ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO 2001-2002
Corso di ordinamento – sessione ordinaria

Tema di MATEMATICA - 20 giugno 2002

Risoluzione a cura del prof. Luigi Tomasi (luigi.tomasi@libero.it)

PROBLEMA 2

Si considerino le lunghezze seguenti:

$$[1] \qquad a+2x, \qquad a-x, \qquad 2a-x,$$

dove a è una lunghezza nota non nulla ed x è una lunghezza incognita.

a) Determinare per quali valori di x le lunghezze [1] si possono considerare quelle dei lati di un triangolo non degenere.

b) Stabilire se, fra i triangoli non degeneri i cui lati hanno le lunghezze [1], ne esiste uno di area massima o minima.

c) Verificato che per $x = \frac{a}{4}$ le [1] rappresentano le lunghezze dei lati di un triangolo, descriverne la costruzione geometrica con riga e compasso e stabilire se si tratta di un triangolo rettangolo, acutangolo o ottusangolo.

d) Indicato con ABC il triangolo di cui al precedente punto c), in modo che BC sia il lato maggiore, si conduca per A la retta perpendicolare al piano del triangolo e si prenda su di essa un punto D tale che AD sia lungo a: calcolare un valore approssimato a meno di un grado (sessagesimale) dell'ampiezza dell'angolo formato dai due piani DBC e ABC.

SOLUZIONE DEL PROBLEMA 2

Punto a)

Dal testo si ricava, ovviamente, $a > 0$ e $x > 0$.

Affinché le lunghezze dei lati del triangolo siano tutte positive, deve essere

$$a - x > 0$$

da cui segue

$$0 < x < a.$$

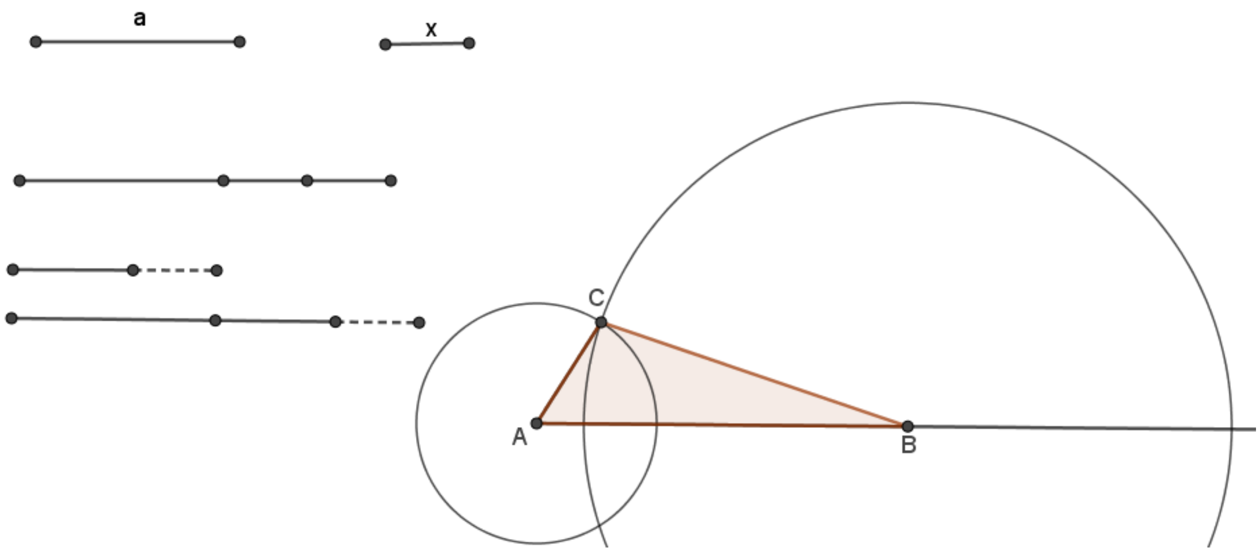
Osservato che $a - x < 2a - x$, affinché esista il triangolo (e sia non degenere) devono essere soddisfatte le disuguaglianze triangolari.

$$\begin{cases} 2a - x < a + 2x + a - x \\ a + 2x < a - x + 2a - x \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > 0 \\ 2x < a \end{cases}$$

da cui si ottiene

$$0 < x < \frac{a}{2}.$$



Punto b)
L’area del triangolo si può determinare con la formula di Erone:

$$A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

Si ha:

$$2p = 4a.$$

Visto che il perimetro del triangolo è costante, si potrebbe concludere che l’area è massima quando il triangolo è equilatero, ma si osserva che con le misure date non è mai possibile ottenere un triangolo equilatero…

