ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO 2001-2002

Corso di ordinamento – sessione ordinaria
Tema di MATEMATICA - 20 giugno 2002

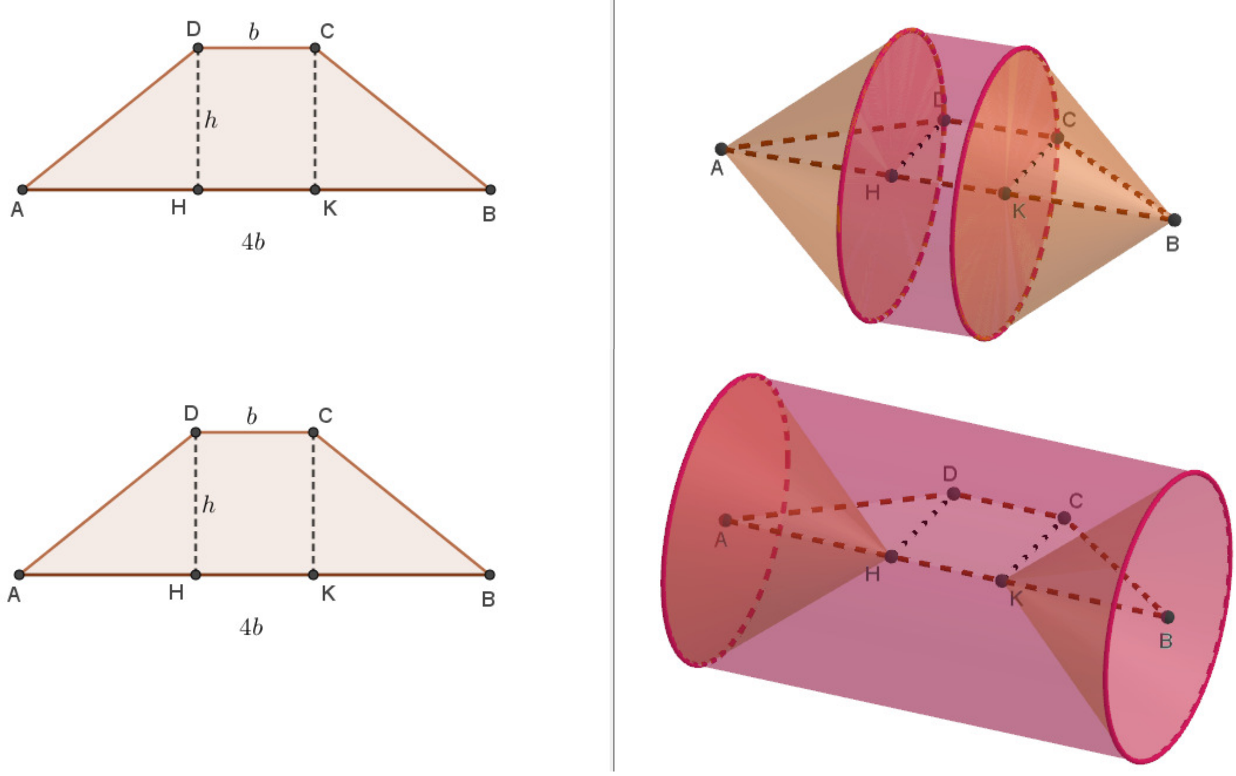
Risoluzione del prof. Luigi Tomasi (luigi.tomasi@libero.it)

RISPOSTE AL QUESTIONARIO

Quesito 1

1. Il rapporto fra la base maggiore e la base minore di un trapezio isoscele è 4. Stabilire, fornendone ampia spiegazione, se si può determinare il valore del rapporto tra i volumi dei solidi ottenuti facendo ruotare il trapezio di un giro completo dapprima intorno alla base maggiore e poi intorno alla base minore o se i dati a disposizione sono insufficienti.

Indichiamo con b la misura della base minore e con h la misura dell'altezza del trapezio isoscele.



Il rapporto tra i volumi è 2/3 (i dati sono sufficienti per determinare questo rapporto).

Infatti, ruotando il trapezio di un giro completo attorno alla base maggiore si ottiene:

$$V_1 = \pi h^2 b + 2 \cdot \frac{1}{3} \pi h^2 \left(\frac{3}{2} b\right) = \pi h^2 b + \pi h^2 b = 2\pi h^2 b$$

e ruotandolo attorno alla base minore si ha

$$V_2 = \pi h^2 4b - 2 \cdot \frac{1}{3} \pi h^2 \left(\frac{3}{2} b\right) = 4\pi h^2 b - \pi h^2 b = 3\pi h^2 b$$

Quindi il rapporto tra i volumi è $\frac{V_1}{V_2} = \frac{2}{3}$.

