Esame di Stato Liceo Scientifico
Prova di Matematica corso sperimentale PNI - 26 giugno 2009
a cura di L. Tomasi e S. De Stefani

Soluzione del PROBLEMA 2

In un sistema di riferimento cartesiano ortogonale Oxy, si consideri la funzione $f: R \to R$ definita da $f(x) = x^3 + kx$, con k parametro reale.

1. Si dica come varia il grafico di f al variare di k (k positivo, negativo o nullo).
2. Sia $g(x) = x^3$ e γ il suo grafico. Si dimostri che γ e la retta d'equazione $y = 1 - x$ hanno un solo punto P in comune. Si determini l'ascissa di P approssimandola a meno di 0,1 con un metodo iterativo di calcolo.
3. Sia **D** la regione finita del primo quadrante delimitata da γ e dal grafico della funzione inversa di g. Si calcoli l'area di **D**.
4. La regione **D** è la base di un solido **W** le cui sezioni con piani perpendicolari alla bisettrice del primo quadrante sono tutte rettangoli di altezza 12. Si determini la sezione di area massima. Si calcoli il volume di **W**.

PUNTO 1.

$f(x) = x^3 + kx$ cubica dispari

$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$

$f'(x) = 3x^2 + k \quad \to \quad f'(x) > 0 \Leftrightarrow x^2 > -\frac{k}{3}$

Se $k < 0$ la funzione è: crescente per $x < -\sqrt{-\frac{k}{3}} \vee x > \sqrt{-\frac{k}{3}}$, decrescente per $-\sqrt{-\frac{k}{3}} < x < \sqrt{-\frac{k}{3}}$, ha in $x = -\sqrt{-\frac{k}{3}}$ un punto di massimo relativo e in $x = \sqrt{-\frac{k}{3}}$ un punto di minimo relativo.

Se $k = 0$ la funzione è non decrescente con un punto di flesso a tangente orizzontale ascendente in $x = 0$.

Se $k > 0$ la funzione è strettamente crescente per ogni x reale.

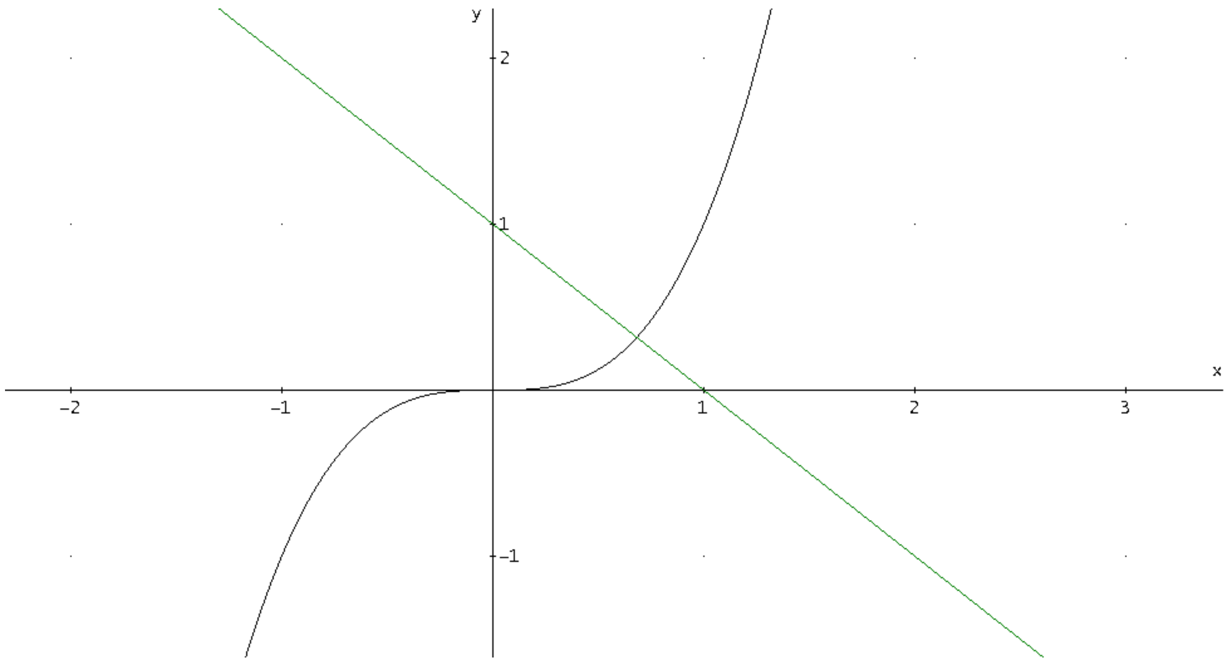
La funzione passa per l'origine degli assi ed interseca l'asse x in altri due punti (simmetrici rispetto ad O) se e solo se $k < 0$.

