ESAMI DI MATURITÀ SCIENTIFICA

Tema di: MATEMATICA

Indirizzo: SCIENTIFICO DI ORDINAMENTO

Il candidato scelga a suo piacimento ***due*** *dei seguenti problemi e li risolva:*

1. In un piano sono assegnate una circonferenza k di raggio di lunghezza nota r ed una parabola p che seca k nei punti A e B e passa per il suo centro C. Inoltre l'asse di simmetria della parabola è perpendicolare alla retta AC e la corda AB è lunga quanto il lato del triangolo equilatero inscritto in k.

Dopo aver riferito il piano ad un conveniente sistema di assi cartesiani (Oxy):

a) determinare l'equazione della parabola p;

b) calcolare il volume del solido generato, con una rotazione completa attorno alla retta AC, dalla regione piana delimitata dai segmenti di rette AB e AC e dall'arco BC della parabola p;

c) considerata la retta t, tangente alla parabola p e parallela alla retta AB, trovare la distanza delle rette t ed AB;

d) dopo aver dimostrato analiticamente che p e k non hanno altri punti comuni oltre ad A e B, calcolare le aree delle regioni piane in cui p divide il cerchio delimitato da k.

---

2. Sono assegnate le funzioni in *x*:

$$\frac{x^4 + ax^2 + b}{x^2 + 1}$$

dove a, b sono parametri reali.

a) Fra tali funzioni indicare con f(x) quella per cui la curva k di equazione y=f(x), disegnata in un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), soddisfi alle seguenti condizioni:

- la retta di equazione y=1 sechi k in due punti e sia tangente ad essa in un punto;
- l'asse x sia tangente a k in due punti distinti.

b) Disegnare l'andamento di k.

c) Calcolare l'area della regione piana delimitata da k e dall'asse x.

d) Calcolare:

$$\int_0^3 f\left(\frac{x}{3}\right) dx$$

---

3. Considerare i coni circolari retti in cui è uguale ad una lunghezza assegnata la somma del doppio dell'altezza col diametro della base.

Fra tali coni determinare quello di volume massimo e stabilire se ha anche la massima area laterale.

Nel cono di volume massimo inscrivere poi il cilindro circolare retto avente la base sul piano di base del cono e volume massimo.

A completamento del problema, considerata una funzione reale di variabile reale $f(x)$, definita in un intervallo I, e detta $f(x)$ crescente in I se $x'<x''$ implica $f(x')>f(x'')$ per ogni x', x'', dimostrare il seguente teorema:

Sia $f(x)$ una funzione reale di variabile reale derivabile in un intervallo I. Condizione sufficiente ma non necessaria affinché $f(x)$ sia decrescente in I è che risulti $f'(x)<0$ per ogni x appartenente ad I.

Durata massima della prova: 5 ore.

È consentito soltanto l'uso della calcolatrice tascabile non programmabile.

Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla dettatura del tema.