ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO 2000-2001

Corso di ordinamento – sessione ordinaria
Tema di MATEMATICA - 21 giugno 2001

Risoluzione a cura del prof. Luigi Tomasi (luigi.tomasi@libero.it)

RISPOSTE AL QUESTIONARIO

Quesito 1

1. Indicata con f(x) una funzione reale di variabile reale, si sa che f(x) $\to l$ per x $\to a$, essendo l ed a numeri reali. Dire se ciò è sufficiente per concludere che f(a) = l e fornire un'esauriente spiegazione della risposta.

Le ipotesi non sono sufficienti per concludere che $f(a) = l$, perché la funzione può avere nel punto di ascissa $x = a$ un punto di discontinuità (detto di solito "di terza specie"); pertanto $x = a$ potrebbe non appartenere al dominio della funzione (primo tipo) oppure in tale punto la funzione potrebbe esistere, ma essere diversa dal limite, ovvero $f(a) \neq l$ (secondo tipo).

Un esempio del primo tipo vale per la funzione $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ per $x \to 0$.

Un esempio del secondo tipo si può costruire nel seguente modo:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 2 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

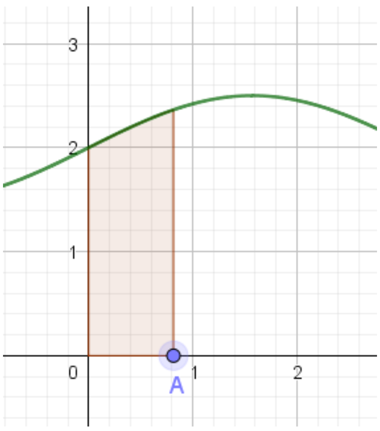
Quest'ultima funzione ha limite $l = 1$ per $x \to 0$, ma $f(0) = 2$.

Quesito 2

2. Sia f(x) una funzione reale di variabile reale, continua nel campo reale, tale che f(0)=2.. Calcolare:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\int_0^x f(t)\,dt}{2x e^x},$$

dove e è la base dei logaritmi naturali.



Se indichiamo con $F(x)$ la funzione

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt$$

allora

$$\frac{F(x)}{x} = \frac{\int_0^x f(t)dt}{x}$$

rappresenta il rapporto incrementale della funzione integrale $F(x)$ nel punto $x = 0$.

Ne segue (per il teorema fondamentale del calcolo integrale) che

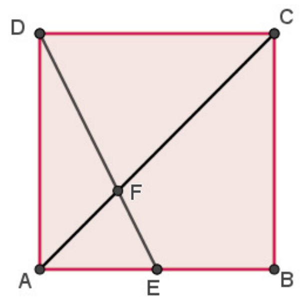
$$\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x f(t)dt}{x} = F'(0) = f(0) = 2\,.$$

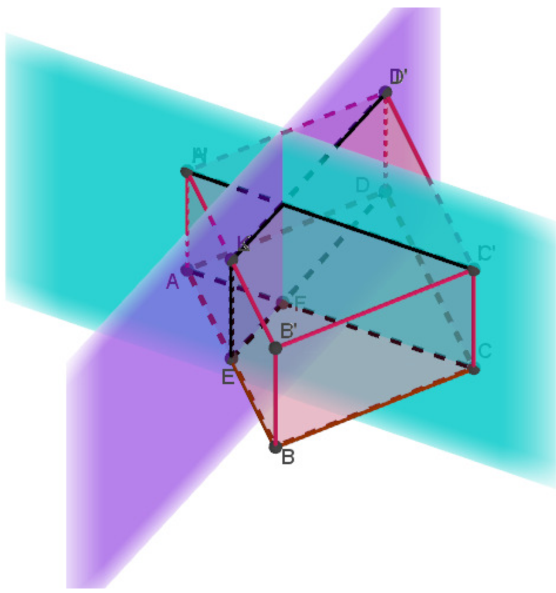
Pertanto

$$\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x f(t)dt}{2xe^x} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\int_0^x f(t)dt}{x} \cdot \frac{1}{2e^x}\right) = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1\,.\cdot$$

Quesito 3

3. Si consideri il cubo di spigoli AA’, BB’, CC’, DD’, in cui due facce opposte sono i quadrati ABCD e A’B’C’D’. Sia E il punto medio dello spigolo AB. I piani ACC’A’ e D’DE dividono il cubo in quattro parti. Dimostrare che la parte più estesa è il quintuplo di quella meno estesa.