Quesito 2

2. Due tetraedri regolari hanno rispettivamente aree totali A' e A'' e volumi V' e V''. Si sa che $\frac{A'}{A''}=2$. Calcolare il valore del rapporto $\frac{V'}{V''}$

Se indichiamo con k il rapporto di similitudine tra i due tetraedri, sappiamo che

$$\frac{A'}{A''}=k^2=2\,.$$

Quindi il rapporto di similitudine tra i due tetraedri è $k=\sqrt{2}$.

Ne segue che il rapporto tra i volumi è

$$\frac{V'}{V''}=k^3=2\sqrt{2}\,.$$

Quesito 3

3. Considerati i numeri reali a, b, c, d - comunque scelti - se a>b e c>d allora:
   A) a+d > b+c;
   B) a-d > b-c;
   C) ad > bc;
   D) $\frac{a}{d}>\frac{b}{c}$.

   Una sola alternativa è corretta: individuarla e motivare esaurientemente la risposta.

Da $a>b$, si ottiene

$$a+c>b+c$$

da cui, essendo $c<d$,

$$a+c>b+c>b+d$$

Pertanto si ha:

$$a+c>b+d$$

da cui si ricava

$$a-d<b-c\,.$$

La risposta corretta è B).

Quesito 4 (coincide con il quesito 1 per il corso sperimentale PNI)

Si consideri la seguente proposizione: "La media aritmetica di due numeri reali positivi, comunque scelti, è maggiore della loro media geometrica". Dire se è vera o falsa e motivare esaurientemente la risposta.

Dati due numeri positivi a e b, la loro media aritmetica è ovviamente:

$$m_a=\frac{a+b}{2}$$

e quella geometrica:

$$m_g=\sqrt{ab}\,.$$

Si ha:

$$m_a \geq m_g$$

e l'uguaglianza si ha se $a = b$.
La dimostrazione è facile perché la disuguaglianza:

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

elevando al quadrato si riconduce a:

$$(a-b)^2 \geq 0 .$$

La generalizzazione della definizione di media aritmetica è: $m_a = \dfrac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n}$ e quella di media geometrica di n numeri positivi $a_1, a_2, \ldots, a_n$: $m_g = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_n}$.

Quesito 5

Determinare, se esistono, i numeri a, b in modo che la seguente relazione:

$$\frac{1}{x^2 - 2x - 3} = \frac{a}{x-3} + \frac{b}{x+1}$$

sia un'identità.

Si ha (per $x \neq 3$ e $x \neq -1$)

$$\frac{1}{x^2 - 2x - 3} = \frac{ax + a + bx - 3b}{(x-3)(x+1)}$$

$$\frac{1}{x^2 - 2x - 3} = \frac{(a+b)x + a - 3b}{(x-3)(x+1)}$$

Pertanto deve essere (si applica al numeratore il Principio di identità dei polinomi)

$$\begin{cases} a + b = 0 \\ a - 3b = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = \dfrac{1}{4} \\ b = -\dfrac{1}{4} \end{cases}$$

Quesito 6

Si consideri la funzione:

$$f(x) = (2x-1)^7 (4-2x)^5 .$$

Stabilire se ammette massimo o minimo assoluti nell'intervallo $\frac{1}{2} \leq x \leq 2$.

La funzione data è una funzione polinomiale, ovviamente derivabile in $\mathbb{R}$.

La derivata prima è

$$f'(x) = 14(2x-1)^6(4-2x)^5 - 10(2x-1)^7(4-2x)^4$$

$$f'(x) = 2(2x-1)^6(4-2x)^4(7(4-2x)-5(2x-1))$$
$$f'(x) = 2(2x-1)^6(4-2x)^4(33-24x)$$
$$f'(x) = 6(2x-1)^6(4-2x)^4(11-8x)$$

La derivata prima è positiva o nulla per $x < \frac{11}{8}$. Quindi il punto $x = \frac{11}{8}$ è un punto di massimo relativo (e anche assoluto) non solo nell'intervallo dato.

Il punto x=2 è un altro punto dove si annulla (con molteplicità 4) la derivata prima ed è un punto di minimo relativo (e assoluto) nell'intervallo dato.

Il punto $x = \frac{1}{2}$ è un ulteriore punto dove si annulla (con molteplicità 6) la derivata prima ed è un punto di minimo relativo (e assoluto) nell'intervallo dato.

