Esame di Stato – sessione straordinaria - seconda prova scritta - Liceo scientifico (tutti gli indirizzi) - Prova scritta di Matematica – 20 settembre 2018

PROBLEMA 1 – soluzione di L. Tomasi

Un produttore di candeline tea light vuole produrre un nuovo tipo di candela colorata che abbia una parte inferiore di forma cilindrica ed una parte superiore avente la forma riportata in figura 1, che si connetta perfettamente a quella inferiore, come mostrato in figura 2:

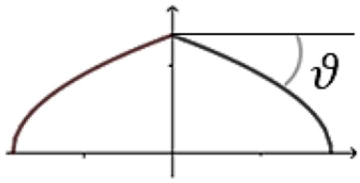


Figura 1

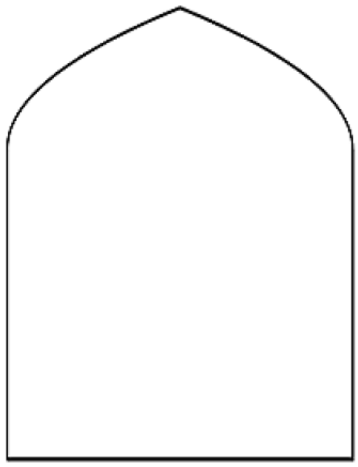


Figura 2

1) Stabilisci, motivando adeguatamente la risposta, quale delle seguenti funzioni può rappresentare adeguatamente il profilo della parte superiore della candela:

1. $y = \begin{cases} \sqrt{a-x} & se\ 0 \leq x \leq a \\ \sqrt{a+x} & se - a \leq x < 0 \end{cases} \quad con\, a \in \mathbb{R},\ a > 0$

2. $y = a - x^2 \quad in \left[-\sqrt{a}; \sqrt{a}\right] \qquad con\ \ a \in \mathbb{R},\ a > 0$

3. $y = -\sqrt{|x|} + a \quad in\ [-a^2;\ a^2] \qquad con\ \ a \in \mathbb{R},\ a > 0$

Utilizzando l'espressione analitica trovata, studia eventuali punti di singolarità del profilo della parte superiore della candela.

2) Per consentire l'inserimento dello stoppino al vertice della candela, è necessario che l'angolo ϑ in figura 1 non sia maggiore di 30°. Determina di conseguenza i possibili valori del parametro a.

3) Attribuendo all'altezza e al raggio della parte cilindrica i valori rispettivamente di 8 e 2, in un'opportuna unità di misura, determina il volume totale della candela. Da questo dato dipenderanno il peso e il costo di produzione della candela stessa.

Il produttore deve inscatolare le candele in confezioni da 3 e da 4 candele, posizionando le candele in verticale, con le basi circolari disposte in modo da occupare il minor spazio possibile. Si prevedono due possibili configurazioni per posizionare le basi circolari delle candele all'interno delle scatole, rappresentate in figura 3:

Configurazione 1 — Configurazione 2

Figura 3

4) Fornisci una valutazione numerica dell'efficienza dei due confezionamenti, calcolando il rapporto tra area occupata dalle basi circolari delle candele inserite nella scatola e area disponibile in ciascuna delle due configurazioni. Tale rapporto deve essere espresso in percentuale. Ai fini del calcolo, considera che le celle poligonali evidenziate in grigio sono rispettivamente un triangolo equilatero e un quadrato.

Soluzione

Punto 1)

1) Stabilisci, motivando adeguatamente la risposta, quale delle seguenti funzioni può rappresentare adeguatamente il profilo della parte superiore della candela:

1. $y = \begin{cases} \sqrt{a-x} & se\ 0 \le x \le a \\ \sqrt{a+x} & se - a \le x < 0 \end{cases} \quad con\, a \in \mathbb{R},\ a > 0$

2. $y = a - x^2 \quad in\, [-\sqrt{a}; \sqrt{a}] \quad con\ a \in \mathbb{R},\ a > 0$

3. $y = -\sqrt{|x|} + a \quad in\, [-a^2;\ a^2] \quad con\ a \in \mathbb{R},\ a > 0$

Utilizzando l'espressione analitica trovata, studia eventuali punti di singolarità del profilo della parte superiore della candela.

