi quattro libri vengono descritti da Apollonio come ulteriori sviluppi degli argomenti al di là degli elementi fondamentali (contenuti nei primi quattro libri).

Le coniche: trattato in 8 libri

- Prima di Apollonio l'ellisse, la parabola e l'iperbole venivano costruite come sezioni di tre tipi nettamente distinti di coni circolari retti, a seconda che l'angolo al vertice fosse acuto, retto o ottuso.

Prima di Apollonio....
(si studiavano tre casi di cono, con angolo al vertice rispettivamente retto, acuto, ottuso)



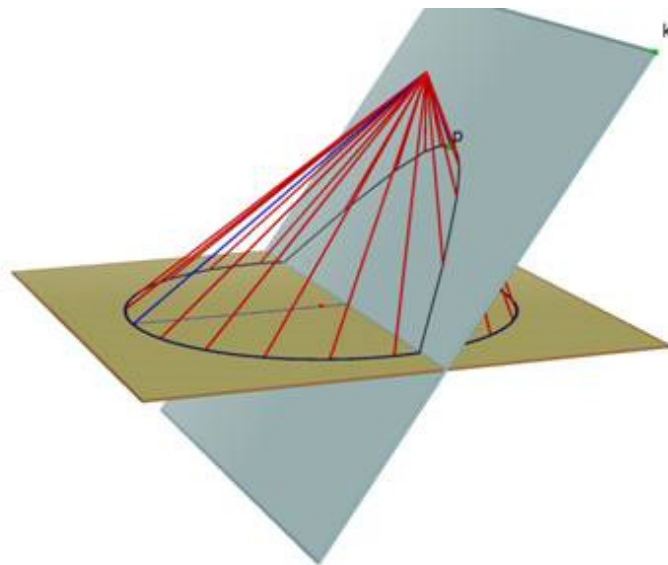
Apollonio: le coniche da un unico cono, non importa se retto o obliquo

- Apollonio, per la prima volta, dimostrò che non era necessario prendere sezioni perpendicolari ad un elemento del cono e che da un unico cono era possibile ottenere tutte e tre le varietà di sezioni coniche semplicemente variando l'inclinazione del piano di intersezione.

Apollonio: altra importante generalizzazione... , cono obliquo

- Una seconda importante generalizzazione si ebbe quando Apollonio dimostrò che non era necessario che il cono fosse un cono retto (cioè un cono il cui asse è perpendicolare alla base), ma che poteva essere anche un cono circolare obliquo o scaleno.

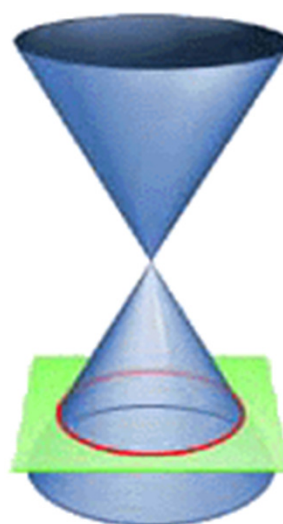
La definizione di cono data da Apollonio



Apollonio: altra importante generalizzazione... , cono a due falde

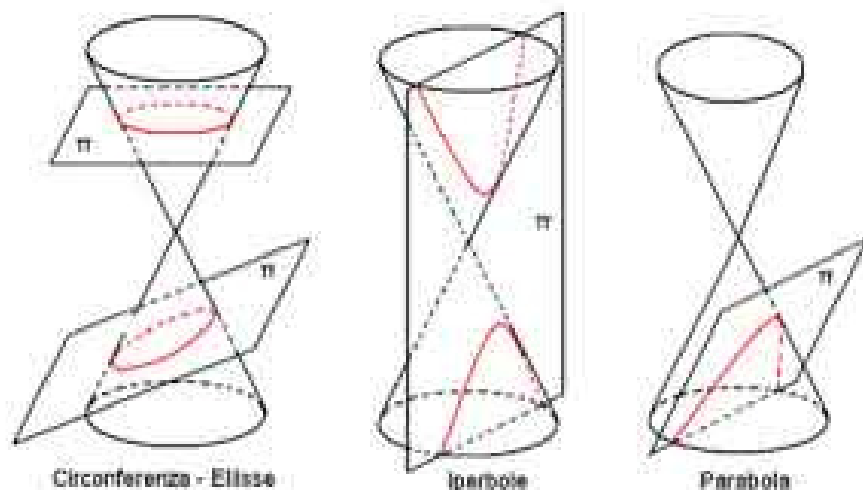
- Infine, Apollonio avvicinò ulteriormente le antiche curve al punto di vista moderno sostituendo il cono a una falda con un cono a doppia falda.
- Infatti, Apollonio dava la stessa definizione che viene usata ancora oggi di cono circolare: [vedi Museo delle macchine Matematiche di Modena](#)

Apollonio....
(un solo caso, il
cono è "doppio" ed
illimitato)



Circle

Apollonio (sezioni di un cono doppio)



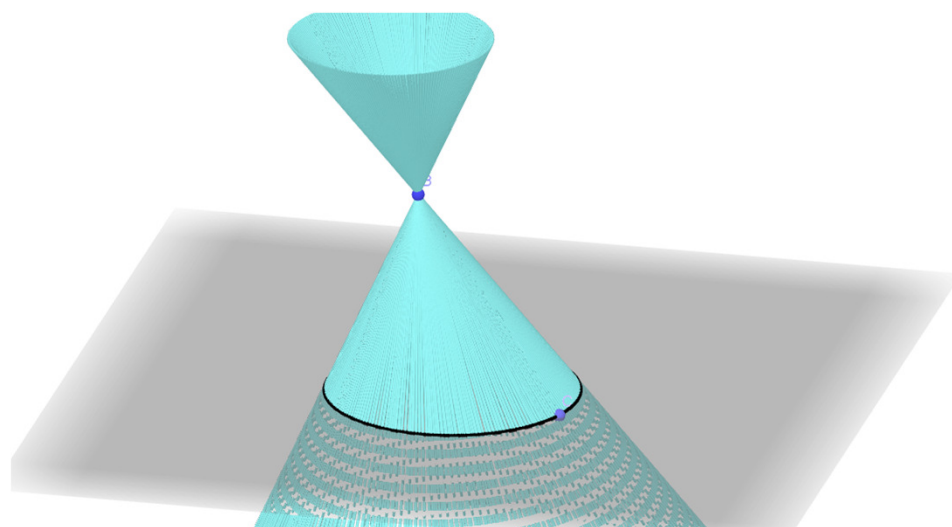
La definizione di cono data da Apollonio

- *Se una retta, prolungantesi all'infinito e passante sempre per un punto fisso, viene fatta ruotare lungo la circonferenza di un cerchio che non si trovi nello stesso piano del punto in modo che passi successivamente attraverso ogni punto di quella circonferenza, la retta che ruota traccerà la superficie di un cono doppio.*

