**ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO 2002-2003**
Corso di ordinamento – sessione ordinaria
Tema di MATEMATICA - 19 giugno 2003

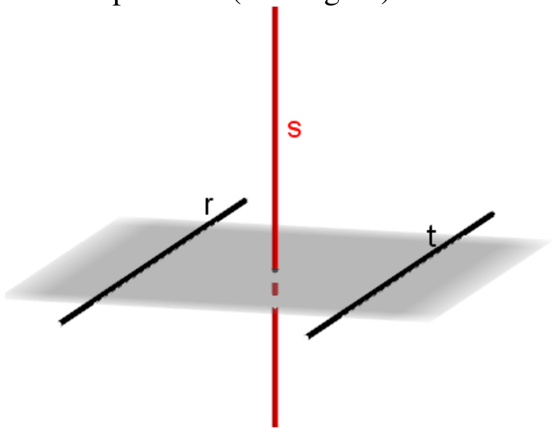
Svolgimento a cura del prof. Luigi Tomasi (luigi.tomasi@libero.it)

## RISPOSTE AI QUESITI DEL QUESTIONARIO

### Quesito n. 1

1. Dopo aver fornito la definizione di "rette sghembe", si consideri la seguente proposizione: «Comunque si prendano nello spazio tre rette x, y, z, due a due distinte, se x ed y sono sghembe e, così pure, se sono sghembe y e z allora anche x e z sono sghembe». Dire se è vera o falsa e fornire un'esauriente spiegazione della risposta.

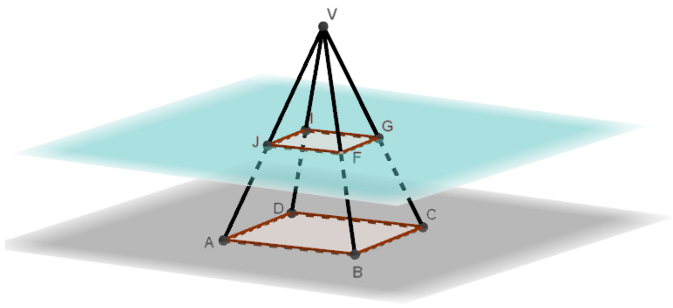
Due rette nello spazio si dicono sghembe se non sono complanari, ossia non esiste un piano che le contenga entrambe.
L'affermazione tra virgolette è falsa: se la retta $x$ è sghemba con $y$ e la retta $y$ è sghemba $z$ allora non è detto che $x$ sia sghemba con $z$.
Se la direzione di $r$ è ortogonale alla direzione di $s$, e la direzione è ortogonale a quella di $t$, le rette $r$ e $t$ sono parallele (vedi figura).

