ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO 2001-2002
Corso di ordinamento – sessione ordinaria

Tema di MATEMATICA - 20 giugno 2002

Risoluzione a cura del prof. Luigi Tomasi (luigi.tomasi@libero.it)

PROBLEMA 1

In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), è assegnata la curva k di equazione $y = f(x)$, dove è:

$$f(x) = \frac{x^2+2}{x^3+2}.$$

a) Determinare per quali valori di x essa è situata nel semipiano $y>0$ e per quali nel semipiano $y<0$.
b) Trovare l'equazione della parabola passante per l'origine O degli assi e avente l'asse di simmetria parallelo all'asse y, sapendo che essa incide ortogonalmente la curva k nel punto di ascissa -1 (*N.B.: si dice che una curva incide ortogonalmente un'altra in un punto se le rette tangenti alle due curve in quel punto sono perpendicolari*).
c) Stabilire se la retta tangente alla curva k nel punto di ascissa -1 ha in comune con k altri punti oltre a quello di tangenza.
d) Determinare in quanti punti la curva k ha per tangente una retta parallela all'asse x.
e) Enunciare il teorema di Lagrange e dire se sono soddisfatte le condizioni perché esso si possa applicare alla funzione $f(x)$ assegnata, relativamente all'intervallo $-\sqrt{2} \le x \le 0$.

SOLUZIONE DEL PROBLEMA 1

Il dominio della funzione è l'insieme dei numeri reali con $x \neq -\sqrt[3]{2}$.

Il segno della funzione data

$$f(x) = \frac{x^2+2}{x^3+2}$$

è determinato solo dal segno del denominatore.

Punto a)

Quindi la funzione è positiva per $x > -\sqrt[3]{2}$ e negativa per $x < -\sqrt[3]{2}$.

La funzione ha per asintoto verticale la retta d equazione $x = -\sqrt[3]{2}$.

L'asse delle x è asintoto orizzontale sia a destra che a sinistra per il grafico della funzione.

La funzione è continua e derivabile nel suo dominio.

Il punto di discontinuità $x = -\sqrt[3]{2}$ non appartiene al dominio della funzione.

La derivata prima è:

$$f'(x) = \frac{x(-x^3-6x+4)}{(x^3+2)^2}$$

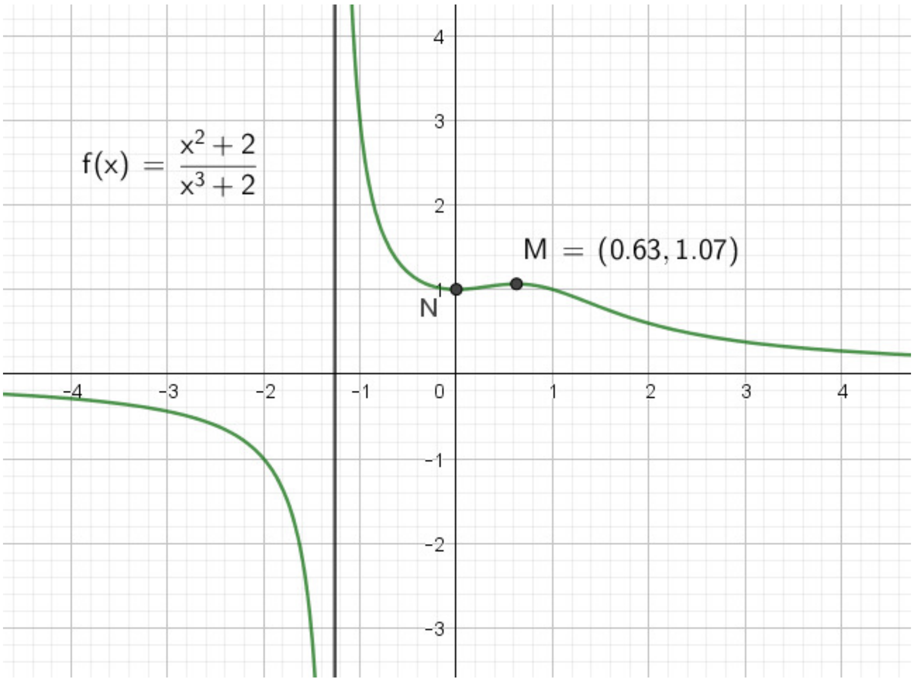
Uno zero della derivata prima è $x = 0$. Occorre poi esaminare la cubica $c(x) = -x^3 - 6x + 4$. Si ha

$$c'(x) = -3x^2 - 6$$

che è sempre negativa. Quindi la funzione $c(x)$ ha un solo zero. Con un metodo approssimato si trova circa $\alpha = 0{,}63$ ....