L'espressione analitica del profilo superiore della candela è la funzione 1 ed è definita come segue:

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{a-x} & se \quad 0 \le x \le a \\ \sqrt{a+x} & se - a \le x < 0 \end{cases}$$

La funzione 2 non è accettabile perché si tratta di una funzione quadratica (pari); il grafico è una parabola con il vertice nel punto $(0,2)$e pertanto il vertice è un punto dove la funzione è derivabile, con derivata nulla, che è contro il profilo dato nel testo.

La funzione 3 non è accettabile perché nel punto $x = 0$ si ha una cuspide, che non corrisponde al profilo dato. Nel caso della funzione 3, si ha infatti

$$y'(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{2\sqrt{x}} & se \quad 0 < x \le a \\ \dfrac{1}{2\sqrt{-x}} & se - a < x < 0 \end{cases}$$

e

$$\lim_{x \to 0^+} y'(x) = -\infty$$
$$\lim_{x \to 0^-} y'(x) = +\infty\,.$$
Il punto di ascissa $x = 0$ è pertanto un punto cuspidale.

Quindi la funzione 1 corrisponde al profilo dato nel testo.
La funzione 1 è definita a tratti ed è pari. La sua derivata prima è:

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{-1}{2\sqrt{a-x}} & se \quad 0 \leq x < a \\ \dfrac{1}{2\sqrt{a+x}} & se -a < x < 0 \end{cases}$$

Questa funzione ha un punto angoloso per $x = 0$, e due punti di non derivabilità (con tangente parallela all'asse y) per $x = \pm a$.
Infatti si ha

$$f'_+(0) = -\frac{1}{2\sqrt{a}}$$

e

$$\lim_{x \to 0^-} f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{a}}.$$

Quindi

$$f'_-(0) = \frac{1}{2\sqrt{a}}$$

Riscriviamo la derivata prima nella forma seguente:

$$f'(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{2}(a-x\ )^{-\frac{1}{2}} & se \quad 0 \leq x < a \\ \dfrac{1}{2}(a+x\ )^{-\frac{1}{2}} & se -a < x < 0 \end{cases}$$

Pertanto la derivata seconda è data da:

$$f''(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{4} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{(a-x)^3}} & se \quad 0 \leq x < a \\ -\dfrac{1}{4} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{(a+x)^3}} & se -a < x < 0 \end{cases}$$

La derivata seconda è negativa nell'intervallo $0 \leq x < a$ e nell'intervallo $-a < x < 0$. Ne segue che la funzione è concava nell'intervallo $0 \leq x < a$ e nell'intervallo $-a < x < 0$.
Il grafico è riportato in figura 1.

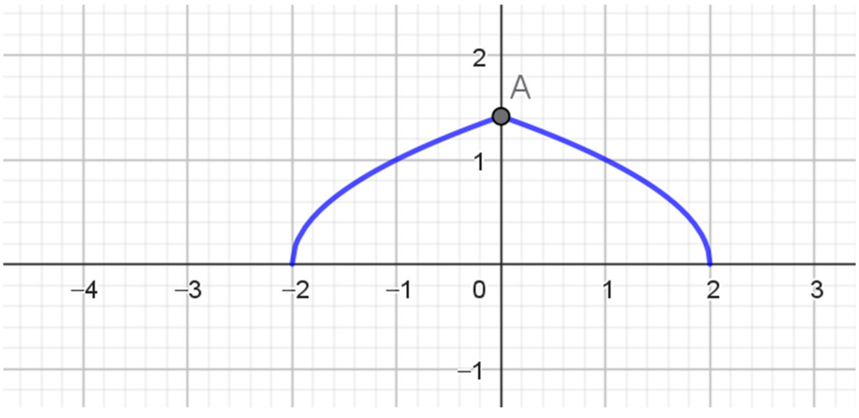


figura1

Punto 2

2) Per consentire l'inserimento dello stoppino al vertice della candela, è necessario che l'angolo ϑ in figura 1 non sia maggiore di 30°. Determina di conseguenza i possibili valori del parametro a.