Si tratta sostanzialmente di un problema di geometria piana perché i volumi dei prismi che si ottengono sono ovviamente proporzionali alle rispettive aree di base.

Il triangolo AEF è omotetico (quindi simile) al triangolo CDF con rapporto di omotetia $-1/2$.

Quindi l’area del triangolo AEF è 1/4 dell’area del triangolo CDF.

Pertanto $DF = 2EF$ ed EF è quindi 1/3 di DF. Di conseguenza anche l’altezza del triangolo AEF rispetto alla base AE è pertanto 1/3 dello spigolo del cubo.

Indicato con s lo spigolo del cubo, si ha

$$Area(AEF) = \frac{1}{4} Area(CDF).$$

Si ottiene pertanto:

$$Area(AEF) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} s \cdot \frac{1}{3} s = \frac{1}{12} s^2 \ .$$

Pertanto l'area del quadrilatero *EBCF* è data da

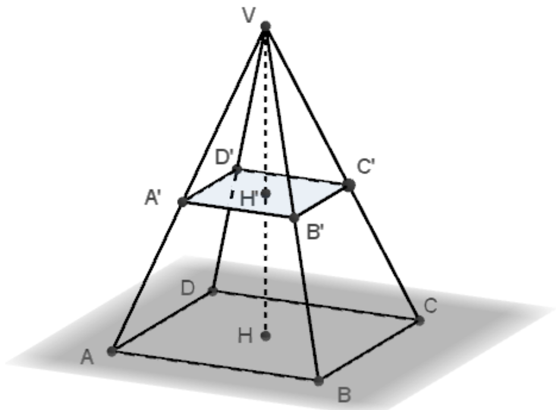
$$Area(EBCF) = \frac{1}{2} s^2 - \frac{1}{12} s^2 \ = \frac{5}{12} s^2 = 5\ Area(AEF).$$

Quesito 4

4. Un tronco di piramide ha basi di aree B e b ed altezza h. Dimostrare, col metodo preferito, che il suo volume V è espresso dalla seguente formula:

$$V = \frac{1}{3} h\left(B + b + \sqrt{Bb}\right) .$$

In ogni caso esplicitare ciò che si ammette ai fini della dimostrazione.



Indichiamo con h la misura dell'altezza del tronco di piramide e con x la misura dell'altezza della piramide *A'B'C'D'V*.
Per similitudine tra la piramide *ABCDV* e la piramide *A'B'C'D'V* si ha

$$(h + x) : x \ = \sqrt{B} \ : \ \sqrt{b}$$

Applicando la proprietà dello scomporre si ha:

$$h : x \ = (\sqrt{B} - \sqrt{b}) \ : \ \sqrt{b}$$

da cui si ricava

$$x = \frac{h\sqrt{b}}{\sqrt{B} - \sqrt{b}} = \frac{h\sqrt{b}\left(\sqrt{B} + \sqrt{b}\right)}{B - b} .$$

Il volume del tronco di piramide si ottiene per differenza tra il volume della piramide *ABCDV* e quello della piramide *A'B'C'D'V*. Si ottiene

$$V = V_2 - V_1 = \frac{1}{3} B(h + x) - \frac{1}{3} bx = \frac{1}{3}(Bh + Bx - bx)$$

$$V = \frac{1}{3}(Bh + Bx - bx) = \frac{1}{3}\left(Bh + x(B - b)\right)$$

$$V = \frac{1}{3}\left(Bh + \frac{h\sqrt{b}\left(\sqrt{B} + \sqrt{b}\right)}{B - b}(B - b) \right) = \frac{1}{3} h\left(B + \sqrt{b}\left(\sqrt{B} + \sqrt{b}\right)\right)$$

$$V = \frac{1}{3} h\left(B + b + \sqrt{Bb}\right) .$$

Quesito n. 5

5. Sia f(x) una funzione reale di variabile reale, derivabile in un intervallo [*a,b*] e tale che, per ogni x di tale intervallo, risulti f '(x) = 0. Dimostrare che f(x) è costante in quell'intervallo.

Le ipotesi permetto di stabilire che la funzione è continua nell'intervallo [a, *x*], con $a < x \leq b$
Possiamo quindi utilizzare il teorema di Lagrange nell'intervallo [a, *x*]; quindi esiste un punto x_0, interno all'intervallo $[a, x]$, tale che

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(x_0)$$

Ma risulta

$$f'(x_0) = 0$$

Quindi si ha

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = 0$$

da cui si ricava

$$f(x) = f(a) \text{ per ogni } a < x \leq b$$

e quindi, indicato con *k* il valore di $f(a)$, si ha $f(x) = k$ per ogni $a \leq x \leq b$, ossia la funzione è costante nell'intervallo [a,b].