Cono a due falde: l'iperbole ha due rami

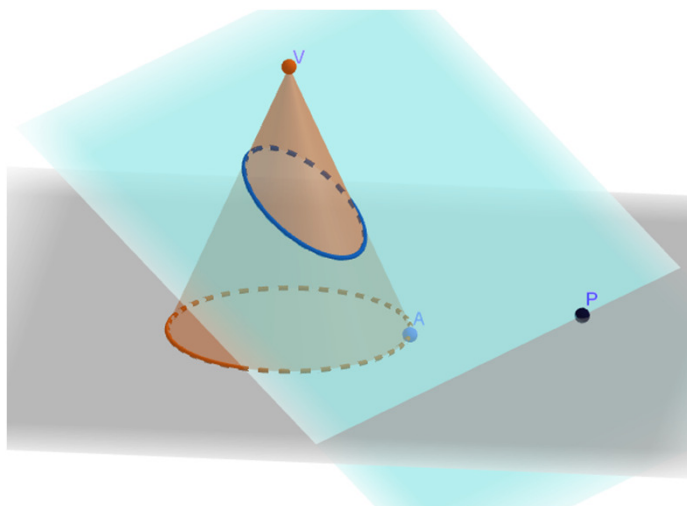
- Questo cambiamento fece sì che l'iperbole assumesse la forma di quella curva a due rami che ci è oggi familiare.
- I matematici antichi parlavano spesso di "due iperboli" piuttosto che di "due rami" di un'unica iperbole, ma in entrambi i casi si riconosceva la duplicità della curva.

Animazione con GeoGebra (cono a due falde)



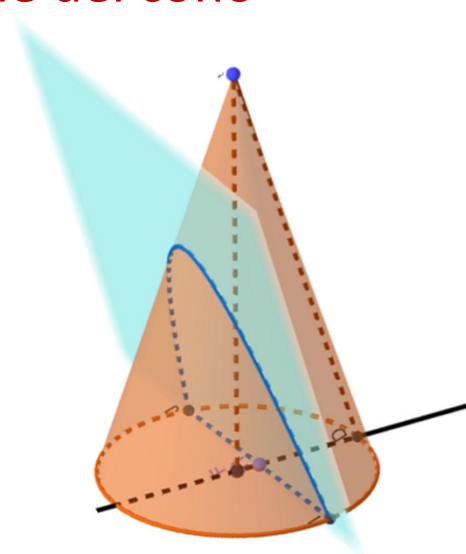
L'ellisse come sezione del cono

- Il piano seziona una sola falda.
- L'angolo tra il piano e l'asse del cono è maggiore dell'angolo di semiapertura del cono.



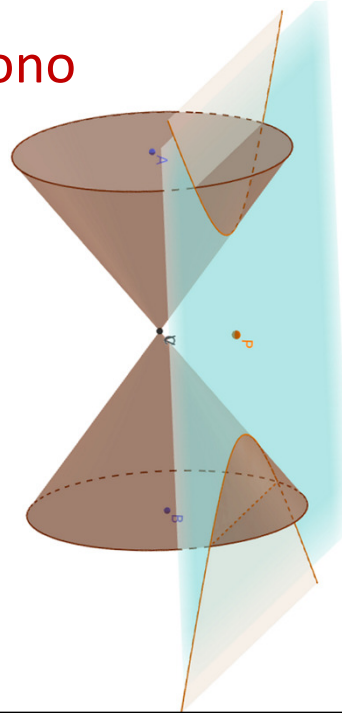
La parabola come sezione del cono

- Il piano è parallelo a una generatrice del cono (più esattamente, al piano tangente al cono sulla generatrice)



L'iperbole come sezione del cono

- Il piano che seziona taglia entrambe le falde (l'angolo formato dal piano con l'asse del cono è minore dell'angolo di semiapertura del cono)

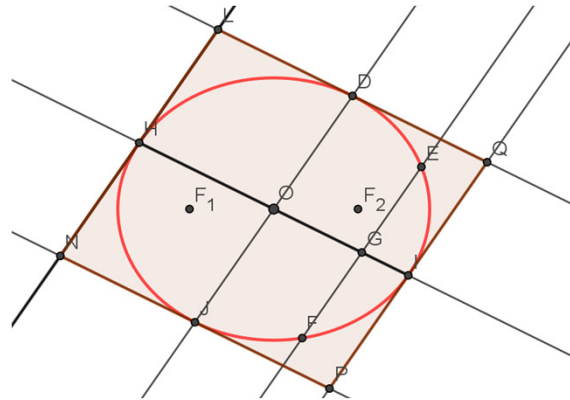


I nomi delle coniche

- Fu Apollonio ad introdurre i termini "ellisse", "iperbole" e "parabola" in relazione alle sezioni coniche;
- essi rappresentavano adattamenti di termini che erano già stati usati precedentemente nella soluzione delle equazioni di secondo grado mediante l'applicazione di aree.

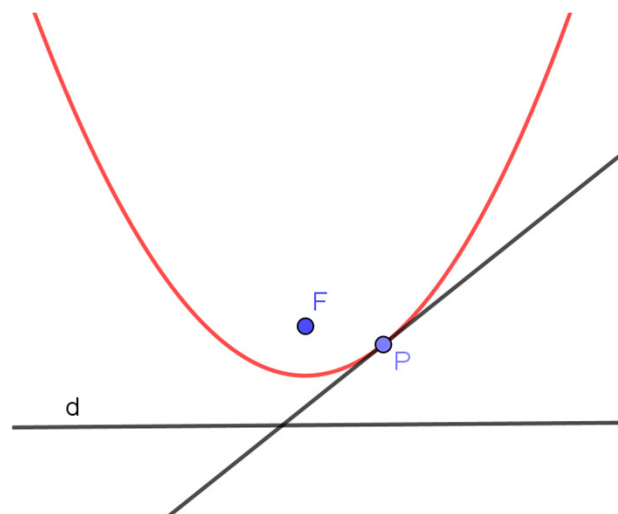
Le coniche: libro II (diametri coniugati)

- Il Libro II contiene lo studio (in parte anticipato nel Libro I) dei diametri coniugati e delle tangenti.



Le coniche: libro II (tangenti a una conica)

- Nel libro II si mostra come tracciare le tangenti a una conica.



Le coniche: libro III

- Apollonio era particolarmente orgoglioso del Libro III. Infatti nella prefazione generale alle Coniche scriveva:
- *Il Libro III contiene molti teoremi notevoli, utili per la sintesi dei luoghi solidi e per la determinazione dei limiti; la maggior parte di essi, e i più belli, sono nuovi. Quando li scopersi, mi resi conto che Euclide non aveva effettuato la sintesi del luogo geometrico rispetto a tre o quattro linee, ma soltanto quella di una parte di tale luogo geometrico, e ciò in maniera casuale e poco felice: non era infatti possibile effettuare la sintesi completa senza queste mie nuove scoperte.*

Le coniche: libro IV

Altro interessante libro de *Le Coniche* è il IV

- Apollonio scrive infatti che in esso si mostra «in quanti modi le sezioni coniche possono incontrarsi l'una con l'altra»
- afferma inoltre, a proposito dei teoremi ivi contenuti «nessuno era stato discusso da autori precedenti».
- In questo libro si stabilisce poi il numero di punti in cui una conica incontra i rami opposti di una iperbole.

Le coniche: libro V

- La prefazione del Libro V, che tratta dei segmenti massimi e minimi (tangenti e normali a una conica) che si possono tracciare rispetto ad una conica, ripete che "l'argomento è uno di quelli che sembrano degni di essere studiati per se stessi".
- Sembra che Isaac Newton si sia servito proprio di queste idee per la sua teoria delle tangenti e dei massimi e minimi.

