ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO 2002-2003
Corso di ordinamento – sessione ordinaria
Tema di MATEMATICA - 19 giugno 2003

Svolgimento a cura del prof. Luigi Tomasi (luigi.tomasi@libero.it)

RISOLUZIONE DEL PROBLEMA 1

Si consideri un tetraedro regolare T di vertici A, B, C, D.

a) Indicati rispettivamente con V ed S il volume e l'area totale di T e con r il raggio della sfera inscritta in T, trovare una relazione che leghi V, S ed r.

b) Considerato il tetraedro regolare T' avente per vertici i centri delle facce di T, calcolare il rapporto fra le lunghezze degli spigoli di T e T' e il rapporto fra i volumi di T e T'.

c) Condotto il piano α, contenente la retta AB e perpendicolare alla retta CD nel punto E, e posto che uno spigolo di T sia lungo s, calcolare la distanza di E dalla retta AB.

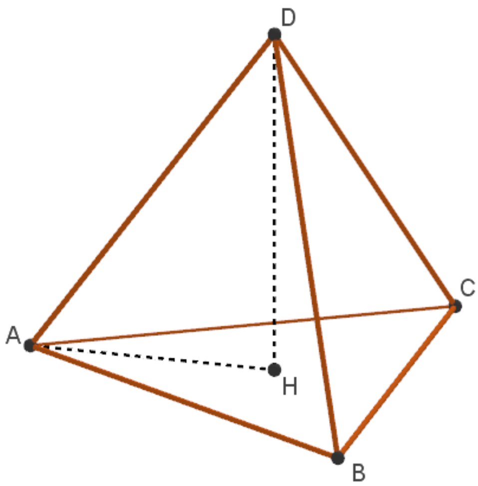
d) Considerata nel piano α la parabola p avente l'asse perpendicolare alla retta AB e passante per i punti A, B ed E, riferire questo piano ad un conveniente sistema di assi cartesiani ortogonali e trovare l'equazione di p.

e) Determinare per quale valore di s la regione piana delimitata dalla parabola p e dalla retta EA ha area $\frac{\sqrt{2}}{3}$ cm^2.

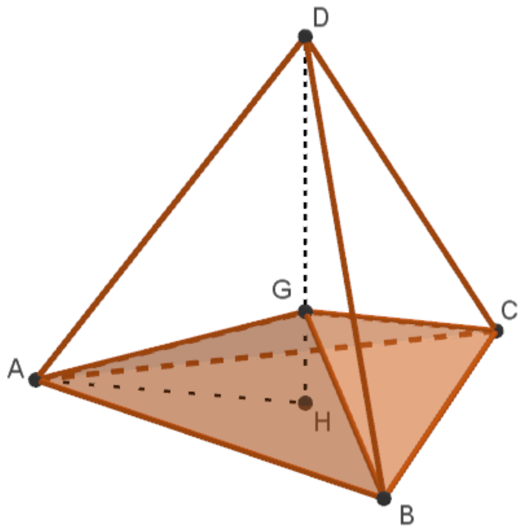
Punto a)

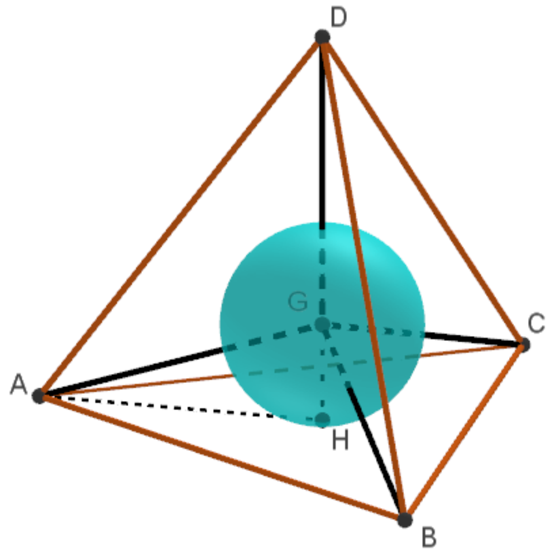
Una relazione che lega V, S ed r, è la seguente

$$V = \frac{1}{3} S\, r\, .$$



Un tetraedro regolare si può infatti pensare come unione di 4 piramidi congruenti, ciascuna di base una faccia del tetraedro, vertice nel baricentro G del tetraedro, e altezza il raggio della sfera inscritta.