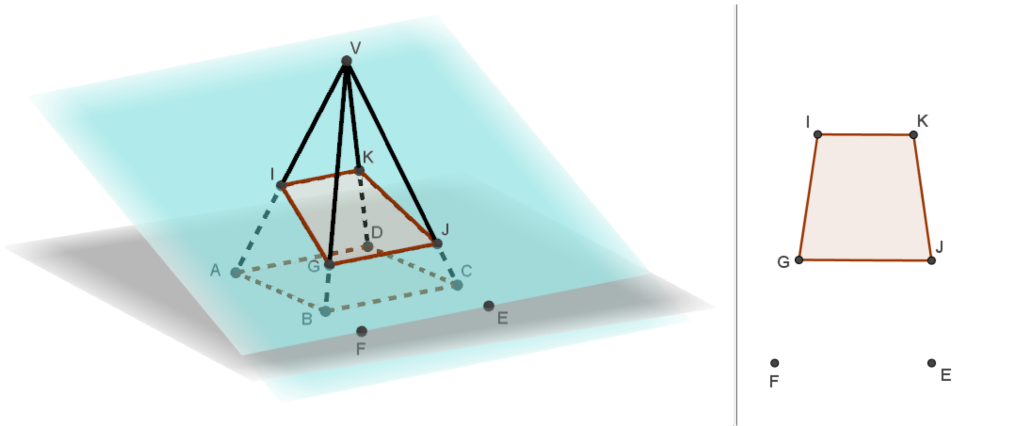


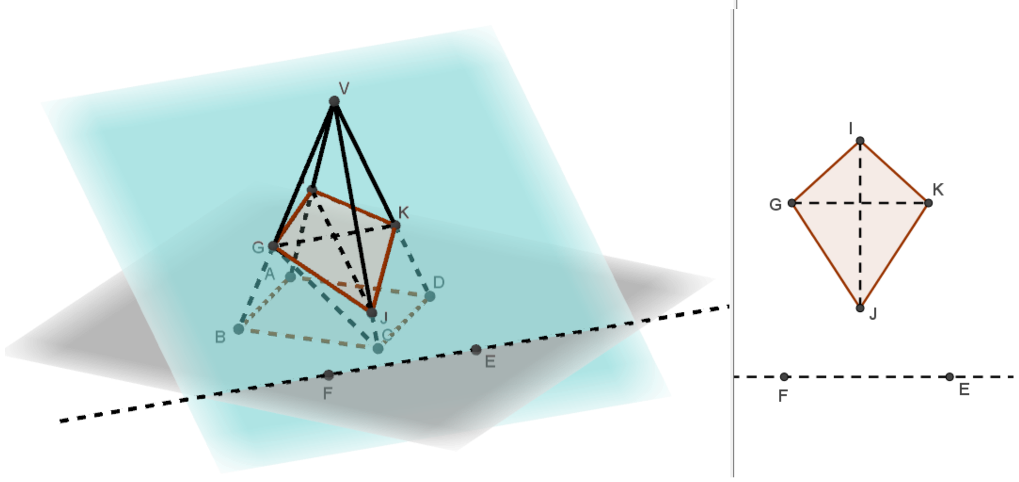

### Quesito n. 2

2. Un piano interseca tutti gli spigoli laterali di una piramide quadrangolare regolare: descrivere le caratteristiche dei possibili quadrilateri sezione a seconda della posizione del piano rispetto alla piramide.

Se il piano che seziona la piramide è parallelo al piano di base si ottiene un quadrato.
Se il piano è parallelo a un lato della base, si ottiene un trapezio isoscele.
Se il piano è parallelo a una diagonale della base si ottiene un deltoide, che non è però un rombo (un quadrilatero con le diagonali perpendicolari, una sola delle quali è asse dell'altra diagonale).
Negli altri casi si ottiene un quadrilatero convesso.



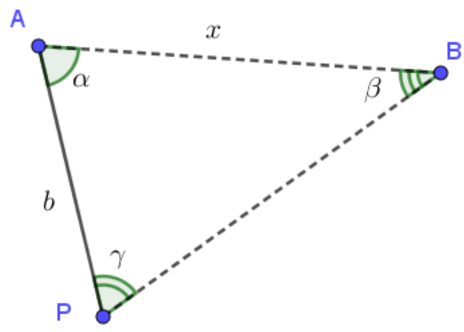




**Quesito n. 3**

| |
|---|
| 3. Dal punto A, al quale è possibile accedere, è visibile il punto B, al quale però non si può accedere in alcun modo, così da impedire una misura diretta della distanza AB. Dal punto A si può però accedere al punto P, dal quale, oltre ad A, è visibile B in modo che, pur rimanendo impossibile misurare direttamente la distanza PB, è tuttavia possibile misurare la distanza AP. Disponendo degli strumenti di misura necessari e sapendo che P non è allineato con A e B, spiegare come si può utilizzare il teorema dei seni per calcolare la distanza AB. |

Indichiamo con $b$ la misura (nota) di $AP$ e con $x$ la misura di $AB$ (da trovare). Si veda la figura seguente.