Le coniche: libro VI

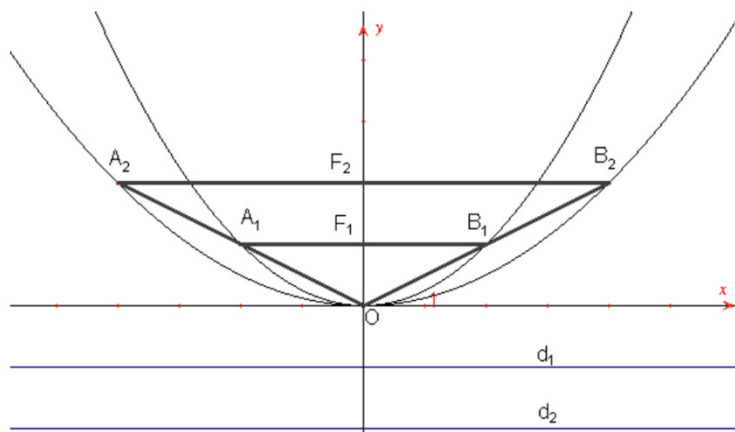
- Dedicando il Libro VI delle *Coniche* al re Attalo (di Pergamo), Apollonio lo descriveva come un libro che abbracciava proposizioni concernenti "segmenti di coniche uguali e disuguali, simili e dissimili, oltre ad altre questioni trascurate da coloro che sono venuti prima di me. In particolare, troverai in questo libro come intersecare, in un cono retto dato, una sezione che sia uguale a una sezione data".

Le coniche: libro VI

- Due coniche si dicono simili se le ordinate tracciate all'asse a distanze proporzionali dal vertice, sono rispettivamente proporzionali alle ascisse corrispondenti.
- Fra le proposizioni più facili del Libro VI vi sono quelle che dimostrano che tutte le parabole sono simili (Prop. 11) e che una parabola non può essere simile a una ellisse o a una iperbole, né una ellisse a una iperbole (Prop. 14, 15).
- Altre proposizioni (VI, 26, 27) dimostrano che se un cono qualsiasi viene intersecato da due piani paralleli formando sezioni iperboliche o ellittiche, le sezioni saranno simili ma non uguali.

Le coniche: libro VI (coniche simili)

- Fra le proposizioni notevoli del Libro VI vi è quella che dimostra che tutte le parabole sono simili (VI, Prop. 11)



Le coniche: libro VII

- *Il Libro VII ritorna sull'argomento dei diametri coniugati e contiene "molte nuove proposizioni concernenti diametri di sezioni e le figure descritte su di essi".*
- *Fra queste ve ne sono alcune che si trovano anche nei manuali moderni, come la dimostrazione (Prop.12, 13, 29,30) che*
- *in ogni ellisse la somma, e in ogni iperbole la differenza, dei quadrati costruiti su due diametri coniugati qualsiasi, è uguale alla somma, rispettivamente alla differenza, dei quadrati costruiti sugli assi.*

Le coniche: libro VIII (perduto)

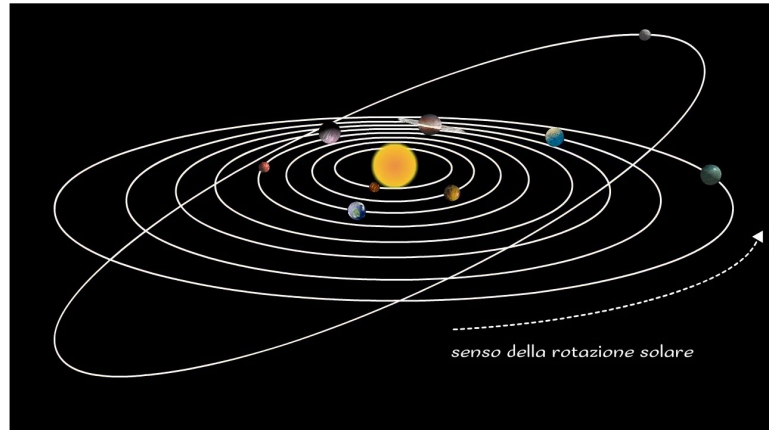
- *È stata fatta la congettura che il Libro VIII, andato perduto, delle *Coniche* non facesse che continuare la trattazione di problemi simili: infatti nella prefazione al Libro VII l'autore scriveva che i teoremi di tale libro sarebbero stati usati nell'VIII per risolvere problemi conici, così che l'ultimo libro era forse una sorta di appendice a tutto il trattato.*

Le coniche nel Seicento (dopo 18
secoli da Apollonio):
Keplero, Galileo, Cartesio, Pascal,
Desargues, Newton

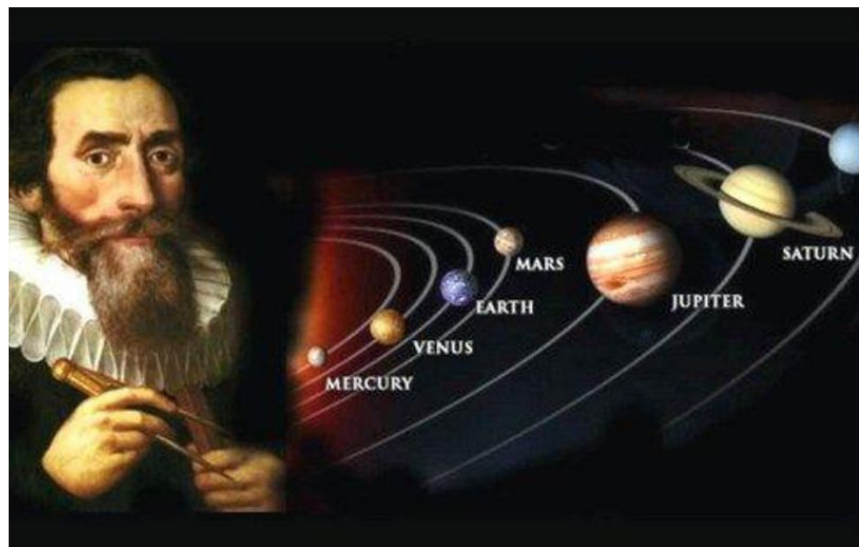
La riscoperta (dopo 18 secoli) delle coniche nel Seicento

- Le coniche vengono riscoperte nel Rinascimento e poi nel Seicento, 18 secoli dopo Apollonio
- Keplero scopre che le orbite dei pianeti sono ellittiche
- Galileo scopre il moto parabolico dei proiettili
- Descartes traduce le anticipazioni di Apollonio in equazioni, applicando l'algebra alla geometria
- Newton con la gravitazione universale spiega perché le orbite di un corpo lanciato dalla Terra deve essere una conica
- Newton inventa un tipo di telescopio basato su specchi parabolici
- Gli architetti barocchi utilizzano le coniche nelle loro costruzioni.