Pertanto si ottiene:

$$A(x) = \sqrt{2ax(a-2x)(a+x)}$$

con

$$0 < x < \frac{a}{2}.$$

L’area è massima quando la funzione (il radicando senza le costanti moltiplicative)

$$f(x) = x(a-2x)(a+x)$$

è massima.
Si ha

$$f'(x) = -6x^2 - 2ax + a^2$$

Il massimo dell’area si ha quindi per

$$x = a\frac{\sqrt{7}-1}{6}.$$

Non esiste il minimo dell’area. Esiste l’estremo inferiore che è 0 (si ottiene per un triangolo degenere).

Punto c)

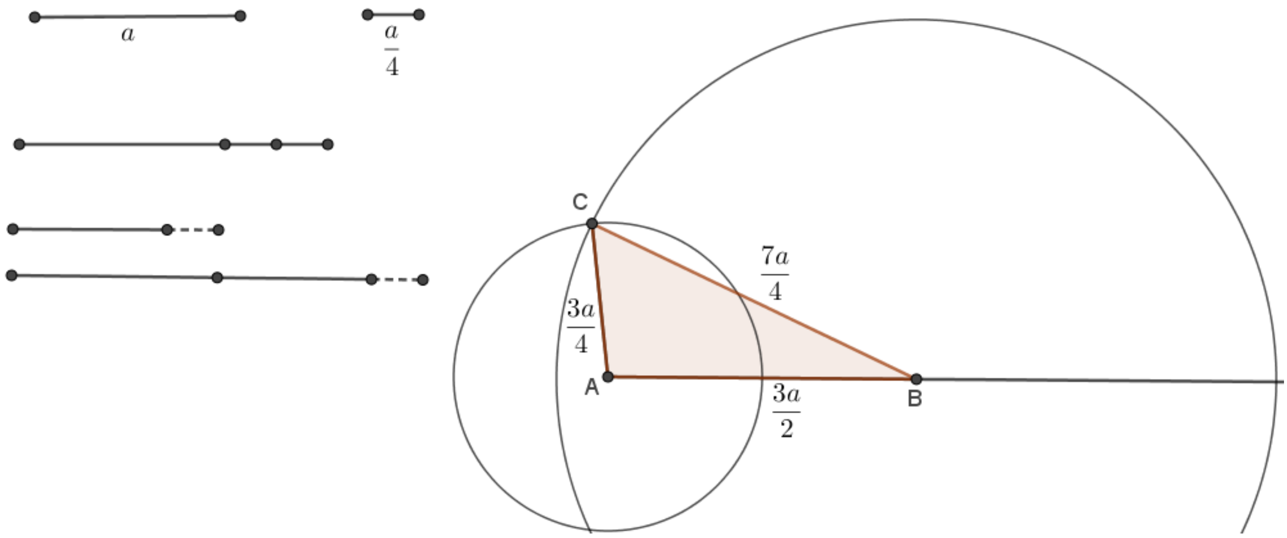
Poiché deve essere

$$0 < x < \frac{a}{2}$$

si conclude che per $x = \frac{a}{4}$, esiste il triangolo ed ha per misure dei lati,

$$\frac{3}{2}a, \qquad \frac{3}{4}a, \qquad \frac{7}{4}a$$

Riportiamo la sua costruzione con riga e compasso.



Poiché

$$\left(\frac{3}{2}a\right)^2 + \left(\frac{3}{4}a\right)^2 < \left(\frac{7}{4}a\right)^2$$

$$\frac{9}{4} + \frac{9}{16} < \frac{49}{16}$$

$$\frac{45}{16} < \frac{49}{16}$$

il triangolo è ottusangolo (vedi figura).

Si poteva concludere che il triangolo è ottusangolo usando anche il teorema di Carnot:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos\alpha$$