Per il teorema dei seni, si ha

$$\frac{b}{\sin\beta} = \frac{x}{\sin\gamma}$$

da cui si ricava

$$x = \frac{b\sin\gamma}{\sin\beta} = \frac{b\sin\gamma}{\sin(180° - (\alpha + \gamma))} = \frac{b\sin\gamma}{\sin(\alpha + \gamma)}\ .$$

**Quesito n.4**

4. Il dominio della funzione $f(x) = \ln\left\{\sqrt{x+1} - (x-1)\right\}$ è l'insieme degli x reali tali che:

A) $-1<x\leq 3$; B) $-1\leq x<3$; C) $0<x\leq 3$; D) $0\leq x<3$.

Una sola risposta è corretta: individuarla e fornire una esauriente spiegazione della scelta effettuata.

Il dominio della funzione

$$f(x) = \ln\left(\sqrt{x+1} - (x-1)\right)$$

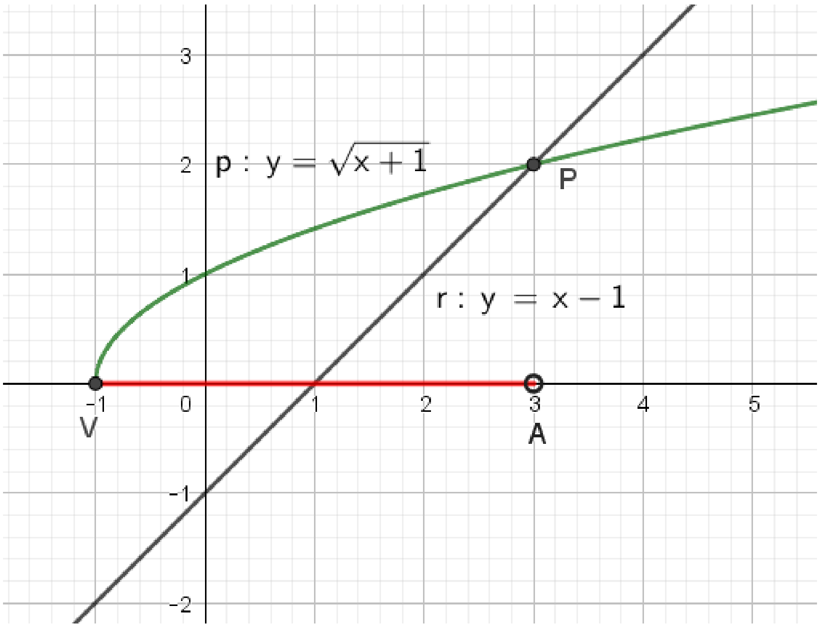
è dato dalle soluzioni del seguente sistema

$$\begin{cases} x+1 \geq 0 \\ \sqrt{x+1} - (x-1) > 0 \end{cases}$$

ovvero:

$$\begin{cases} x \geq -1 \\ \sqrt{x+1} > x - 1 \end{cases}$$

La seconda disequazione si può risolvere graficamente, disegnando la retta $y = x - 1$ e la semiparabola $y = \sqrt{x+1}$. Si ha il seguente grafico.




I dominio della funzione è pertanto l'intervallo: $-1 \leq x < 3$ (risposta B).

**Quesito n. 5**

5. La funzione $2x^3$-$3x^2$+2 ha un solo zero reale, vale a dire che il suo grafico interseca una sola volta l'asse delle ascisse. Fornire un'esauriente dimostrazione di questo fatto e stabilire se lo zero della funzione è positivo o negativo.

La funzione polinomiale (cubica)

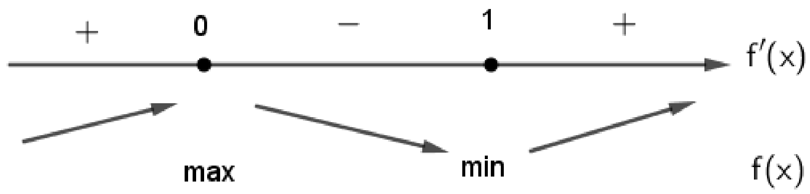
$$f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 2$$

ha ovviamente come dominio $\mathbb{R}$ ed è ivi continua e derivabile. Inoltre il limite di $f(x)$, per $x \longrightarrow +\infty$ $(-\infty)$ è $+\infty$ $(-\infty)$.

