<u>PROBLEMA 1 – PNI</u>

Soluzione di S. De Stefani e V. Roselli

Sia f la funzione definita sull'insieme $\boldsymbol{R}$ dei numeri reali da $f(x)= x + ln\,4 + \dfrac{2}{e^x+1}$ e sia Γ la sua rappresentazione grafica nel sistema di riferimento Oxy.

1. Si determini il limite di $f(x)$ per x che tende a $+\infty$ e a $-\infty$. Si calcoli $f(x) + f(-x)$ e si spieghi perchè dal risultato si può dedurre che il punto $A(0;\ 1 + ln4)$ è centro di simmetria di Γ.
2. Si provi che, per tutti i reali m, l'equazione $f(x) = m$ ammette una e una sola soluzione in $\boldsymbol{R}$. Sia α la soluzione dell'equazione $f(x) = 3$; per quale valore di m il numero $-\alpha$ è soluzione dell'equazione $f(x) = m$?
3. Si provi che, per tutti gli x reali, è: $f(x) = x + 2 + ln\,4 - \dfrac{2e^x}{e^x+1}$. Si provi altresì che la retta r di equazione $y = x + ln4$ e la retta s di equazione $y = x + 2 + ln\,4$ sono asintoti di Γ e che Γ è interamente compresa nella striscia piana delimitata da r e da s.
4. Posto $I(\beta)=\int_0^{\beta}\left[f(x)-x-ln4\right]dx$, si calcoli: $\lim\limits_{\beta\to+\infty} I(\beta)$. Qual è il significato geometrico del risultato ottenuto?

<u>Punto 1</u>:

Si ha $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\pm\infty$, in quanto $\lim_{x\to+\infty}\left(\ln 4+\dfrac{2}{e^x+1}\right)=\ln 4$ mentre $\lim_{x\to-\infty}\left(\ln 4+\dfrac{2}{e^x+1}\right)=\ln 4+2.$

Risulta poi

$$f(x)+f(-x)=x+\ln 4+\frac{2}{e^x+1}-x+\ln 4+\frac{2}{e^{-x}+1}=2\ln 4+2\left(\frac{1}{e^x+1}+\frac{1}{e^{-x}+1}\right)=$$

$$=2\ln 4+2\left(\frac{1}{e^x+1}+\frac{e^x}{1+e^x}\right)=2\ln 4+2=2(\ln 4+1)$$

Questo risultato ci permette di dire che il punto medio del segmento che unisce i punti $(x, f(x))$ e $(-x, f(-x))$ è il punto $\left(0;\dfrac{f(x)+f(-x)}{2}\right)$ = (0, 1 + ln4), che è quindi centro di simmetria per il grafico della curva.

<u>Punto 2</u>:

Poiché risulta $f'(x)=1-\dfrac{2e^x}{(e^x+1)^2}=\dfrac{e^{2x}+1+2e^x-2e^x}{(e^x+1)^2}=\dfrac{e^{2x}+1}{(e^x+1)^2}$, si ha che $f'(x) > 0$, $\forall x\in R$, quindi $f(x)$ è crescente in R.

Poiché i limiti a $\pm\infty$ sono, come visto nel punto 1, $\pm\infty$, ogni retta di equazione $y = m$ intersecherà il grafico di $f(x)$ in un solo punto, cioè l'equazione $f(x) = m$ ha, $\forall m \in R$, una sola soluzione reale.

Se $f(\alpha)=3$ risulta $f(\alpha)+f(-\alpha)=2+2\ln 4$ e quindi $f(-\alpha)=2+2\ln 4-3=-1+2\ln 4$, ossia $-\alpha$ è soluzione dell'equazione $f(x) = -1 + 2\ln 4$.

Quindi $m = 2\ln 4 - 1$.

<u>Punto 3</u>:

