ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO 2000-2001

Indirizzo di ordinamento – sessione ordinaria
Tema di MATEMATICA - 21 giugno 2001

Risoluzione a cura del prof. Luigi Tomasi (luigi.tomasi@libero.it)

PROBLEMA 1

Si consideri la seguente relazione tra le variabili reali x, y:

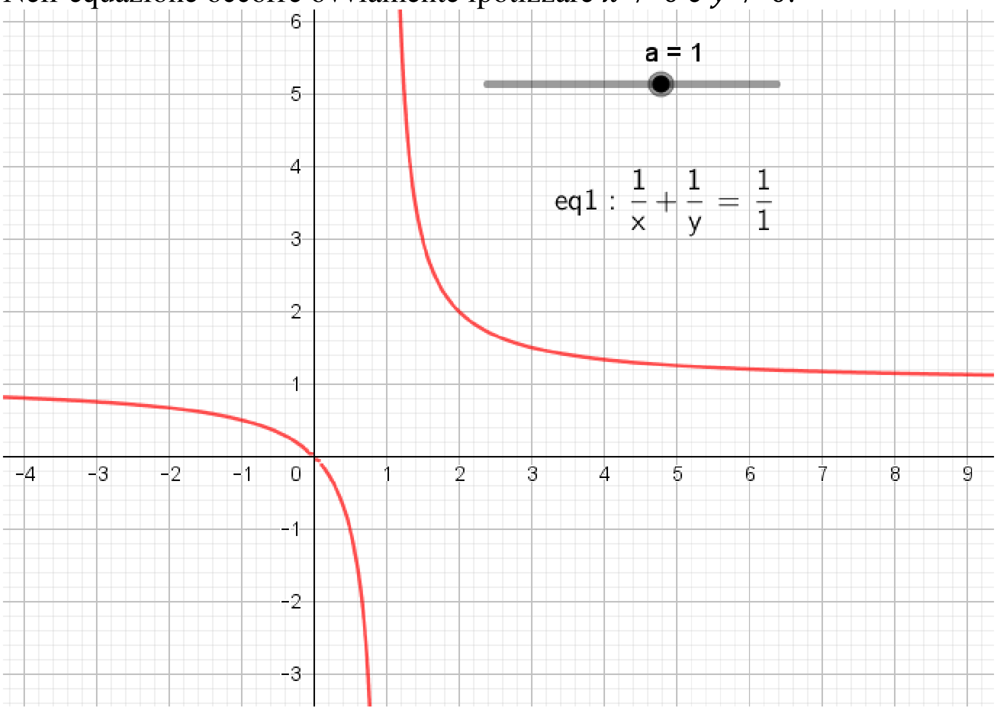
$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{a},$$

dove a è un parametro reale positivo.

a) Esprimere y in funzione di x e studiare la funzione così ottenuta, disegnandone il grafico in un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy).
b) Determinare per quali valori di a la curva disegnata risulta tangente o secante alla retta t di equazione x+y=4.
c) Scrivere l'equazione della circonferenza k che ha il centro nel punto di coordinate (1,1) e intercetta sulla retta t una corda di lunghezza $2\sqrt{2}$.
d) Calcolare le aree delle due regioni finite di piano in cui il cerchio delimitato da k è diviso dalla retta t.
e) Determinare per quale valore del parametro a il grafico, di cui al precedente punto a), risulta tangente alla circonferenza k.

SOLUZIONE DEL PROBLEMA 1

Nell'equazione occorre ovviamente ipotizzare $x \neq 0$ e $y \neq 0$.



Si tratta di un fascio di iperboli equilatere che si ottengono al variare del parametro a (reale positivo). Ogni iperbole deve essere privata del punto O(0,0).