Quesito 6

6. Dimostrare che si ha:

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

dove *n, k* sono numeri naturali qualsiasi, con $n > k > 0$.

Questa relazione si chiama anche regola di Stiefel o regola di costruzione del triangolo di Tartaglia; vale per tutti i termini di una riga del triangolo, tranne quelli estremi (che valgono 1).

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
… … … … … … … … … … … … … … …

Il termine *k*-esimo (diverso da quelli estremi) della riga *n*-esima del triangolo di Tartaglia è uguale alla somma dei due termini della riga precedente, uno di posto k e l'altro di posto $k - 1$. Per esempio, nella 5ª riga si ha 10=4+6 (somma dei due termini della 4ª riga, stesso posto e posto precedente).

Usiamo la "regola dei 3 fattoriali"

$$\binom{n-1}{k-1}+\binom{n-1}{k}=\frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k)!}+\frac{(n-1)!}{k!\,(n-k-1)!}=$$

$$\binom{n-1}{k-1}+\binom{n-1}{k}=\frac{k\cdot(n-1)!+(n-k)\cdot(n-1)!}{k!\;(n-k)!}$$

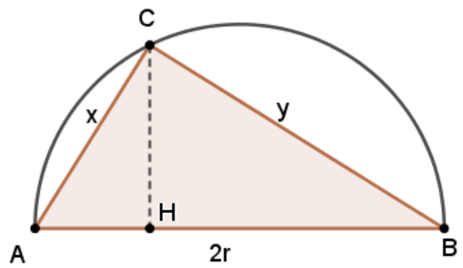
$$\binom{n-1}{k-1}+\binom{n-1}{k}=\frac{n\cdot(n-1)!}{k!\;(n-k)!}=\frac{n!}{k!\,(n-k)!}=\binom{n}{k}.$$

Quesito 7

7. Fra i triangoli inscritti in un semicerchio quello isoscele ha:
   a) area massima e perimetro massimo;
   b) area massima e perimetro minimo;
   c) area minima e perimetro massimo;
   d) area minima e perimetro minimo.
   Una sola risposta è corretta: individuarla e darne un'esauriente spiegazione.

La risposta corretta è la a).

L'area massima di un triangolo inscritto in una semicirconferenza, essendo la base uguale al diametro, si ottiene quando l'altezza è massima, ossia quando l'altezza è uguale al raggio, cioè quando il triangolo è (rettangolo e) isoscele.



Quindi l'area massima è:

$$A_{max}=r^2$$

Il valore minimo del perimetro del generico triangolo inscritto in una semicirconferenza è $4r$ e si ottiene quando il triangolo è degenere. Indicati con x e y le misure dei due cateti, si ha

$$2p=2r+x+y$$

con

$$x^2+y^2=4r^2$$

che possiamo scrivere

$$(x+y)^2-2xy=4r^2$$

ossia

$$(x+y)^2=4r^2+2xy\ .$$

Osserviamo che $2xy$ è il quadruplo dell'area del triangolo.

$$(x+y)^2 = 4r^2 + 4A$$

Il perimetro $2p = 2r + x + y$ è massimo quando $x + y$ è massimo.

Il massimo del perimetro si ha quindi quando l'area è massima, ossia quando $x = y = r\sqrt{2}$.

Il perimetro massimo vale quindi

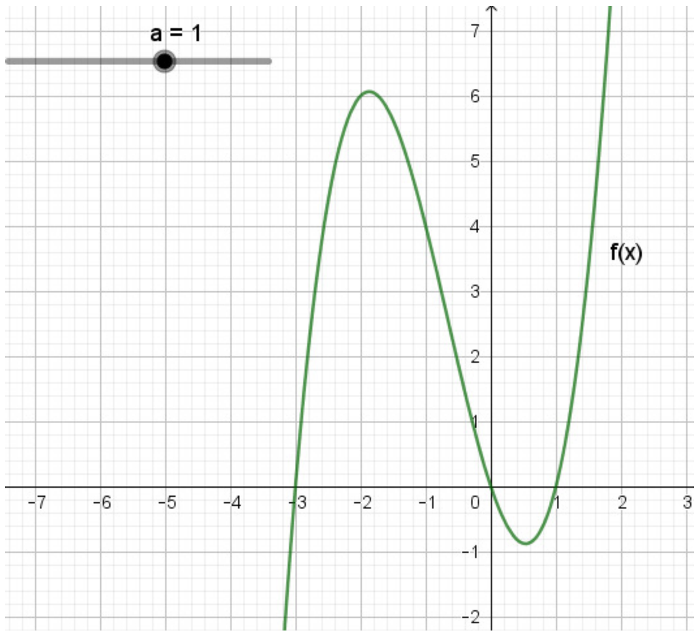
$$2p = 2r + 2r\sqrt{2} = 2r\left(1 + \sqrt{2}\right).$$

