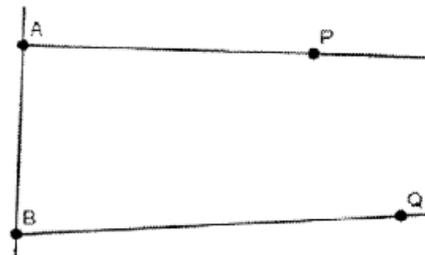


Esame di Stato Liceo Scientifico
Prova di Matematica corso sperimentale PNI - 26 giugno 2009
Soluzione del QUESTIONARIO
a cura di L. Tomasi

QUESITO 10

10. “Se due punti P e Q del piano giacciono dalla stessa parte rispetto ad una retta AB e gli angoli $\hat{P}AB$ e $\hat{Q}BA$ hanno somma minore di 180° , allora le semirette AP e BQ , prolungate adeguatamente al di là dei punti P e Q , si devono intersecare”. Questa proposizione è stata per secoli oggetto di studio da parte di schiere di matematici. Si dica perché e con quali risultati.



La proposizione citata non è altro che il V Postulato degli *Elementi* di Euclide.

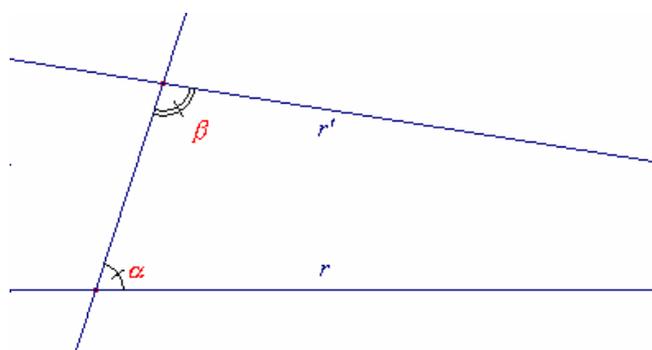


Figura che illustra il V postulato di Euclide

La formulazione di Euclide è la seguente:

Postulato V. *Se [in un piano] una retta, intersecando altre due rette, forma con esse, da una medesima parte, angoli alterni la cui somma è minore di due angoli retti, allora queste due rette indefinitamente prolungate finiscono con l'incontrarsi dalla parte detta.*

Questo enunciato è apparso fin dall'antichità meno evidente dell'enunciato degli altri postulati e nel corso dei secoli ha creato grandi discussioni e diversi tentativi di dimostrazione, culminati nel tentativo fatto nel 1733 da Girolamo Saccheri (1667-1733) nella sua opera *Euclides ab omni naevo vindicatus*.

Nell'Ottocento Bolyai e Lobacevskij e successivamente Riemann dimostrarono la possibilità di costruire delle geometrie diverse da quella euclidea, negando il V postulato.

Nelle geometrie non-euclidee viene negato il “V postulato” di Euclide.

Una formulazione diversa del V postulato di Euclide - dovuta a Proclo, V sec. d. C. - è la seguente: “dati nel piano una retta r ed un punto P , per il punto P si può condurre una ed una sola retta parallela a quella data”.

Se si nega questo postulato si ottengono delle altre geometrie, dette appunto “non-euclidee”.

La negazione si può fare in due modi:

- negando l'unicità della parallela ad una retta data passante per un punto: per un punto P passano infinite parallele alla retta data. In questo caso si ottiene una geometria non euclidea di tipo *iperbolico* (Saccheri, Bolyai, Lobacevskij). In questa geometria, se si considera un triangolo, la

somma degli angoli è sempre minore di un angolo piatto. Un famoso modello di questa geometria è stato dato da Eugenio Beltrami e successivamente da Henri Poincaré.

- negando l'esistenza stessa di una parallela alla retta r passante per il punto P ; in questo caso si ottiene un tipo di geometria non euclidea che viene detta *ellittica* (Riemann). In questa geometria la somma degli angoli di un triangolo è sempre maggiore di un angolo piatto. Un modello di geometria ellittica si ottiene se si considera una superficie sferica e su di essa si considerano come “rette” le circonferenze massime.

Per riportare degli esempi

- si può considerare il modello del “disco” di Poincaré (in cui esistono infinite “rette” parallele ad una retta data); in questo modello della geometria iperbolica le “rette” sono archi di circonferenza (privati degli estremi), ortogonali al cerchio “limite”, con gli estremi appartenenti al cerchio limite.
- la geometria della sfera in cui per un “punto” dato non esiste alcuna retta parallela ad una “retta” data. In questo modello della geometria ellittica le “rette” sono circonferenze massime sulla superficie della sfera (in cui si identificano punti diametralmente opposti).

Si rinvia a questi testi:

-*Gli Elementi di Euclide* (a cura di A. Frajese e L. Maccioni), Utet, Torino 1970

-R.J. Trudeau, *La rivoluzione non euclidea*, Bollati Boringhieri, Torino 1991

-E. Agazzi, D. Palladino, *Le geometrie non euclidee e i fondamenti della geometria dal punto di vista elementare*, La Scuola, Brescia 1998.

Commento

Livello di difficoltà: alto.

E' in programma nel PNI.

Normalmente si fa solo un accenno.

E' presente nei libri di testo dei corsi sperimentali.

Controlla conoscenze non fondamentali.

Formulazione: è una tipica domanda in cui non è ben chiara quale sia la “risposta attesa”. E' più adatto ad una prova orale che ad una prova scritta.