L'equazione data è importante nell'ottica geometrica, perché rappresenta l'equazione dei "punti coniugati" (per gli specchi o per le lenti):

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{1}{f}$$

Punto a)
Si ottiene

$$y=\frac{ax}{x-a}$$

ossia la funzione

$$f(x)=\frac{ax}{x-a}$$

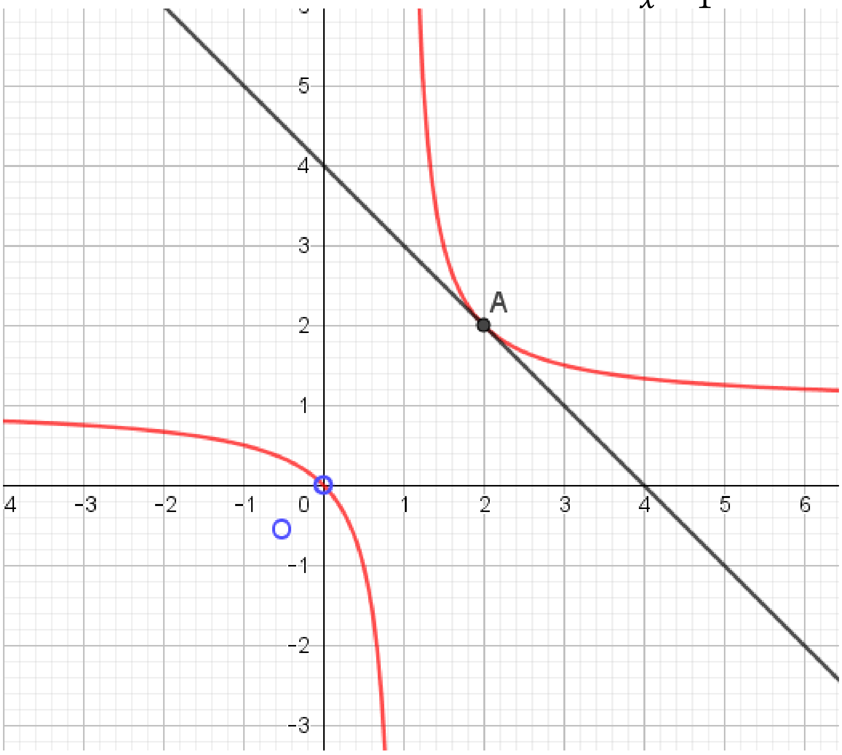
con $x \neq a$, che ha per asintoti $x=a$ e $y=a$. Dato il testo iniziale, va escluso dal grafico il punto $(0,0)$, ossia l'origine degli assi.

Punto b)
Affinché la curva (iperbole equilatera) sia tangente ala retta di equazione $x+y=4$, occorre imporre la condizione di tangenza, tramite il sistema

$$\begin{cases}(x-a)y=ax \\ x+y=4\end{cases}$$

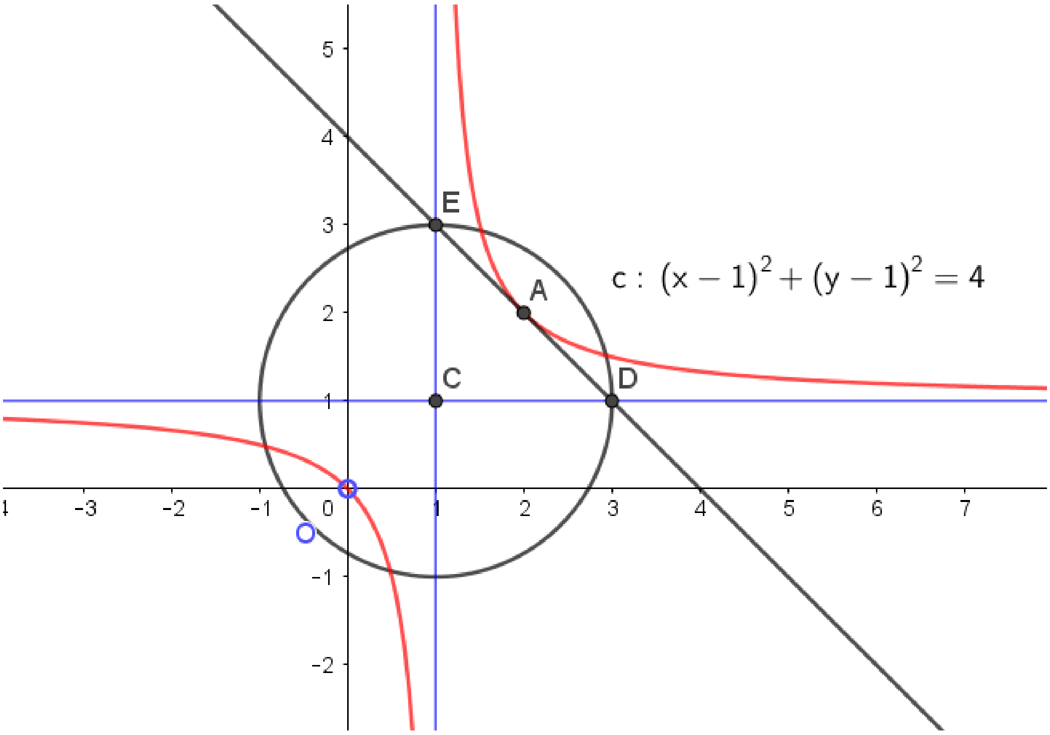
Si ottiene $a=1$ e quindi l'iperbole equilatera