Da cui si ricava

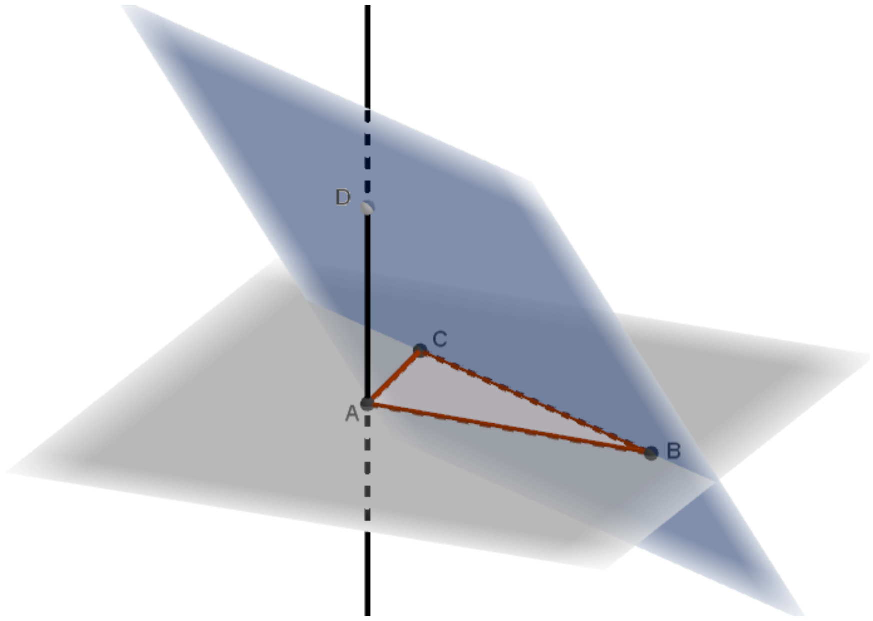
$$\cos\alpha = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2 \cdot AB \cdot AC}$$

$$\cos\alpha = -\frac{1}{9}$$

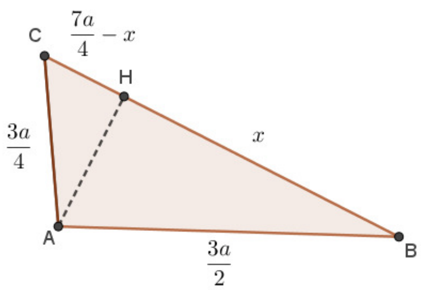
Pertanto

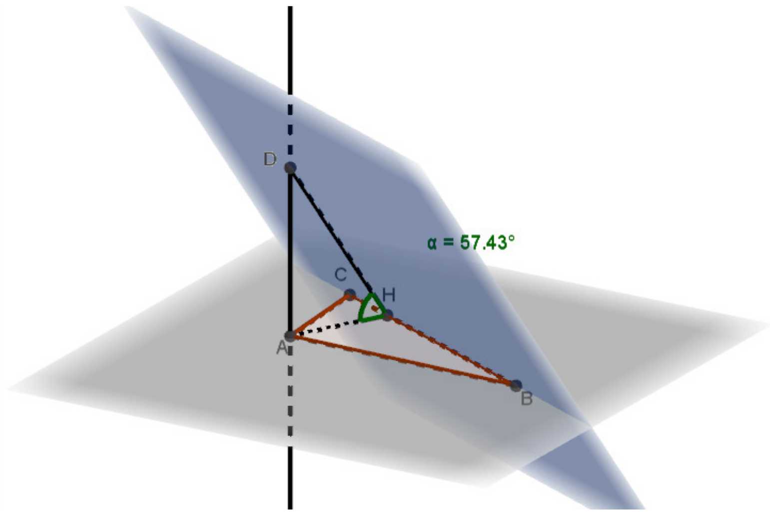
$$\alpha = \arccos\left(-\frac{1}{9}\right) = (96{,}379\ldots)°$$

Punto d)



Eseguiamo la costruzione richiesta.
Dal punto A, nel piano del triangolo, mandiamo la perpendicolare al lato BC, ottenendo il punto H .





Occorre determinare l'altezza del triangolo ABC relativa al lato BC. Conosciamo l'area del triangolo in corrispondenza a $x = \frac{a}{4}$: si ottiene

$$A\left(\frac{a}{4}\right) = \frac{a^2\sqrt{5}}{4}.$$

Si ha pertanto

$$AH = \frac{2 \cdot A}{BC} = \frac{2 \cdot A\left(\frac{a}{4}\right)}{\frac{7}{4}a} = \frac{2\,\frac{a^2\sqrt{5}}{4}}{\frac{7}{4}a} = \frac{2a\sqrt{5}}{7}.$$

Pertanto, l'angolo da determinare verifica alla seguente relazione

$$\tan\theta = \frac{AD}{AH} = \frac{a}{\frac{2a\sqrt{5}}{7}} = \frac{7\sqrt{5}}{10}.$$

Quindi si ha

$$\theta = \arctan\left(\frac{7\sqrt{5}}{10}\right) \approx (57{,}4\,\ldots)^\circ \ .$$