$f''(x) = 6x \quad \to \quad f''(x) > 0 \Leftrightarrow x > 0$

La funzione è concava per gli $x < 0$ e convessa per gli $x > 0$, presenta un flesso in (0; 0).

PUNTO 2.

$\gamma: \quad g(x) = x^3$



Sia $h(x) = x^3 + x - 1$.

$DOMINIO : R$

$h(0) = -1 < 0,$

$h(1) = 1 > 0,$

$h'(x) = 3x^2 + 1 > 0 \quad \forall x \in D$

Per il teorema di esistenza degli zeri la funzione interseca l'asse delle *x* almeno una volta tra 0 e 1; inoltre, essendo sempre crescente, tale intersezione è unica.

$h(0,5) < 0$

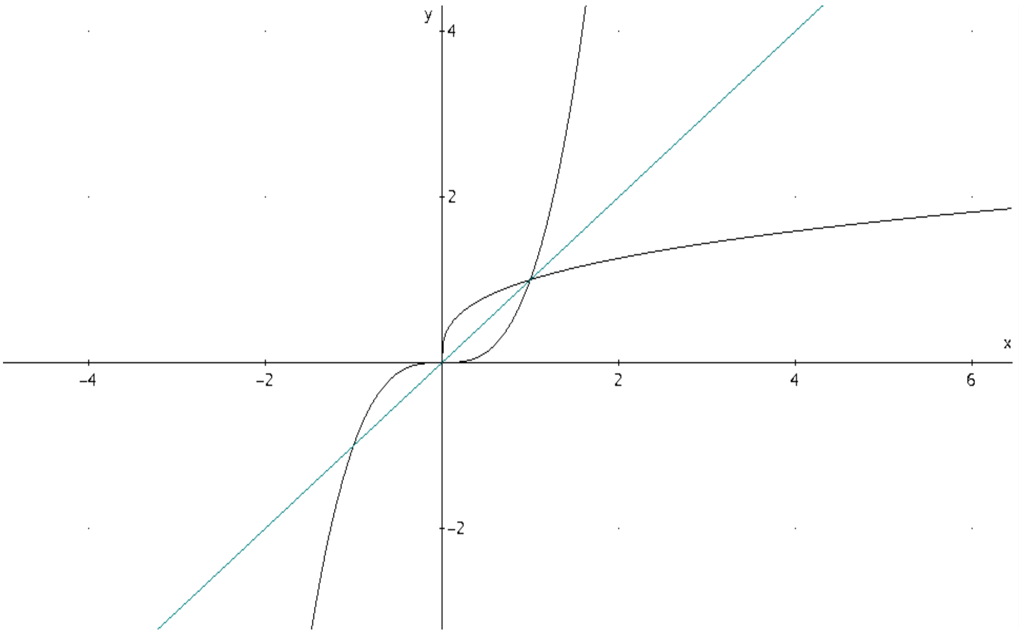
$h(0,75) > 0$

...

$h(0,68) < 0$

$h(0,69) > 0$

PUNTO 3.



$g(x) = x^3$

$g^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$

Le due curve si intersecano in (0;0), $(1;\ 1)$ e in (-1;-1).

$$Area(D) = \int_0^1 \left(\sqrt[3]{x} - x^3\right)dx = \left[\frac{3x\sqrt[3]{x} - x^4}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{2}$$

PUNTO 4.