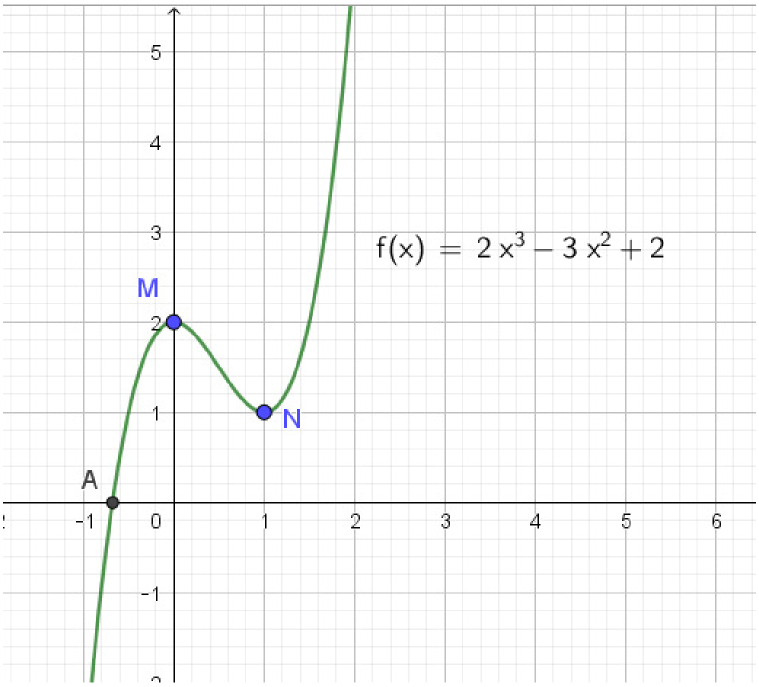
La sua derivata prima è

$$f'(x) = 6x^2 - 6x = 6x(x-1)$$

che ha per radici 0, 1, con $f(0) = 2$ e $f(1) = 1$. Dal segno di $f'(x)$ si ricava il seguente schema dell'andamento di $f(x)$.




Quindi $x = 0$ è un punto di massimo relativo e $x = 1$ è un punto di minimo relativo per $f(x)$. Nel segue che il grafico di $f(x)$ è il seguente.




Pertanto la funzione è crescente per $x < 0$ e per $x > 0$; è decrescente nell'intervallo $0 < x < 1$. Poiché l'ordinata del puto di minimo relativo è positiva, ne se segue che il grafico incontra l'asse delle $x$ una ed una sola volta nell'intervallo $-1 < x < 0$. Si ha infatti $f(-1) = -3$ ed $f(0) = 2$. Lo zero della funzione è pertanto negativo e usando un metodo di approssimazione vale circa $x_0 = -0.67765 \ldots$

**Quesito n. 6**

6. La derivata della funzione $f(x) = \int_0^{x^2} e^{-t^2}\, dt$ è la funzione $f'(x) = 2x e^{-x^4}$. Eseguire tutti i passaggi necessari a giustificare l'affermazione.

Possiamo scrivere $y = f(x)$ come una funzione composta della funzione $y = g(u)$ con la funzione $u = h(x)$, funzione di $x$:

$$x \xrightarrow{h} u \xrightarrow{g} y$$

Poniamo $u = h(x) = x^2$ e otteniamo la funzione:

$$g(u) = \int_0^u e^{-t^2} dt \,.$$

Quindi

$$g'(u) = e^{-u^2}$$

per il Teorema fondamentale del calcolo integrale.

Poiché abbiamo scritto:

$$f(x) = g(h(x))$$

si ha:

$$f'(x) = g'(u) \cdot h'(x).$$

Si ottiene quindi:

$$f'(x) = e^{-u^2} \cdot 2x = 2xe^{-x^4}.$$

**Quesito n. 7**

7. Considerati i primi $n$ numeri naturali a partire da 1:

$$1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n\text{-}1,\ n,$$

moltiplicarli combinandoli due a due in tutti i modi possibili. La somma dei prodotti ottenuti risulta uguale a:

A) $\frac{1}{4}n^2(n+1)^2$; B) $\frac{1}{3}n(n^2-1)$; C) $\frac{1}{24}n(n+1)(n+2)(3n+1)$; D) $\frac{1}{24}n(n^2-1)(3n+2)$.

