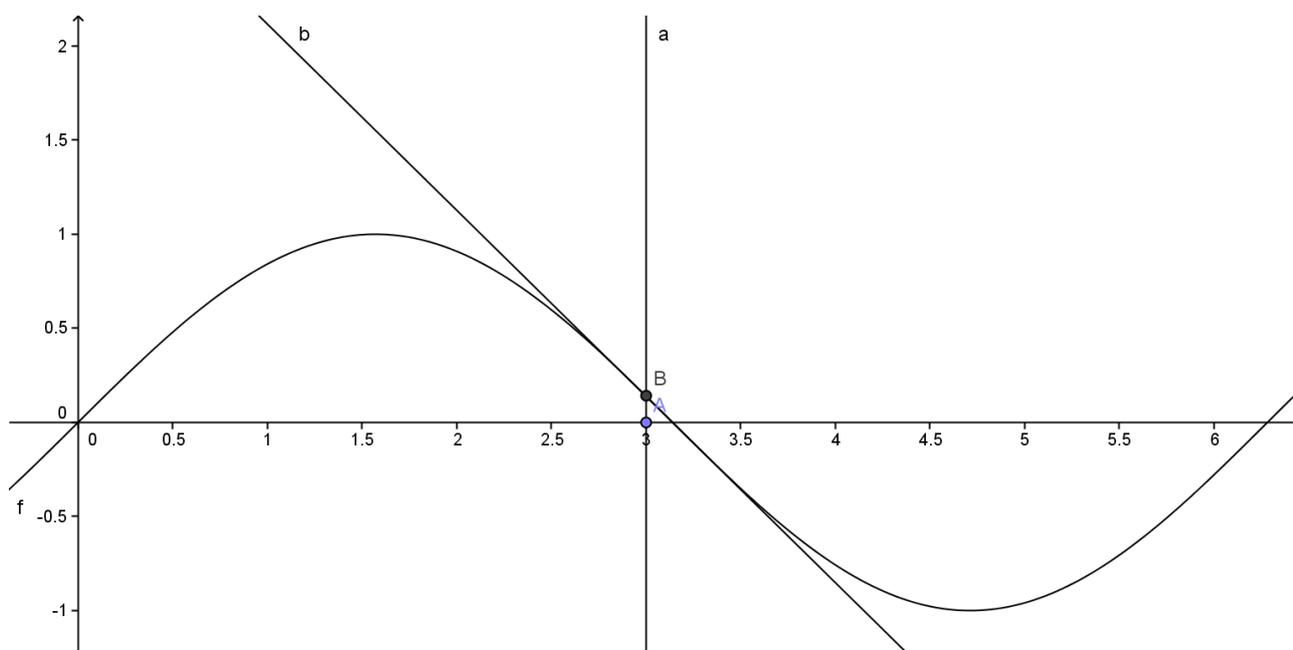


Esame di Stato Liceo Scientifico
Prova di Matematica corso sperimentale PNI - 26 giugno 2009
Soluzione del QUESTIONARIO
a cura di L. Tomasi

QUESITO 6

6. Con l'aiuto di una calcolatrice, si applichi il procedimento iterativo di Newton all'equazione $\sin x = 0$, con punto iniziale $x_0 = 3$. Cosa si ottiene dopo due iterazioni?



Applichiamo il procedimento iterativo di Newton (per ora non discutiamo su quale sia l'intervallo e nemmeno se si possa usare oppure no il metodo di Newton). Eseguiamo meccanicamente quel che il testo del quesito chiede di fare!

Si utilizza la formula

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

La funzione è $f(x) = \sin(x)$ con punto iniziale $x_0 = 3$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

Quindi

$$x_1 = 3 - \frac{\sin 3}{\cos 3} = 3 - \tan 3 \cong 3,142546543$$

Nello stesso modo utilizzando $x_1 = 3 - \tan 3$ si calcola

$$x_2 = 3 - \tan 3 - \tan(3 - \tan 3) \cong 3,141592653$$

che è un valore "vicinissimo" ad una delle radici, che notoriamente è $x = \pi = 3,141592653589\dots$

Qui sopra abbiamo applicato il procedimento iterativo di Newton, come richiesto dal testo, ma ci si doveva chiedere prima di tutto se si può applicare questo metodo alla funzione $\sin x$ e in quale intervallo.