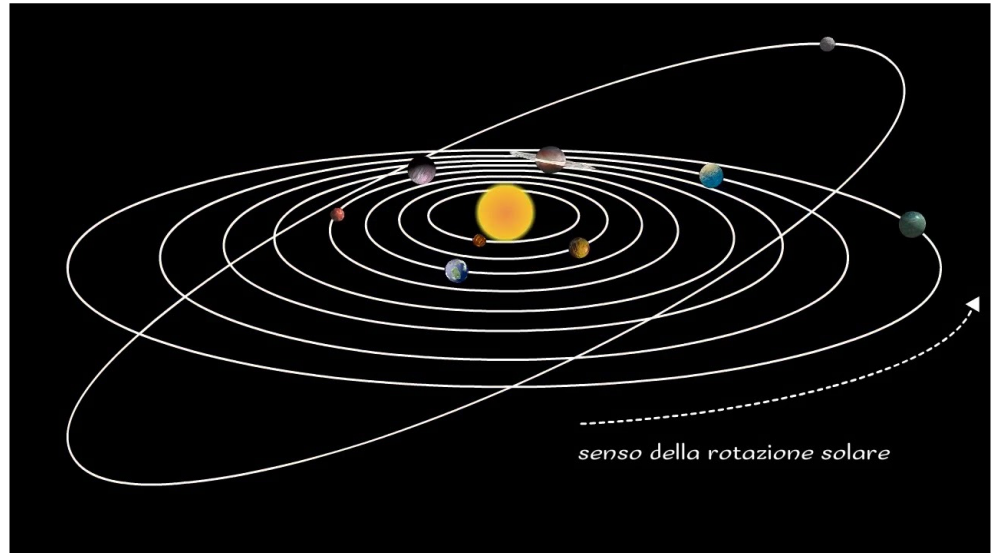
**Problema: pianeti del sistema solare,
periodo di rivoluzione e distanza dal Sole**



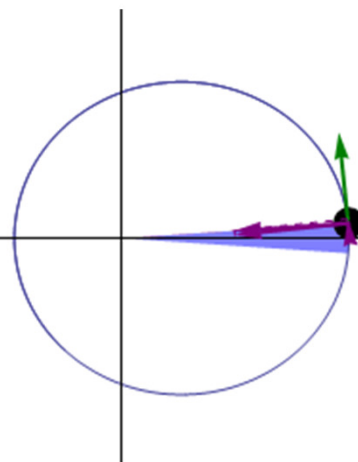
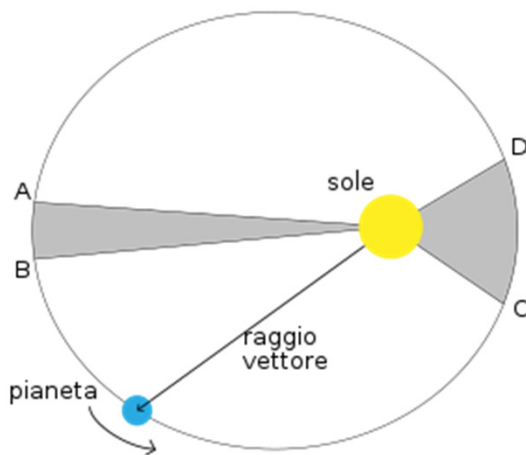
**Problema: orbite dei pianeti del sistema
solare e periodo di rivoluzione, Keplero**



Prima legge di Keplero



Seconda legge di Keplero



Terza legge di Keplero

La III legge di Keplero afferma
che

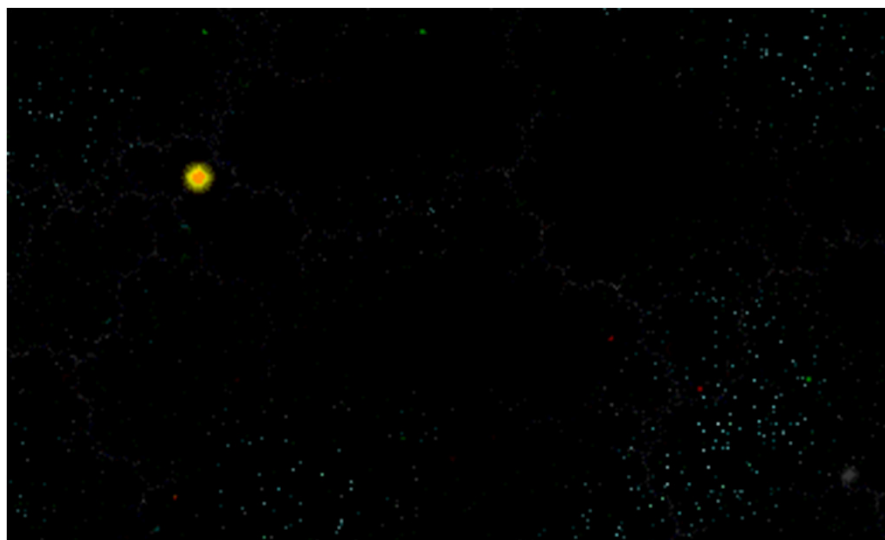
$$\frac{T^2}{d^3} = k$$

T = periodo di rivoluzione

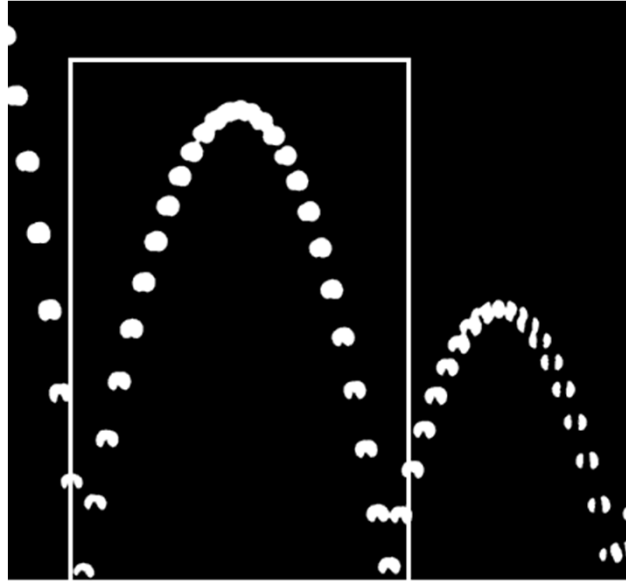
d =semiasse maggiore
dell'orbita

Pianeta	d (milioni di km)	t (milioni di s)
Mercurio	58.2	7.67
Venere	108.3	19.4
Terra	149.6	31.5
Marte	227.8	59.2
Giove	777.9	373.6
Saturno	1422.7	928