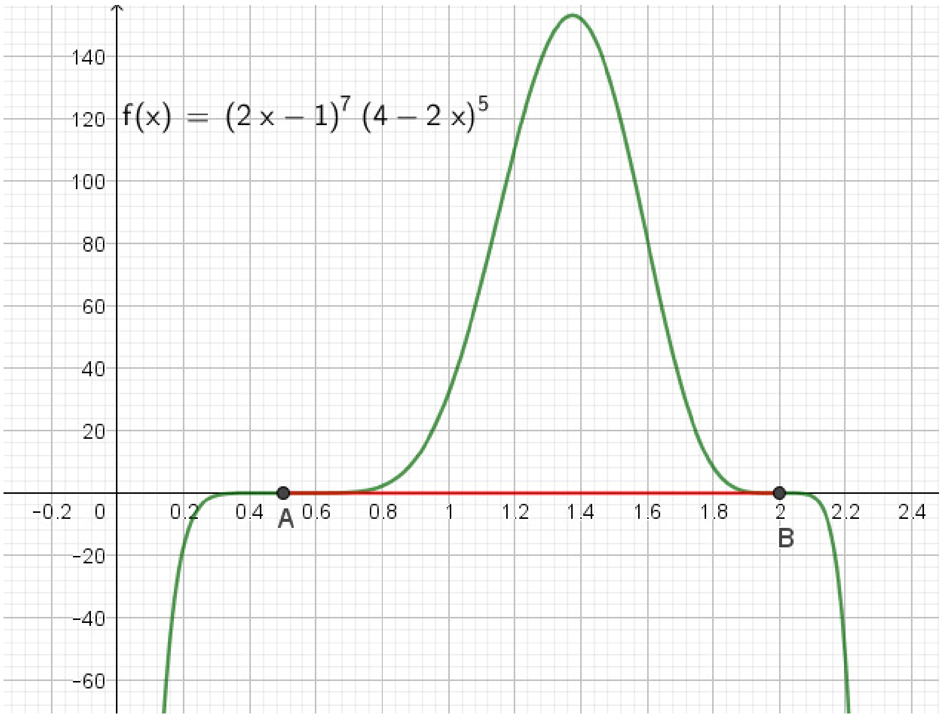


Figura. quesito 6

Quesito 7

> Calcolare la derivata, rispetto ad x, della funzione f(x) tale che:
> $$f(x) = \int_x^{x+1} \ln t \, dt, \qquad \text{con } x > 0.$$

Si ha, con $a > 0$,

$$f(x) = \int_a^{x+1} \ln t \, dt - \int_a^x \ln t \, dt$$

Quindi

$$f'(x) = \ln(x+1) - \ln x = \ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$$

Quesito 8

La funzione reale di variabile reale $f(x)$ è continua nell'intervallo chiuso e limitato [1,3] e derivabile nell'intervallo aperto (1,3). Si sa che $f(1) = 1$ e inoltre $0 \leq f'(x) \leq 2$ per ogni x dell'intervallo (1,3). Spiegare in maniera esauriente perché risulta $1 \leq f(3) \leq 5$.

La derivata prima è sempre non negativa. Quindi la funzione non può essere decrescente.

Per il teorema di Lagrange applicato nell'intervallo [1,3], si ha

$$\frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = f'(x_0)$$

$$f(3) - f(1) = (3 - 1)f'(x_0)$$

con $0 < x_0 < 3$.

Quindi

$$f(3) = f(1) + 2\,f'(x_0)$$

$$f(3) = 1 + 2\,f'(x_0)$$

$$0 \leq 1 + 2\,f'(x_0) \leq 5$$

essendo

$$0 \leq \ f'(x_0) \leq 2\,.$$

Quesito 9

In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani (Oxy), è assegnato il luogo geometrico dei punti che soddisfano alla seguente equazione:

$$y = \sqrt{x^2 - 1} + \sqrt{1 - x^2}\,.$$

Tale luogo è costituito da:

A) un punto;
B) due punti;
C) infiniti punti;
D) nessun punto.

Una sola alternativa è corretta: individuarla e fornire un'esauriente spiegazione della risposta.

Il dominio di questa funzione è costituito dal sistema

$$\begin{cases} x^2 - 1 \geq 0 \\ 1 - x^2 \leq 0 \end{cases}$$

che fornisce l'insieme $D = \{-1, 1\}$.

Quindi il luogo richiesto è formato dai punti (1,0) e (-1,0).

La risposta corretta è la B),

Quesito 10

La funzione reale di variabile reale f(x), continua per ogni x, è tale che:

$$\int_0^2 f(x)\,dx = a\,, \qquad \int_0^6 f(x)\,dx = b\,,$$

dove a, b sono numeri reali.
Determinare, se esistono, i valori a, b per cui risulta:

$$\int_0^3 f(2x)\,dx = \ln 2 \qquad \text{e} \qquad \int_1^3 f(2x)\,dx = \ln 4\,.$$

Si ha

$$\int_0^3 f(2x)dx = \frac{1}{2}\int_0^6 f(x)dx = \frac{1}{2}b$$

Pertanto

$$\ln 2 = \frac{1}{2}b$$

Quindi

$$b = \ln 4\,.$$

Si ha inoltre

$$\int_2^6 f(x)dx = \int_0^6 f(x)dx - \int_0^2 f(x)dx = b - a\ .$$

Pertanto

$$\int_1^3 f(2x)dx = \frac{1}{2}(b-a) = \ln 4$$

Quindi

$$b - a = \ln 16$$

Sostituendo si ha

$$\ln 4 - a = \ln 16$$

da cui

$$a = \ln 4 - \ln 16 = -\ln 4.$$

In definitiva deve essere $a = -\ln 4$ e $b = \ln 4$.