In definitiva, il punto $x = 0$ è un punto di minimo relativo, con $f(0) = 1$, e $x = \alpha$ è un punto di massimo relativo, con $f(\alpha) \approx 1{,}07$ ....

Il grafico della curva k è il seguente.



Tralasciamo lo studio della derivata seconda perché è troppo laborioso.

Punto b)

Determiniamo l'equazione della retta tangente alla curva k nel suo punto P di ascissa -1. Il punto P ha coordinate (-1,3) e la retta tangente ha equazione

$$y - 3 = f'(-1)(x + 1)$$

$$y - 3 = -11(x + 1)$$

La retta normale alla tangente in questo punto ha pertanto equazione

$$y - 3 = \frac{1}{11}(x + 1)$$

La parabola, dovendo passare per l'origine degli assi, avrà equazione

$$y = ax^2 + bx$$

Inoltre deve passare per il punto P(-1,3). Si ottiene quindi

$$3 = a - b\,.$$

La derivata prima $y' = 2ax + b$ della parabola, calcolata in $x = -1$, dovrà essere

$$-2a + b = \frac{1}{11}$$

Si ottiene pertanto il sistema

$$\begin{cases} a-b=3 \\ -2a+b=\dfrac{1}{11} \end{cases}$$

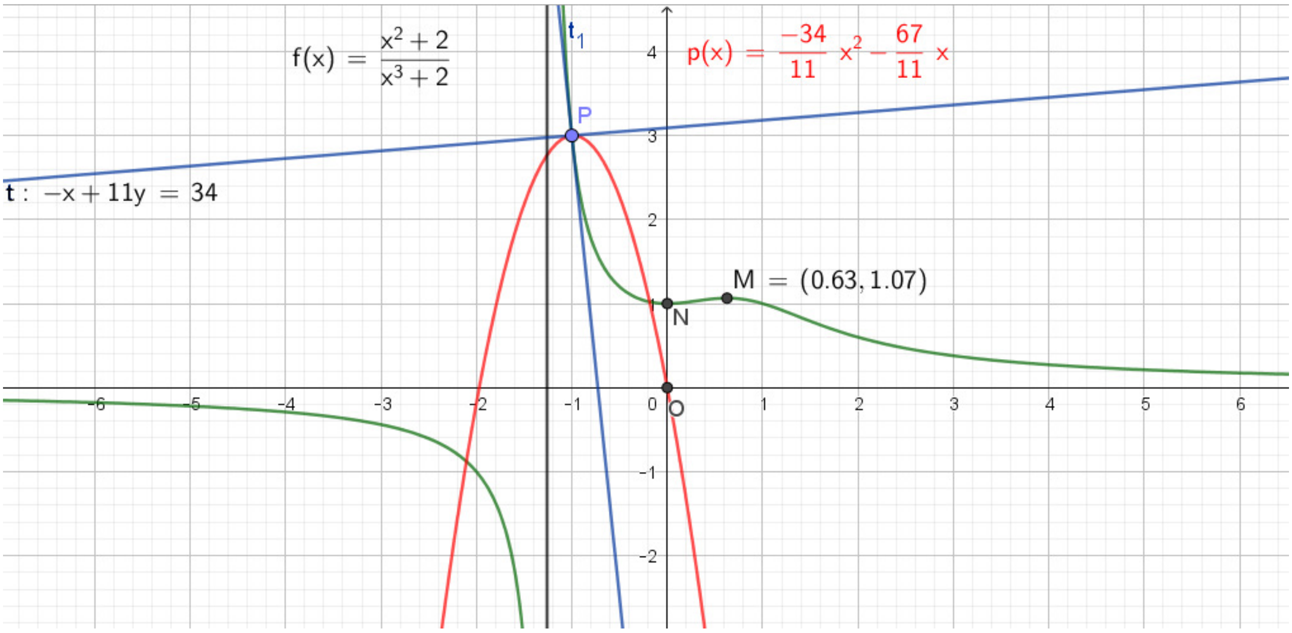
Pertanto

$$\begin{cases} a=-\dfrac{34}{11} \\ b=-\dfrac{67}{11} \end{cases}$$

Quindi la parabola ha equazione

$$y=-\frac{34}{11}x^2-\frac{67}{11}x\,.$$

Riportiamo tutti i grafici nella figura seguente.