Quesito 8

8. Considerata la funzione:

$$f(x) = a\,x^3 + 2\,a\,x^2 - 3\,x\,,$$

dove a è un parametro reale non nullo, determinare i valori di a per cui essa ha un massimo e un minimo relativi e quelli per cui non ha punti estremanti.



Si tratta di un fascio di funzioni cubiche, tutte passanti per l'origine degli asso; per $a = 0$, si ottiene la retta di equazione $y = -3x$.

Calcoliamo la derivata prima

$$f'(x) = 3ax^2 + 4ax - 3$$

e poniamo

$$f'(x) = 0.$$

Il discriminante (ridotto) di tale equazione è

$$\frac{\Delta}{4} = 4a^2 + 9a\,.$$

Il discriminante si annulla per $a = 0$ e per $a = -\frac{9}{4}$.

Per $-\frac{9}{4} < a < 0$, il discriminante è negativo e la funzione non ha né massimi né minimi.

Per $a = 0$, si ottiene la retta $y = -3x$.

Per $a = -9/4$ si ottiene la curva di equazione

$$f(x) = -\frac{9}{4}x^3 - \frac{9}{2}x^2 - 3$$

che non ha né massimi né minimi; ha un flesso a tangente parallela all'asse x nel punto di ascissa $x = -\frac{2}{3}$.

Per $a < -\frac{9}{4}$ oppure per $a > 0$, il discriminante è positivo; la funzione ha un massimo relativo e un minimo relativo.

Ricaviando la derivata seconda

$$f''(x) = 6ax + 4a$$

Tutte le curve hanno un flesso nel punto di ascissa $x = -\frac{2}{3}$.

Quesito n. 9

9. Il limite della funzione $\dfrac{\operatorname{sen} x - \cos x}{x}$, quando x tende a $+\infty$,

   a) è uguale a 0;
   b) è uguale ad 1;
   c) è un valore diverso dai due precedenti;
   d) non è determinato.

   Una sola risposta è corretta: individuarla e darne un'esauriente spiegazione.

La risposta corretta è la a).
Il numeratore della funzione

$$f(x) = \frac{\sin x - \cos x}{x}$$

non ha limite per $x \to +\infty$, ma è una funzione limitata che oscilla tra $-\sqrt{2}$ e $\sqrt{2}$.
Utilizzando il "teorema del confronto" si conclude che il limite è 0.
Possiamo infatti scrivere

$$g(x) = \sin x - \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

Quindi

$$h(x) = -\frac{\sqrt{2}}{|x|} \leq \frac{\sin x - \cos x}{x} \leq \frac{\sqrt{2}}{|x|} = k(x)$$

e per il teorema del confronto si ha

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\sin x - \cos x}{x} = 0$$

perché le funzioni $h(x)$ e $k(x)$ tendono a 0.

Quesito n. 10

10. Si consideri la funzione $\frac{x+\text{sen}\,x}{x-\cos x}$. Stabilire se si può calcolarne il limite per $x\to+\infty$ e spiegare se il calcolo può essere effettuato ricorrendo al teorema di De L'Hôpital.

Il calcolo del limite non può essere svolto con la regola di De L'Hôspital perché la derivata del numeratore ($f'(x) = 1 + \cos x$) e la derivata del denominatore ($g'(x) = 1 + \sin x$) non hanno limite per $x \to +\infty$. Quindi non esiste il limite di

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

contro una delle ipotesi del teorema di De L'Hôpital.

Il limite dato

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$$

può però essere calcolato applicando il teorema del confronto.

Sia $x = \alpha \approx 0{,}79 \ldots$ il valore per cui $x = \cos x$. Osserviamo che per $x > \alpha$, si ha:

$$h(x) = \frac{x-1}{x+1} \leq \frac{x+\sin x}{x-\cos x} \leq \frac{x+1}{x-1} = k(x)$$

Quindi

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x+\sin x}{x-\cos x} = 1$$

perché le funzioni $h(x)$ e $k(x)$ tendono a 1.