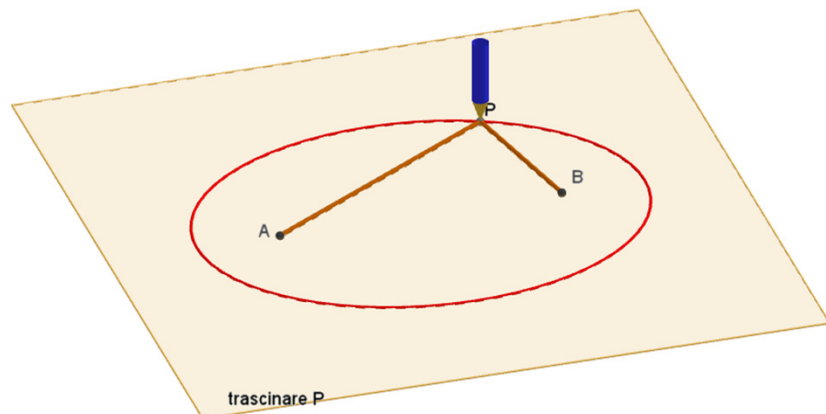
Orbita di una cometa



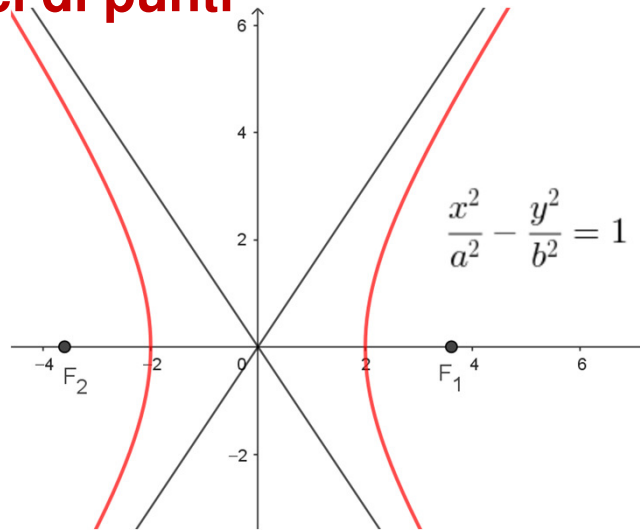
Galileo



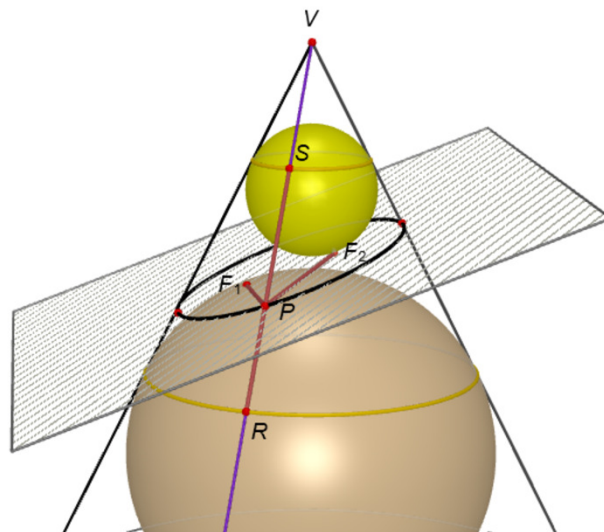
Cartesio: le coniche e la geometria analitica; equazioni delle coniche; le coniche come luoghi geometrici di punti



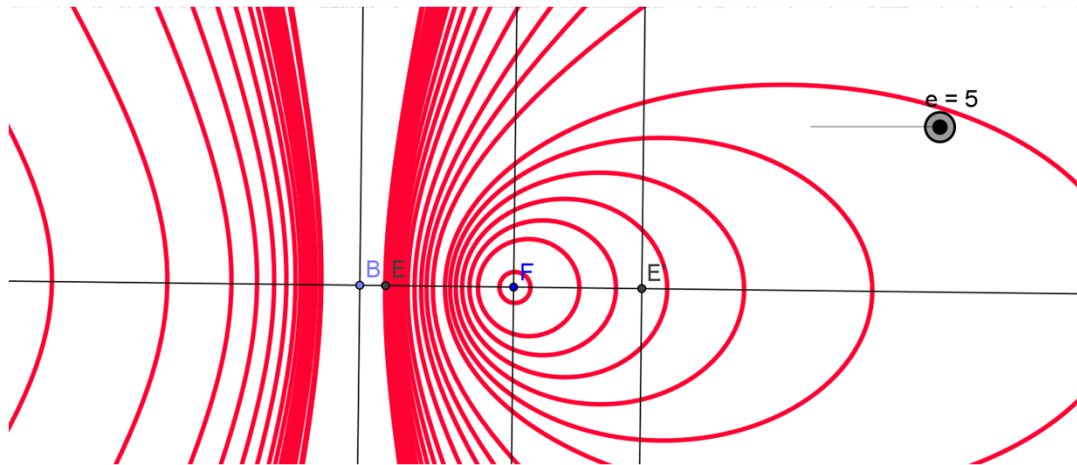
Le coniche e la geometria analitica; equazioni delle coniche; le coniche come luoghi geometrici di punti



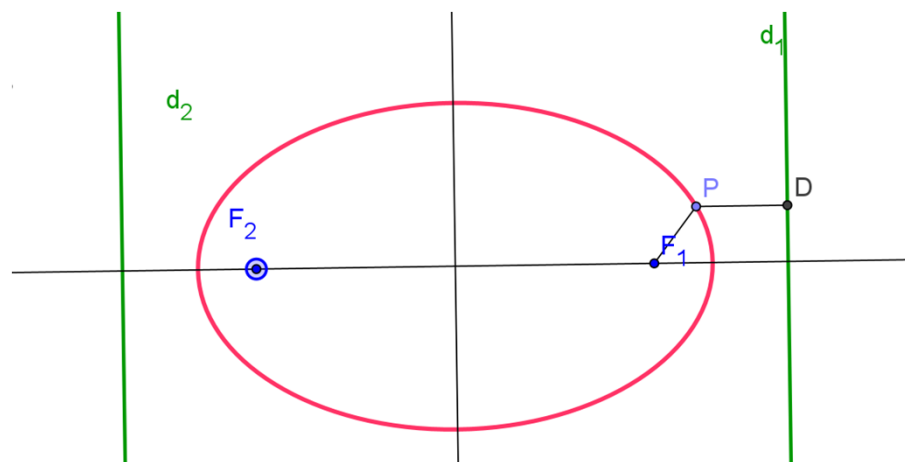
Coniche come luoghi e coniche come sezioni: sfere di Dandelin



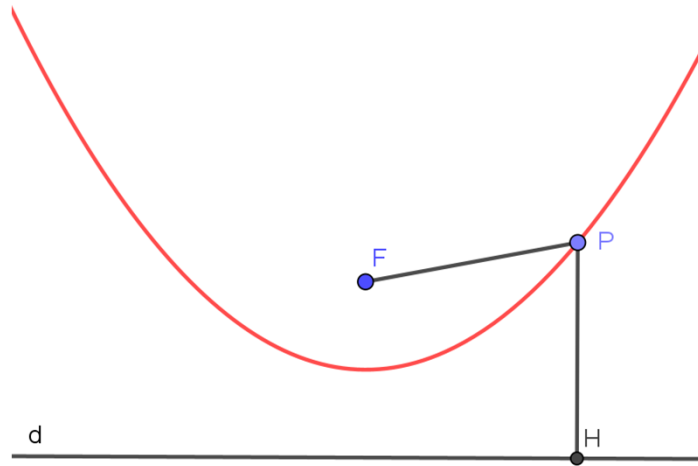
Coniche ed eccentricità



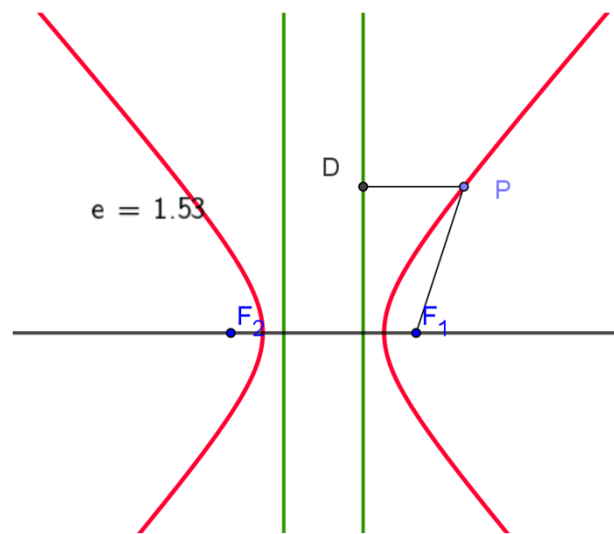
Ellisse ed eccentricità ($0 \leq e < 1$)