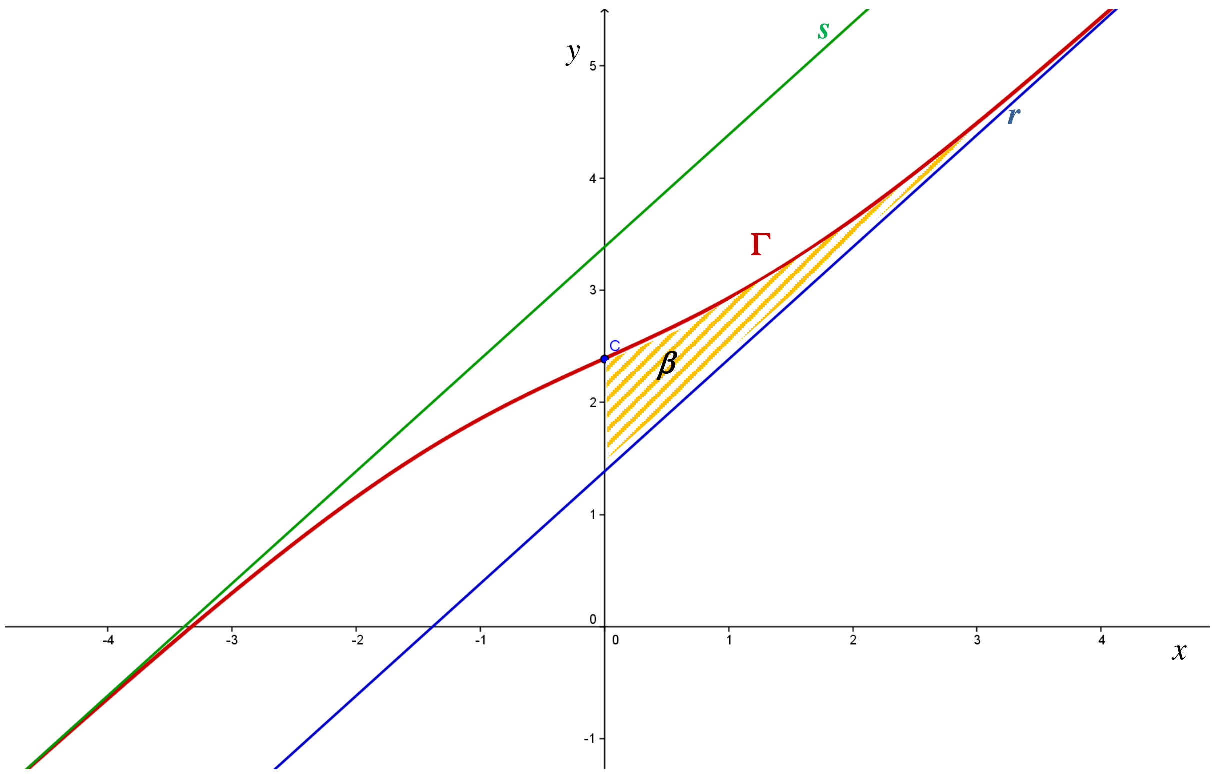
Risulta $x+\ln 4+2-\dfrac{2e^x}{e^x+1}=x+\ln 4+\dfrac{2e^x+2-2e^x}{e^x+1}=x+\ln 4+\dfrac{2}{e^x+1}=f(x)$

Per determinare gli asintoti obliqui di $f(x)$ calcoliamo

$$m = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x+\ln 4+\frac{2}{e^x+1}}{x}\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{\ln 4}{x}+\frac{2}{x(e^x+1)}\right)=1.$$

$q_1 = \lim_{x\to+\infty}\left(x+\ln 4+\dfrac{2}{e^x+1}-x\right)=\ln 4$ e $q_2 = \lim_{x\to-\infty}\left(x+\ln 4+\dfrac{2}{e^x+1}-x\right)=\ln 4+2.$

Quindi le rette r di equazione $y = x + \ln 4$ ed s di equazione $y = x + 2 + \ln 4$ sono asintoti obliqui per $f(x)$.



Inoltre, $\forall x \in R$, si ha che: $x + \ln 4 < f(x) < x + \ln 4 + 2$, infatti $0<\dfrac{2}{e^x+1}<2$, $\forall x \in R$.

Punto 4:

Si calcoli $\int_0^{\beta}[f(x)-x-\ln 4]dx=\int_0^{\beta}\frac{2}{e^x+1}dx$.

L'integrale indefinito è:

$\int\frac{2}{e^x+1}dx=2\int\frac{1}{e^x+1}dx=2\int\frac{e^x+1-e^x}{e^x+1}dx=2\int(1-\frac{e^x}{e^x+1})dx=2[x-\ln(e^x+1)]$, da cui

$$I(\beta)=2[x-\ln(e^x+1)]_0^{\beta}=2[\beta-\ln(e^{\beta}+1)+\ln 2]=2[\ln e^{\beta}-\ln(e^{\beta}+1)+\ln 2]=2\ln\frac{2e^{\beta}}{e^{\beta}+1}.$$

Poiché $\lim_{\beta\to+\infty}\ln\frac{2e^{\beta}}{e^{\beta}+1}=\ln 2$, si ha che: $\lim_{\beta\to+\infty} I(\beta)=2\ln 2$

Il valore trovato rappresenta l'area della parte di piano situata nel I quadrante compresa tra il grafico di $f(x)$ e l'asintoto obliquo destro.