La formula $V = \frac{1}{3} S\, r$ è analoga alla formula (in 2 dimensioni) che fornisce l'area di un triangolo

$$A = \frac{1}{2}(2p)\, r = pr.$$

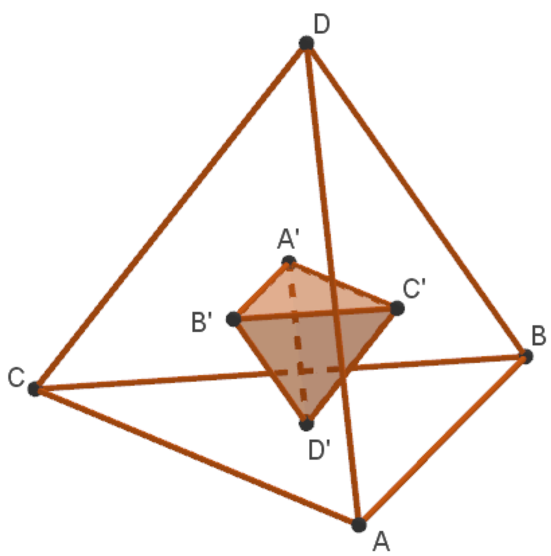
Poiché

$$V = \frac{l^3\sqrt{2}}{12}$$
$$S = l^2\sqrt{3}$$
$$r = \frac{l\sqrt{6}}{12}$$

si ricava la formula:

$$V = \frac{1}{3} S\, r\,.$$

Punto b)



Sia G il baricentro del tetraedro ABCD.

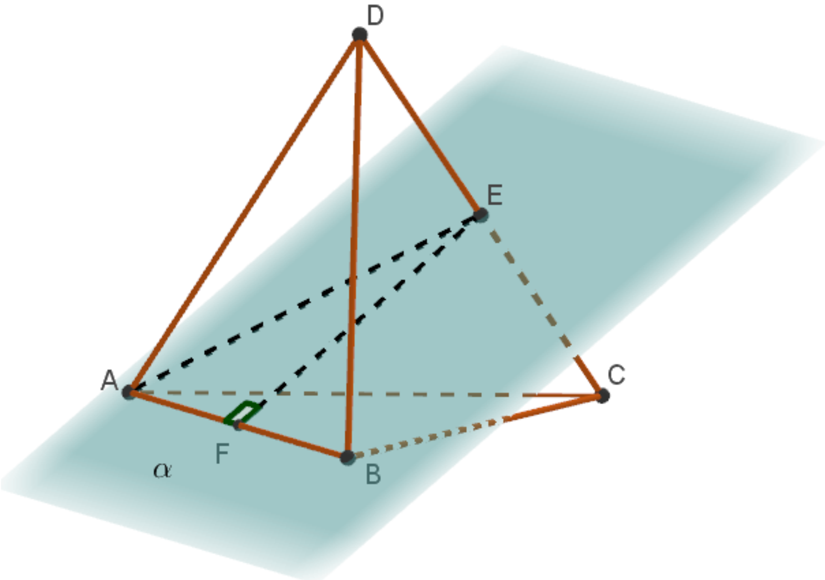
Il tetraedro A'B'C'D' (detto *duale* di ABCD) è omotetico al tetraedro ABCD, rispetto al baricentro G, con rapporto di omotetia $-1/3$.

Quindi il tetraedro T' è simile al tetraedro T, con rapporto di similitudine 1/3.

Pertanto il suo volume è dato da

$$Volume(T') = \frac{1}{27} Volume(T)\ .$$

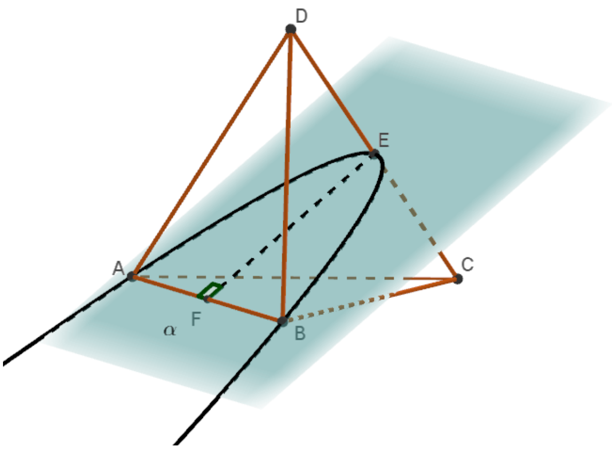
Punto c)

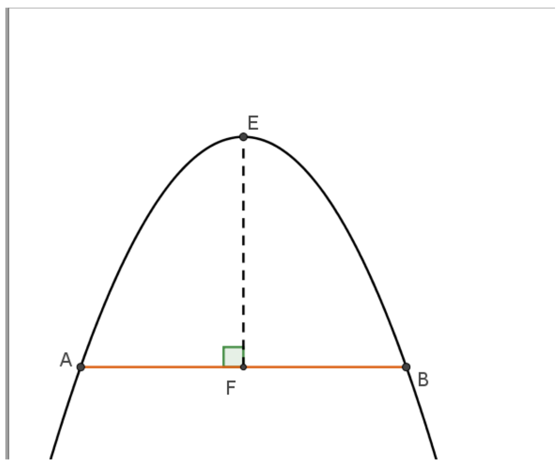


Per determinate la distaza EF, possiamo per esempio condiderare il triangolo rettangolo AFE.
Si ottiene

$$EF = \sqrt{AE^2 - AF^2} = \sqrt{\left(\frac{s\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{s}{2}\right)^2} = \frac{s}{\sqrt{2}}\ .$$

Punto d)





Nel piano α consideriamo la retta AB come asse x e la retta FE come asse y.