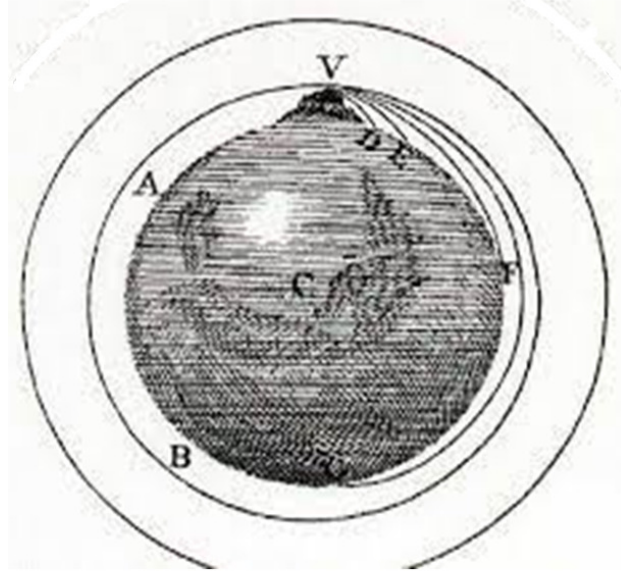
Parabola ed eccentricità ($e = 1$)



Iperbole ed eccentricità ($e > 1$)



Newton e le orbite dei satelliti

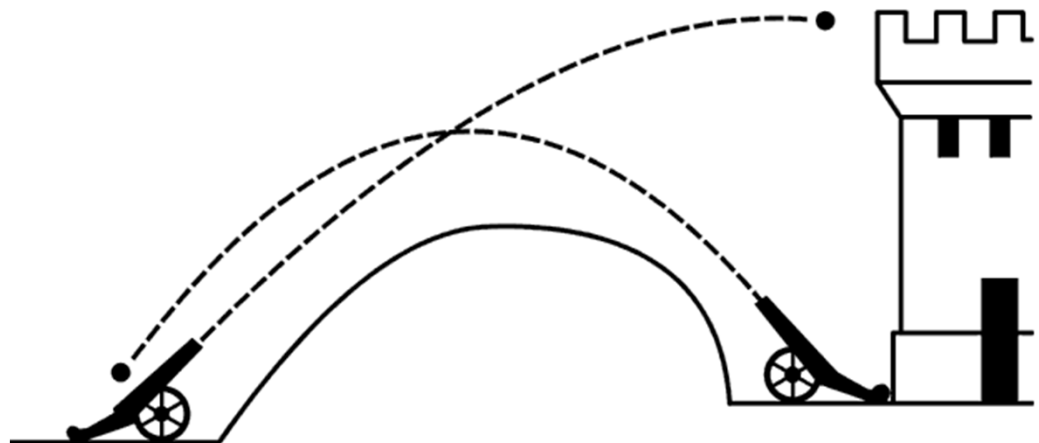


Le coniche: immagini in ambiti
diversi

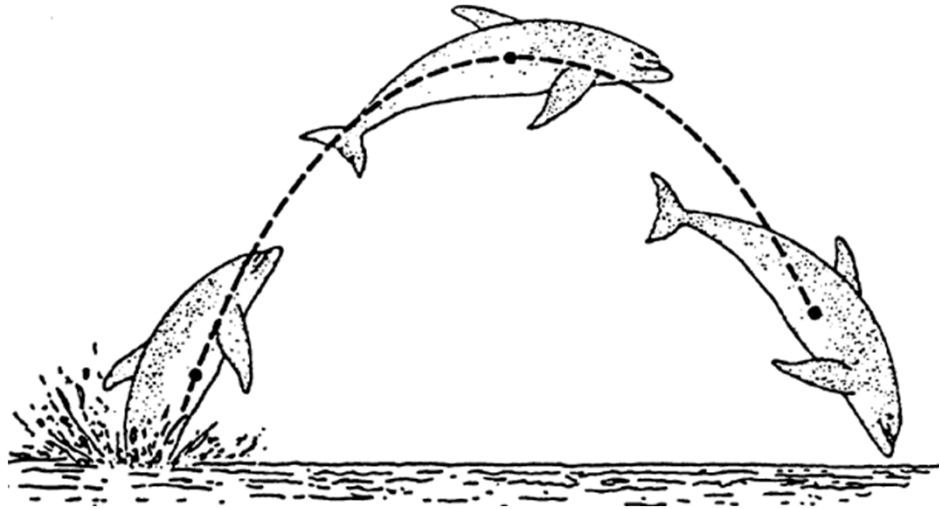
Archimede (specchi ustori)



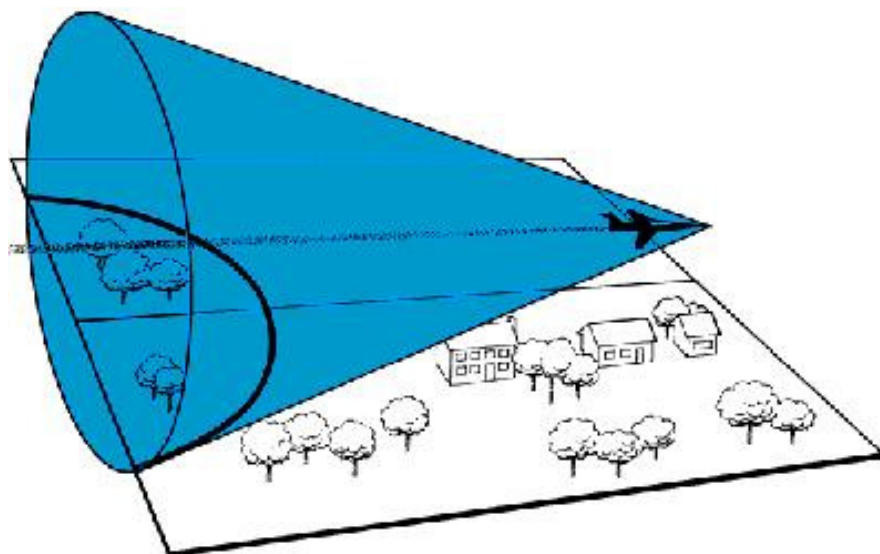
Galileo (moto dei proiettili)