$$y=\frac{x}{x-1}$$

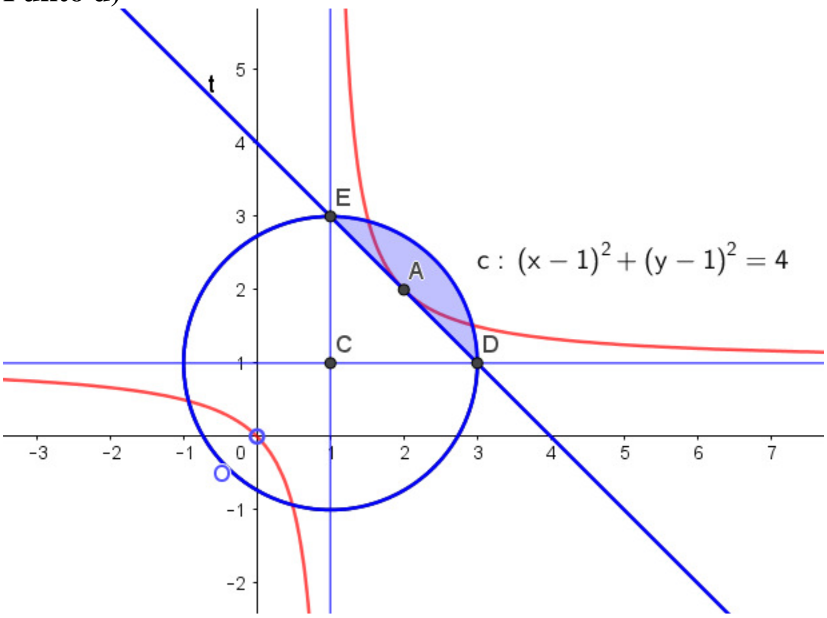


Punto c)
Si trova subito che la circonferenza deve avere raggio 2. Quindi la sua equazione è

$$(x-1)^2+(y-1)^2=4$$



Punto d)



La più piccola regione di piano ha area

$$A_1 = \pi - 2$$

(differenza tra un quarto del cerchio e l'area del triangolo rettangolo isoscele *CDE*).
La seconda area è

$$A_2 = 4\pi - (\pi - 2) = 3\pi + 2$$

Punto e)
La circonferenza e l'iperbole sono tangenti nel vertice dell'iperbole, diverso da O(0,0). Pertanto la circonferenza deve essere tangente alla retta tangente all'iperbole nel vertice V.
L'iperbole deve quindi passare per il punto V del I quadrante che si ottiene intersecando $y = x$ con la circonferenza. Tale punto ha coordinate ottenute dal seguente sistema

$$\begin{cases} (x-1)^2 + (y-1)^2 = 4 \\ y = x \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x-1)^2 = 2 \\ y = x \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 1 \pm \sqrt{2} \\ y = x \end{cases}$$

Il punto di intersezione nel I quadrante avrà pertanto coordinate

$$\begin{cases} x = 1 + \sqrt{2} \\ y = 1 + \sqrt{2} \end{cases}$$

Imponendo che l'iperbole di equazione

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{a}$$

passi per questo punto, si ha:

$$\frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{1+\sqrt{2}} = \frac{1}{a}$$

da cui si ottiene

$$a = \frac{1+\sqrt{2}}{2}.$$

Il grafico è riportato qui di seguito.