ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO 2000-2001

Corso di ordinamento – sessione ordinaria
Tema di MATEMATICA - 21 giugno 2001

Risoluzione a cura del prof. Luigi Tomasi (luigi.tomasi@libero.it)

PROBLEMA 2

Considerato un qualunque triangolo ABC, siano D ed E due punti interni al lato BC tali che:

$$\overline{BD} = \overline{DE} = \overline{EC}.$$

Siano poi M ed N i punti medi rispettivamente dei segmenti AD ed AE.

a) Dimostrare che il quadrilatero DENM è la quarta parte del triangolo ABC.

b) Ammesso che l'area del quadrilatero DENM sia $\frac{45}{2}a^2$, dove a è una lunghezza assegnata, e ammesso che l'angolo $A\hat{B}C$ sia acuto e si abbia inoltre: $\overline{AB} = 13\,a$, $\overline{BC} = 15\,a$, verificare che tale quadrilatero risulta essere un trapezio rettangolo.

c) Dopo aver riferito il piano della figura, di cui al precedente punto b), ad un conveniente sistema di assi cartesiani, trovare l'equazione della parabola, avente l'asse perpendicolare alla retta BC e passante per i punti M, N, C.

d) Calcolare, infine, le aree delle regioni in cui tale parabola divide il triangolo ADC.

RISOLUZIONE DEL PROBLEMA 2

Punto a)

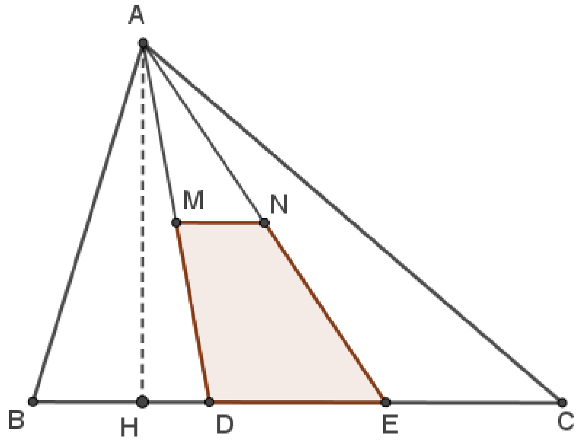

figura 1

Poiché MN è parallelo a BC (corollario del teorema di Talete applicato nel triangolo ADE), il quadrilatero DENM è un trapezio.
DE è 1/3 di BC (ipotesi) e MN è la metà di DE (corollario del teorema di Talete).
Pertanto l'area del quadrilatero DENM è

$$Area(DENM) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}BC + \frac{1}{6}BC\right)\frac{1}{2}AH =$$

$$\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}BC\right)\cdot\frac{1}{2}AH = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(BC\cdot\frac{1}{2}AH\right) = \frac{1}{4}Area(ABC).$$

Punto b)

Se $BC = 15a$, allora si ha $BD = DE = EC = 5a$ (figura 1).

Se l'area del quadrilatero è $\frac{45}{2}a^2$, allora si ha

$$\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot 15a\cdot AH = \frac{45}{2}a^2$$

Ne segue che

$$AH = 12a\,.$$

Usando il teorema di Pitagora nel triangolo rettangolo ABH, si ha allora

$$BH = \sqrt{AB^2 - AH^2} = \sqrt{(13a)^2 - (12a)^2} = 5a\,.$$

Quindi il punto *H*, in questo caso, coincide con il punto *D* e il segmento *AD* è pertanto perpendicolare alla base *BC*. Ne segue che il trapezio *DENM* è rettangolo (figura 2).

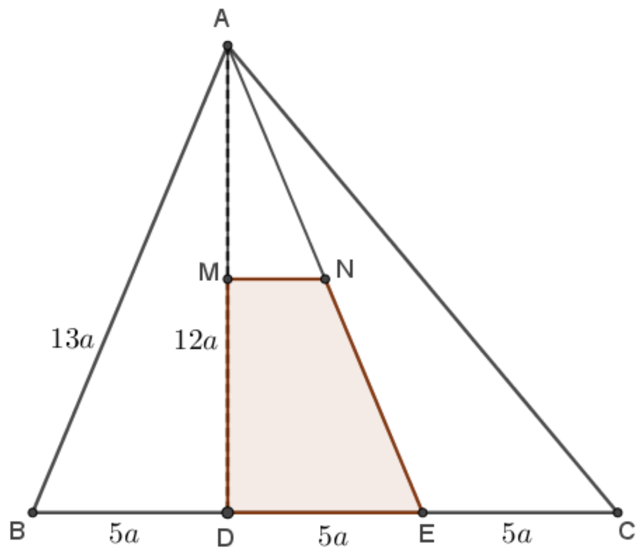

figura 2

Punto c)

Riferiamo il piano a un sistema di assi cartesiani monometrico ortogonale, con O coincidente con il punto D=H e il punto A appartenente al semiasse positivo delle y.

Pertanto si ha: $A(0;12a)$, $B(-5a;0)$, $C(10a;0)$, $E(5a;0)$, $M(0;6a)$ ed $N\left(\frac{5}{2}a;0\right)$.

La parabola richiesta ha equazione $y(x) = Ax^2 + Bc + C$ e deve passare per *M*, *N* e *C*.

Pertanto si ha

$$\begin{cases} C = 6a \\ y(10a) = 0 \\ y\left(\frac{5}{2}a\right) = 6a \end{cases}$$

Dopo alcuni calcoli si ottiene

$$\begin{cases} A = -\dfrac{2}{25a} \\ B = \dfrac{1}{5} \\ C = 6a \end{cases}$$

e l'equazione

$$y = -\frac{2}{25a}x^2 + \frac{1}{5}x + 6a$$

ossia

$$y = -\frac{1}{25a}(x - 10a)(2x + 15a).$$

Si riporta il grafico qui di seguito (figura 2), con $a = 1$ (a è stato scelto come unità di misura).