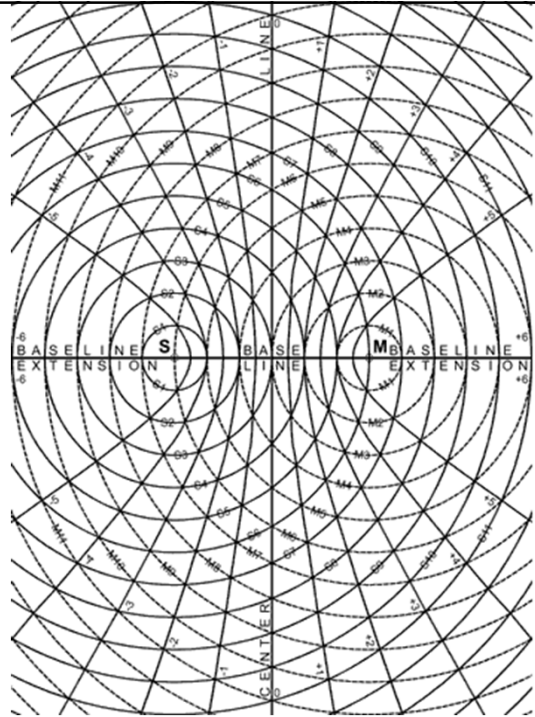
Le coniche nel mondo reale (traiettoria del baricentro)



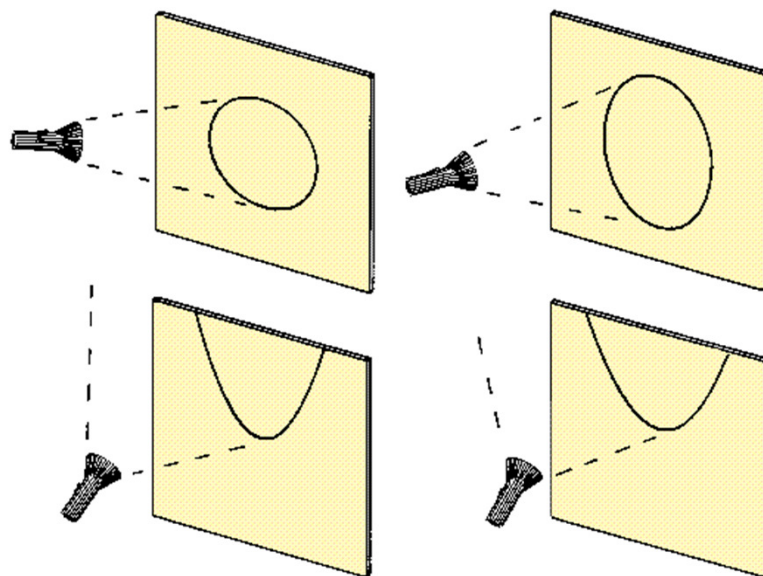
Le coniche nel mondo reale (il bang supersonico)



Le coniche e le onde



Le coniche con una torcia



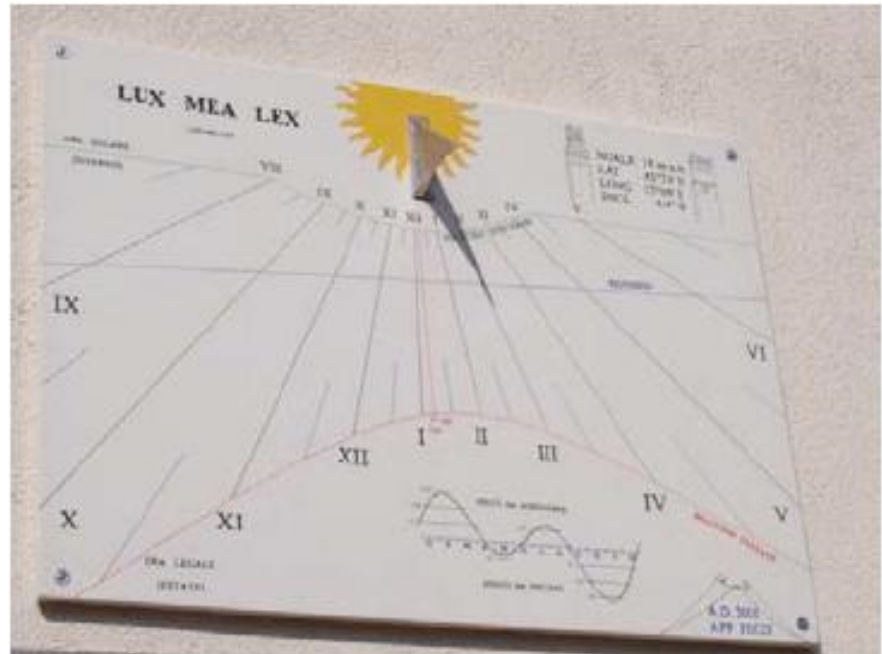
Le coniche con un paralume



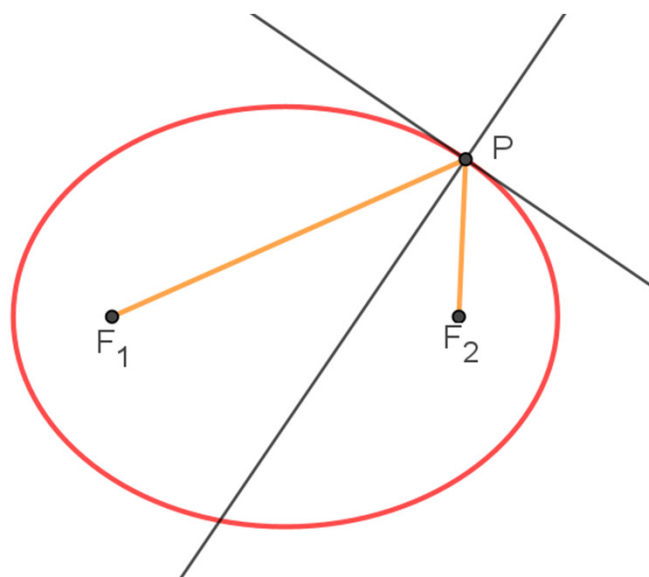
Le coniche con un paralume



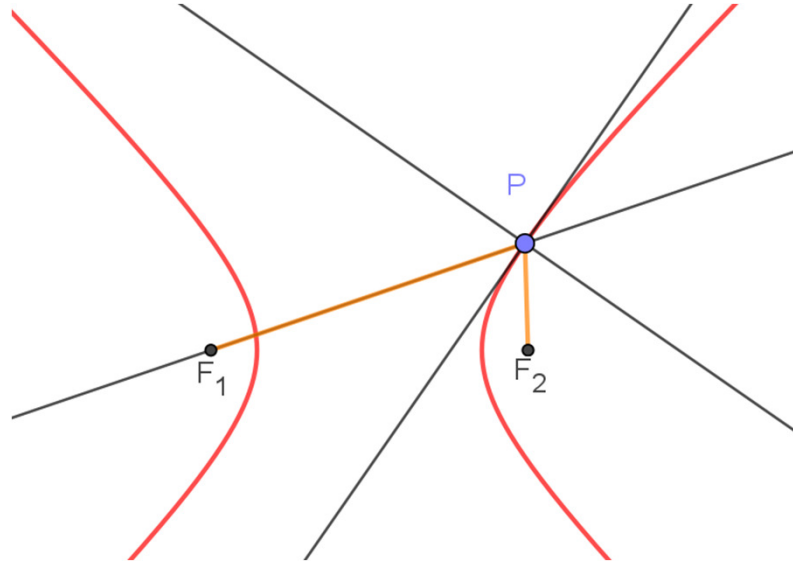
Le coniche
(una
meridiana)