Punto c)

Intersechiamo la curva k con la tangente nel punto di ascissa $x=-1$, risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} y=\dfrac{x^2+2}{x^3+2} \\ y=\dfrac{1}{11}x+\dfrac{34}{11} \end{cases}$$

Si ottiene l'equazione risolvente

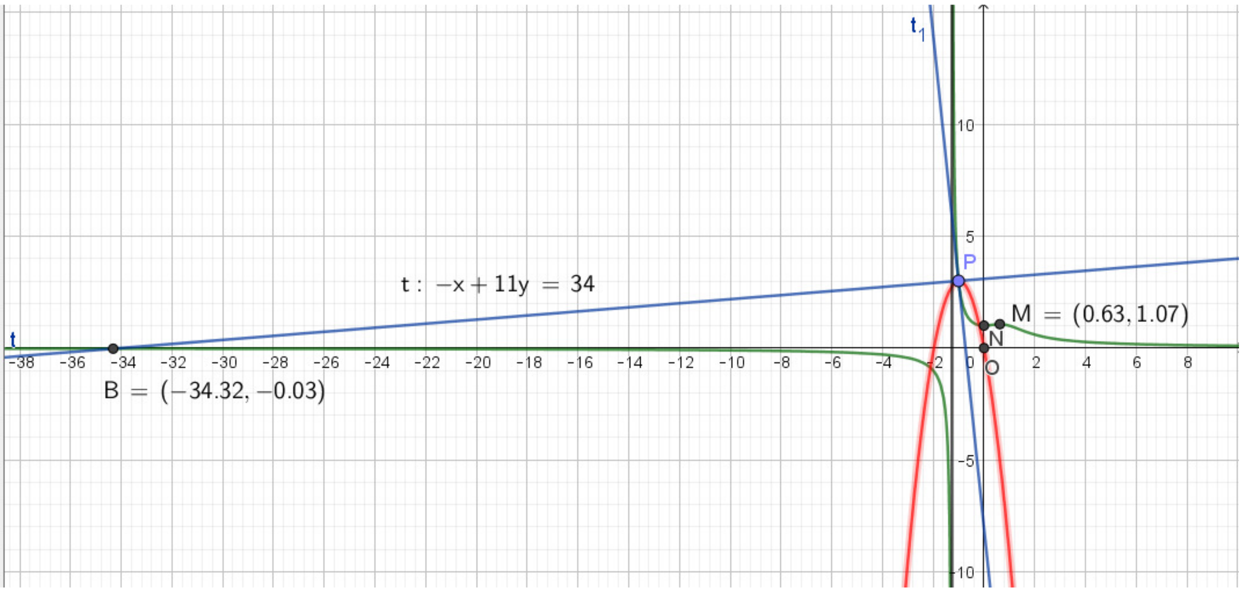
$$\frac{x^2+2}{x^3+2}=\frac{1}{11}x+\frac{34}{11}$$

ossia l'equazione

$$x^4+34x^3-11x^2+2x+46=0$$

che ha la radice nota $x=-1$ e un'altra radice che vale circa $x=-34{,}32\ldots$.

Ci si doveva aspettare un'altra soluzione perché la funzione tende a zero (per x tendente a $-\infty$) e la pendenza della retta tangente nel punto P è positiva (m=1/11). Si veda la seguente figura.



Punto d)

I punti a tangente parallela all'asse x sono quelli dove la derivata prima si annulla. La derivata prima è

$$f'(x) = \frac{x(-x^3 - 6x + 4)}{(x^3 + 2)^2}$$

Uno zero della derivata prima è $x = 0$.

Per vedere se ci sono altri zeri occorre esaminare la cubica $c(x) = -x^3 - 6x + 4$. Si ha

$$c'(x) = -3x^2 - 6\,,$$

che è sempre negativa. Quindi la funzione $c(x)$ ha un solo zero; con un metodo approssimato si trova circa $\alpha = 0{,}63$ ....

In definitiva, il punto $x = 0$ è un punto di minimo relativo per $y = f(x)$, con $f(0) = 1$, e $x = \alpha$ è un punto di massimo relativo, con $f(\alpha) \approx 1{,}07$ ....

Punto e)

Enunciato del Teorema di Lagrange (Giuseppe Luigi Lagrange, 1736-1813)

Sia $f(x)$ una funzione definita e continua in un intervallo chiuso [a,b], derivabile almeno nei punti interni di [a,b]. Allora esiste almeno un punto x_0, interno ad [a,b], tale che

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}\,.$$

Significato geometrico: nelle ipotesi del teorema esiste almeno un punto x_0, interno ad [a,b], in cui la retta tangente al grafico della funzione $f(x)$ è parallela alla retta secante che passa per i punti $A(a, f(a))$ e $B(b, f(b))$.

La risposta alla domanda, di cui al punto (e), è negativa: nell'intervallo dato non sono soddisfatte le condizioni per poter applicare il Teorema di Lagrange. Non si può usare il teorema di Lagrange nell'intervallo $\left[-\sqrt{2}, 0\right]$ perché in esso la funzione non è continua; nell'intervallo cade il punto di discontinuità della funzione ($x = -\sqrt[3]{2}$).