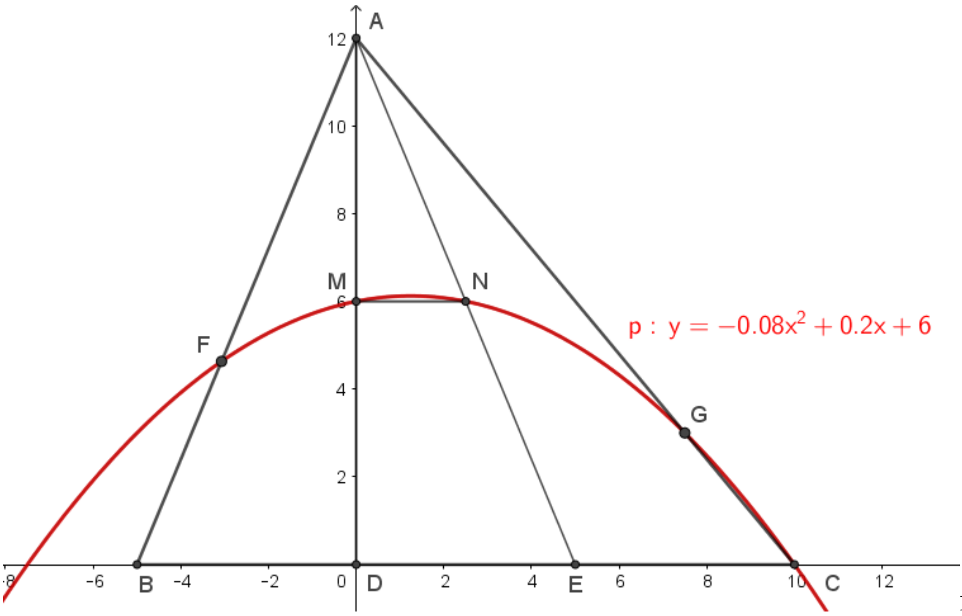

figura 3

Punto d)

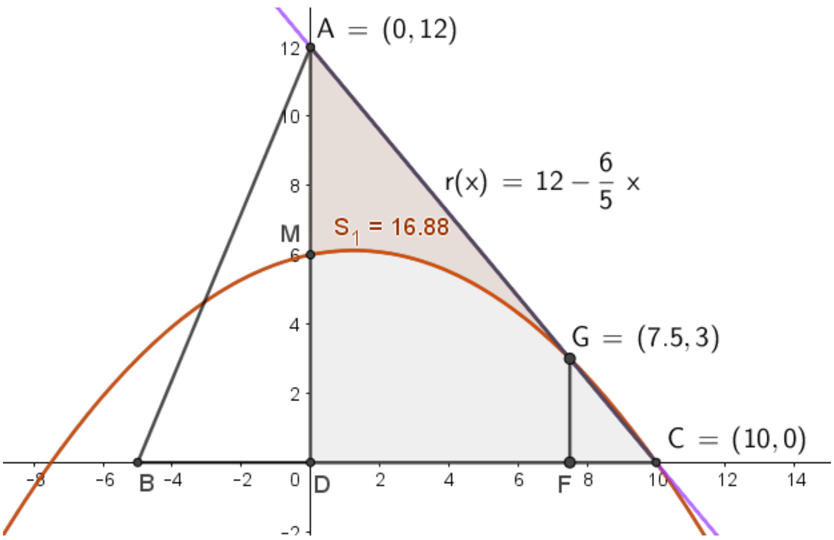

figura 4

Troviamo l'equazione della retta AC:

$$r(x) = 12a - \frac{6}{5}x$$

Questa retta è secante alla parabola e la interseca nel punto C e in un altro punto G, che si ricava dal sistema

$$\begin{cases} y = 12a - \frac{6}{5}x \\ y = -\frac{2}{25a}x^2 + \frac{1}{5}x + 6a \end{cases}$$

Si trova, oltre al punto C, anche il punto G di coordinate:

$$\begin{cases} x = \frac{15}{2}a \\ y = 3a \end{cases}$$

L'area del triangolo DCA è $60a^2$.

Il triangolo rimane suddiviso in due regioni. La regione inferiore ha area (figura 4)

$$S_2 = Area(FCG) + \int_0^{7.5a} \left(-\frac{2}{25a}x^2 + \frac{1}{5}x + 6a\right) dx$$

$$S_2 = \frac{15}{4}a^2 + \int_0^{7.5a} \left(-\frac{2}{25a}x^2 + \frac{1}{5}x + 6a\right) dx$$

$$S_2 = \frac{15}{4}a^2 + \left[-\frac{2}{75a}x^3 + \frac{1}{10}x^2 + 6ax\right]_0^{\frac{15}{2}a}$$

$$S_2 = \frac{15}{4}a^2 - \frac{2}{75a}\left(\frac{15}{2}a\right)^3 + \frac{1}{10}\left(\frac{15}{2}a\right)^2 + 6a \cdot \frac{15}{2}a$$

$$S_2 = \frac{15}{4}a^2 - \frac{45}{4}a^2 + \frac{45}{8}a^2 + 45a^2$$

$$S_2 = \frac{15}{4}a^2 - \frac{45}{4}a^2 + \frac{45}{8}a^2 + 45a^2 = \frac{345}{8}a^2 .$$

Quindi l'altra regione, in cui rimane suddiviso il triangolo, ha area

$$S_1 = 60a^2 - \frac{345}{8}a^2 = \frac{135}{8}a^2 \approx 16{,}88a^2.$$