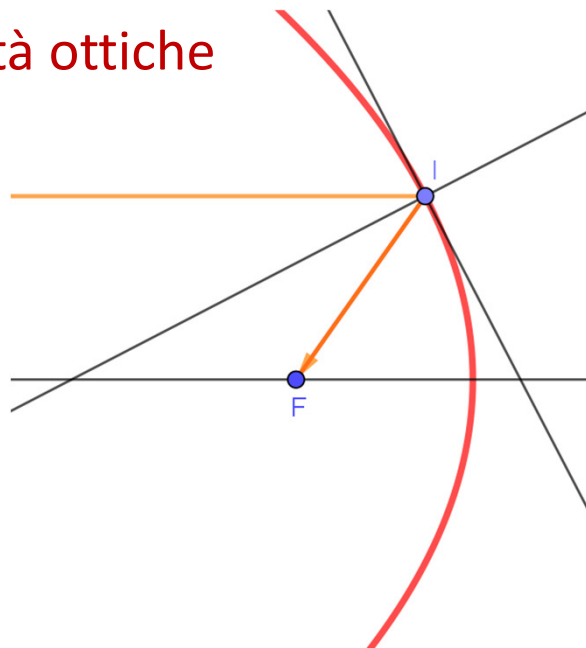
Ellisse: proprietà ottiche



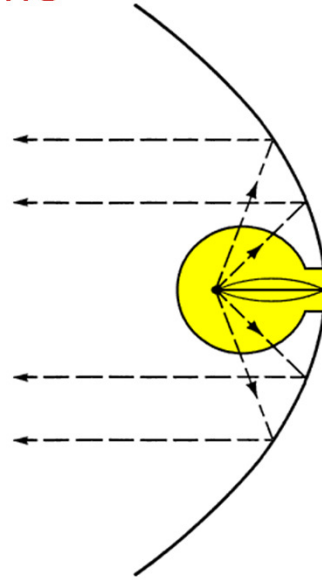
Iperbole: proprietà ottiche



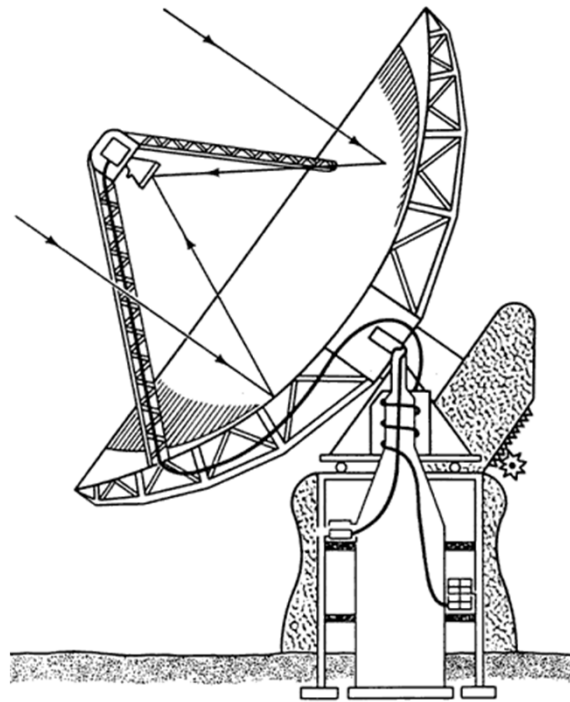
Parabola: proprietà ottiche



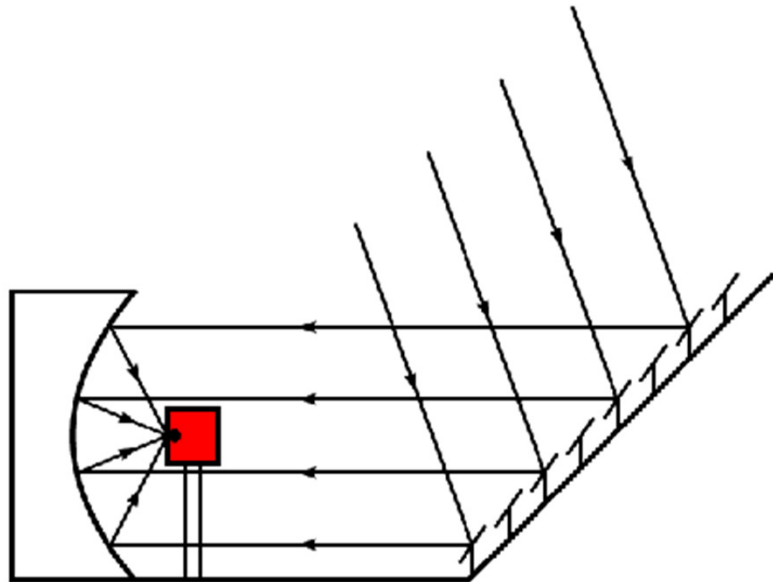
Parabola: proprietà ottiche



Le coniche e l'ottica



Le coniche e l'ottica



Le coniche e gli strumenti ottici (e per le altre onde elettromagnetiche)



Le coniche e l'architettura (il Colosseo ha pianta ellittica?)



Le coniche in cielo e in terra: Borromini e il
periodo barocco a Roma (il cerchio abolito)



Le coniche e l'architettura (Ferrara, Teatro
Comunale)



Le coniche e l'architettura (Ferrara, Teatro
Comunale)



Le coniche e l'architettura oggi



Conclusioni

- In questo excursus abbiamo visto la storia delle coniche, da Apollonio di Perga al Seicento (e oltre).
- E' stato sorprendente scoprire come queste curve, nate con la grande matematica greca del periodo ellenistico (III secolo a.C.) e che sembravano studiate solo in astratto, siano state poi riscoperte nella rivoluzione scientifica del Seicento e siano alla base dell'astronomia, dell'ottica e di tantissime altre applicazioni.

Bibliografia e sitografia

- C. Boyer, *Storia della matematica*, Mondadori, Milano.
- L. Russo, *La rivoluzione dimenticata*, Feltrinelli, Milano 1996.
- B. D'Amore - S. Sbaragli, *La Matematica e la sua storia*, vol. II. Dal tramonto greco al Medioevo, Edizioni Dedalo, Bari 2018
- M. Kline, *Storia del pensiero matematico*, Einaudi, Torino.
- M. Kline, *La matematica nel pensiero occidentale*, Feltrinelli, Milano.
- <https://it.mathigon.org/step/circles/conics-2>
- <http://dm.unife.it/storia/Apolloni.htm>

Link sulle coniche

- <https://it.mathigon.org/step/circles/conics-2>
- <http://dm.unife.it/storia/Apolloni.htm>
- <https://www.youtube.com/watch?v=MnGEgvufKFs>

Grazie dell'attenzione

Luigi Tomasi