Prima di applicare il procedimento di Newton occorre infatti individuare un intervallo in cui la funzione sia sempre concava (oppure in alternativa convessa). Questo invece non si verifica, perché la funzione è concava fino a $x = \pi$ (punto di flesso) e poi diventa convessa.

Il primo valore che si ottiene è $x_1 = 3 - \frac{\sin 3}{\cos 3} = 3 - \tan 3 \cong 3,142546543$

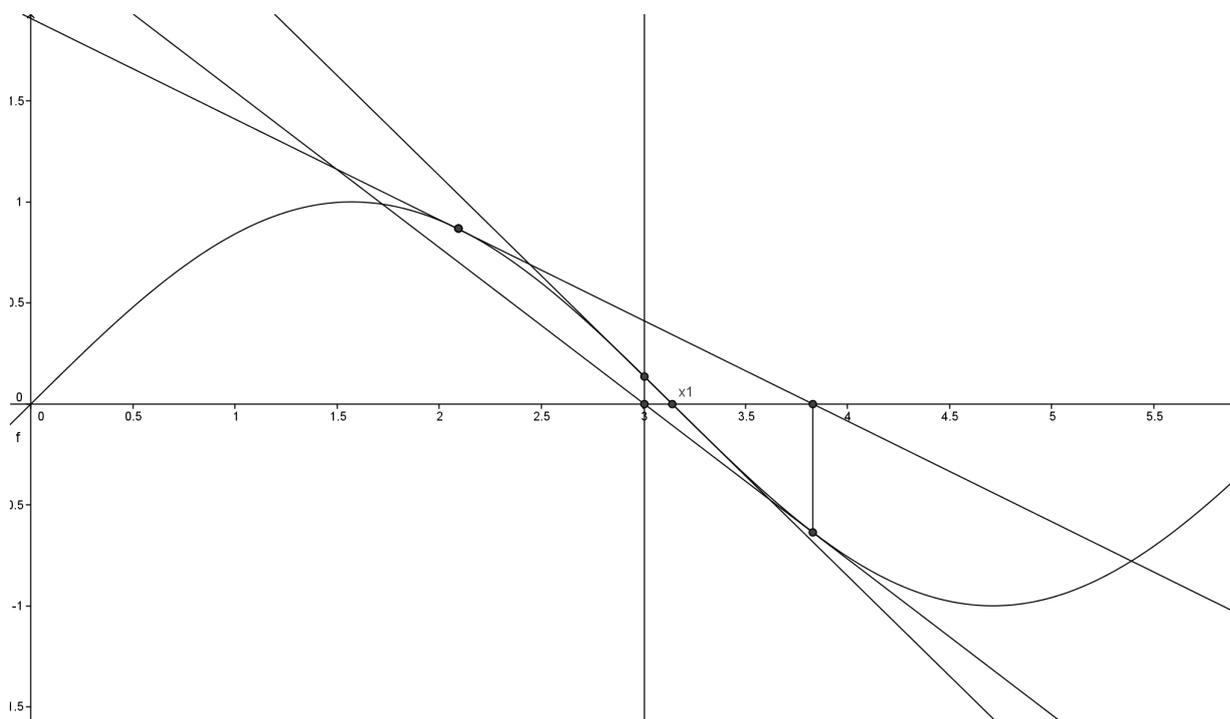
Si ha $x_1 > \pi$.

Nell'intervallo $[3; x_1]$ la funzione $\sin x$ non è sempre concava (e nemmeno sempre convessa); quindi in questo intervallo non è possibile applicare il metodo di Newton.

Nonostante questo, se si applica di nuovo la formula iterativa di Newton, si ottiene il valore $x_2 = 3,141592653$

che è un'ottima approssimazione (per difetto) della radice $x = \pi = 3,141592653589\dots$ dell'equazione data.

Il procedimento iterativo di Newton "funziona" ugualmente anche se non sono verificate le ipotesi del relativo teorema, perché la radice $x = \pi$ è un punto di flesso.



----- Commento

Livello di difficoltà: medio, difficile capire perché l'algoritmo di Newton funziona lo stesso, pur non essendo verificate le ipotesi per poter applicare l'algoritmo.

E' in programma (ma non questo caso "strano").

Normalmente si fa

E' presente nei libri di testo (ma non questo caso)

Controlla conoscenze fondamentali, ma il caso riguarda un'equazione banale dove non occorre scomodare il metodo di Newton per determinare la soluzione.