Il punto E ha coordinate $\left(0, \frac{s}{\sqrt{2}}\right)$; il punto B ha coordinate $\left(\frac{s}{2}, 0\right)$.
La parabola ha vertice nel punto E e asse y. Pertanto la sua equazione sarà:

$$y - s\frac{\sqrt{2}}{2} = a\,x^2$$

ovvero

$$y = a\,x^2 + s\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Imponendo il passaggio della parabola per il punto B, si ottiene l'equazione:

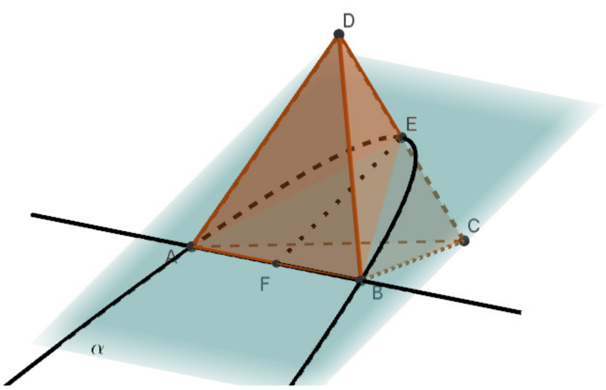
$$y = -\frac{4}{s\sqrt{2}}\,x^2 + \frac{s}{\sqrt{2}}.$$

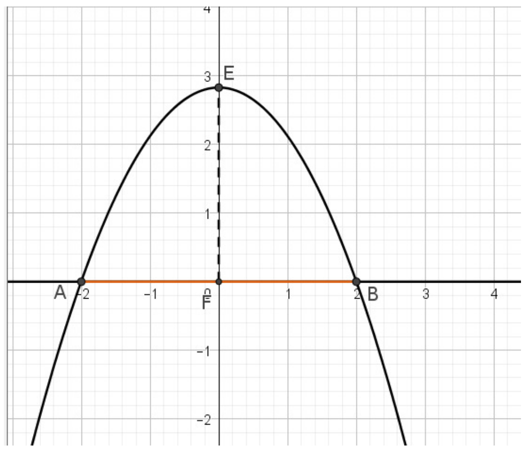
La retta AE ha equazione

$$y - s\frac{\sqrt{2}}{2} = x\sqrt{2}$$

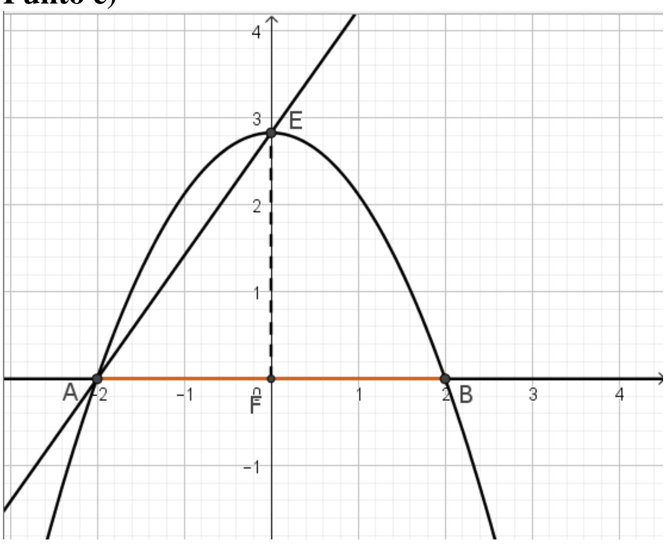
ovvero

$$y = x\sqrt{2} + \frac{s}{\sqrt{2}}.$$





Punto e)



Per determinare l'area richiesta, calcoliamo l'integrale definito:

$$A = \int_{-\frac{s}{2}}^{0} \left[-\frac{4}{s\sqrt{2}}\ x^2 + \frac{s}{\sqrt{2}} - \left(x\sqrt{2} + \frac{s}{\sqrt{2}} \right) \right] dx =$$

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-\frac{s}{2}}^{0} \left[-\frac{4}{s}\ x^2 + s - (2x + s) \right] dx =$$

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-\frac{s}{2}}^{0} \left(-\frac{4}{s}\ x^2 - 2x \right) dx =$$

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[-\frac{4}{3s}\ x^3 - x^2 \right]_{-\frac{s}{2}}^{0} = \frac{s^2\sqrt{2}}{24}.$$

Poiché deve essere $A = \frac{\sqrt{2}}{3}$, si ha l'equazione

$$\frac{s^2\sqrt{2}}{24} = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

e quindi, in definitiva, si trova

$$s = 2\sqrt{2}\ \text{cm}.$$