Sia $P\left(x;\ x^3\right)$ un punto di $g(x)$, e $P'\left(x^3;\ x\right)$ il suo simmetrico rispetto alla bisettrice del primo e terzo quadrante. La base dei rettangoli è dunque $\overline{PP'} = \sqrt{2\left(x - x^3\right)^2} = \sqrt{2}\left|x - x^3\right|$. Tenuto conto che $0 \le x \le 1$, $\overline{PP'} = \sqrt{2}\left(x - x^3\right)$.

La sezione dei rettangoli di base PP' e altezza 12 vale $12\sqrt{2}\left(x - x^3\right)$.

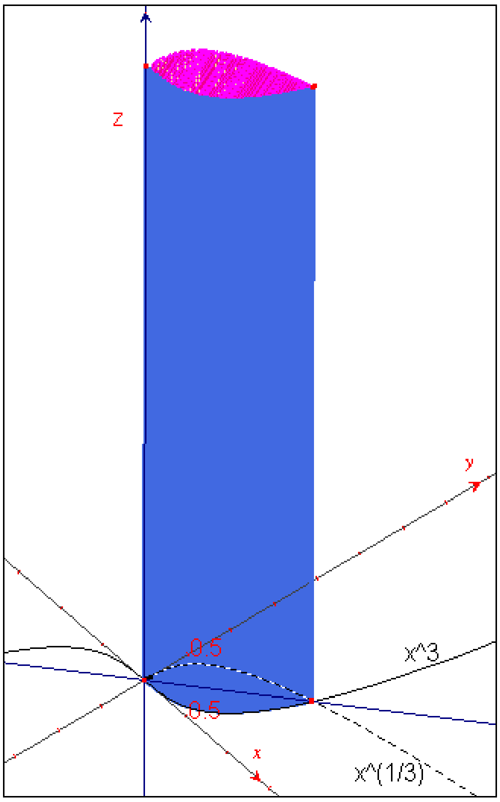
$$y = x - x^3 \quad \Rightarrow \quad y' = 1 - 3x^2 \quad \rightarrow \quad y' > 0 \Leftrightarrow x^2 < \frac{1}{3}$$

Si ha la sezione di area massima per $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$, e questa area massima è $\frac{8\sqrt{6}}{3}$.

Per determinare il volume richiesto si deve integrare rispetto al parametro $t = x\sqrt{2}$, che varia da 0 a $\sqrt{2}$ sulla bisettrice del I quadrante ($y = x$). Si ha quindi $x = \frac{t}{\sqrt{2}}$. La sezione sarà pertanto $S(t) = 12\left(t - \frac{t^3}{2}\right)$. Il volume richiesto sarà pertanto:

$$W = \int_0^{\sqrt{2}} 12\left(t - \frac{t^3}{2}\right)dt = 12\left[\frac{t^2}{2} - \frac{t^4}{8}\right]_0^{\sqrt{2}} = 12 \cdot \frac{1}{2} = 6.$$

Il volume di questo solido si poteva, più facilmente, determinare come il volume di un "cilindroide" (vedi figura seguente), moltiplicando l'area della base (1/2) per l'altezza (12), ottenendo così in modo molto più veloce $V = A_{base} \cdot h = \frac{1}{2} \cdot 12 = 6$.



Commento

Problema abbastanza "classico.

Punto 1. Anche il questo problema richiede di studiare una famiglia di infinite funzioni, anche se è più facile visualizzarle mentalmente rispetto al primo problema.

Punto 2. Abbastanza "standard".

Punto 3. Idem, se uno ricorda come è il grafico della funzione inversa.

Punto 4. La prima domanda è relativamente facile, per chi riesca a visualizzare la figura. Difficile e un po' laboriosa la seconda parte anche perché la variabile di integrazione non coincide, come al solito, con la x ma deve essere scelta sulla bisettrice del primo quadrante, cambiando opportunamente uno dei due estremi di integrazione (anche quest'anno il "metodo delle fette": chissà se è in programma? Leggete i programmi del PNI del 1996 per scoprirlo).