Una sola risposta è corretta: individuarla e fornire una spiegazione esauriente della scelta operata.

Per tentativi, ragionando su 2, 3, 4 numeri successivi a partire da 1, si ricava la congettura che la risposta corretta sia la D).
Per dimostrarlo ragioniamo per induzione.
Per $n = 2$ la formula vale

$$S_2 = 1 \cdot 2 = \frac{1}{24} \cdot 2 \cdot 3 \cdot 8 = 2\,.$$

Supponiamo ora che la relazione valga per *n*.
Si ha allora

$$S_{n+1} = S_n + (n+1)(1+2+3+\cdots+n) =$$
$$S_{n+1} = S_n + (n+1)\frac{n(n+1)}{2} =$$
$$S_{n+1} = \frac{1}{24}n(n^2-1)(3n+2) + (n+1)\frac{n(n+1)}{2} =$$
$$S_{n+1} = \frac{1}{2}n(n+1)\left(\frac{1}{12}(n-1)(3n+2) + n + 1\right) =$$
$$S_{n+1} = \frac{1}{2}n(n+1)\left(\frac{3n^2+11n+10}{12}\right) =$$
$$S_{n+1} = \frac{1}{24}n(n+1)(n+2)(3n+5) =$$
$$S_{n+1} = \frac{1}{24}(n+1)(n^2+2n)(3n+5) =$$
$$S_{n+1} = \frac{1}{24}(n+1)((n+1)^2-1)(3(n+1)+2),$$

Quindi, se la relazione D) vale per *n*, allora vale anche per $n+1$. Quindi vale per ogni *n*.

**Quesito n. 8**

8. x ed y sono due numeri naturali dispari tali che $x - y = 2$. Il numero $x^3 - y^3$:
   A) è divisibile per 2 e per 3.
   B) è divisibile per 2 ma non per 3.
   C) è divisibile per 3 ma non per 2.
   D) non è divisibile né per 2 né per 3.

   Una sola risposta è corretta: individuarla e fornire una spiegazione esauriente della scelta operata.

Possiamo scomporre

$$x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2) = 2(x^2 + xy + y^2).$$

Quindi possiamo scartare le risposte C) e D).

Il numero

$$x^2 + xy + y^2$$

è dispari perché è la somma di tre numeri dispari.

Sostituendo $y = x - 2$, si ha

$$x^2 + x(x-2) + (x-2)^2 =$$
$$3x^2 - 6x + 4 =$$
$$3x^2 - 6x + 3 + 1 =$$
$$3(x-1)^2 + 1$$

che non è divisibile per 3 perché il resto della divisione di questo numero per 3 è 1.

Quindi la risposta corretta è la B).

**Quesito n. 9**

9. Si consideri una data estrazione in una determinata Ruota del Lotto. Calcolare quante sono le possibili cinquine che contengono i numeri 1 e 90.

Le possibili cinquine (non conta l'ordine) che contengono i numeri 1 e 90 sono

$$\binom{88}{3} = \frac{88 \cdot 87 \cdot 86}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 109736\,.$$

Si tratta del numero di tutte le terne (non ordinate) che si possono costruire a partire dagli 88 numeri rimasti, togliendo 1 e 90.

**Quesito n. 10**

10. Il valore dell'espressione $\log_2 3 \cdot \log_3 2$ è 1. Dire se questa affermazione è vera o falsa e fornire una esauriente spiegazione della risposta.

Occorre utilizzare la seguente proprietà dei logaritmi (detta "formula del cambiamento di base"):

$$\log_b x = \frac{\log_c x}{\log_c b}$$

dove *b, c* e *x* sono numeri positivi, con *b* e *c* diversi da 1.

Applicando questa proprietà si ottiene

$$\log_3 2 = \frac{\log_2 2}{\log_2 3} = \frac{1}{\log_2 3}.$$