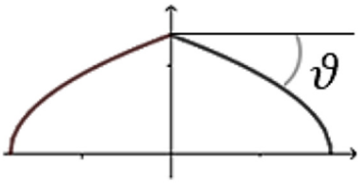


Figura 1

Posto

$$0 < \vartheta \leq 30°$$

ne segue, essendo la funzione $\tan x$ crescente (per angoli acuti),

$$0 < \tan\vartheta \leq \tan 30°.$$

Poiché

$$\tan\vartheta = |f_+'(0)|$$

si ha

$$0 < \frac{1}{2\sqrt{a}} \leq \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Passando ai reciproci si ottiene

$$2\sqrt{a} \geq \sqrt{3}$$

e in definitiva

$$a \geq \frac{3}{4}.$$

Punto 3)

3) Attribuendo all'altezza e al raggio della parte cilindrica i valori rispettivamente di 8 e 2, in un'opportuna unità di misura, determina il volume totale della candela. Da questo dato dipenderanno il peso e il costo di produzione della candela stessa.

La candela ha il profilo riportato in figura 2.

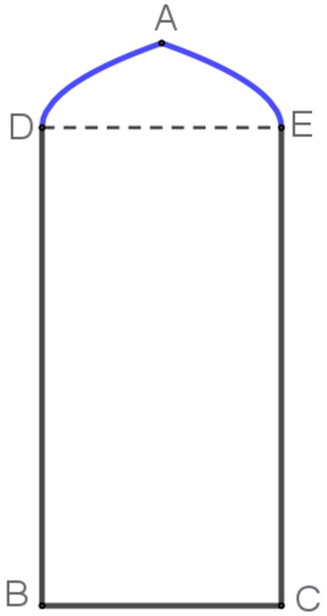


figura 2

Il volume della candela è dato dal volume del cilindro sommato al volume del solido di rotazione ottenuto facendo ruotare di un giro completo attorno all'asse *y*, la regione di piano compreso tra il grafico di $f(x)$, l'asse delle *x* e l'asse *y*. Si ottiene quindi:

$$V = V_1 + V_2$$

Si ha

$$V_1 = \pi 2^2 \cdot 8 = 32\pi$$

e

$$V_2 = \pi \int_0^{\sqrt{2}} g^2(y)dy$$

dove $g(y) = 2 - y^2$ è la funzione inversa di $f(x) = \sqrt{2-x}$, con $0 \le x \le a$. Pertanto si ha

$$V_2 = \pi \int_0^{\sqrt{2}} (2-y^2)^2 dy = \pi \int_0^{\sqrt{2}} (4 - 4y^2 + y^4)dy = \pi \left[4y - \frac{4}{3}y^3 + \frac{1}{5}y^5\right]_0^{\sqrt{2}} =$$

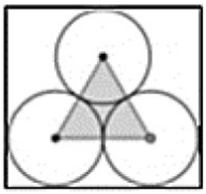
$$= \pi \left(4\sqrt{2} - \frac{4}{3}\left(\sqrt{2}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\sqrt{2}\right)^5\right) = \pi \left(4\sqrt{2} - \frac{8}{3}\sqrt{2} + \frac{4\sqrt{2}}{5}\right) = \frac{32\pi\sqrt{2}}{15}.$$

In definitiva si ottiene:

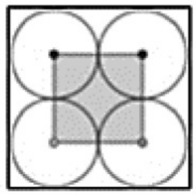
$$V = V_1 + V_2 = 32\pi + \frac{32\pi\sqrt{2}}{15} = 32\pi\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{15}\right) = 32\pi\left(\frac{15+\sqrt{2}}{15}\right).$$

Punto 4)

Il produttore deve inscatolare le candele in confezioni da 3 e da 4 candele, posizionando le candele in verticale, con le basi circolari disposte in modo da occupare il minor spazio possibile. Si prevedono due possibili configurazioni per posizionare le basi circolari delle candele all'interno delle scatole, rappresentate in figura 3:



Configurazione 1



Configurazione 2

4) Fornisci una valutazione numerica dell'efficienza dei due confezionamenti, calcolando il rapporto tra area occupata dalle basi circolari delle candele inserite nella scatola e area disponibile in ciascuna delle due configurazioni. Tale rapporto deve essere espresso in percentuale. Ai fini del calcolo, considera che le celle poligonali evidenziate in grigio sono rispettivamente un triangolo equilatero e un quadrato.

Nella prima configurazione dell'impacchettamento, si ha la seguente figura 3:

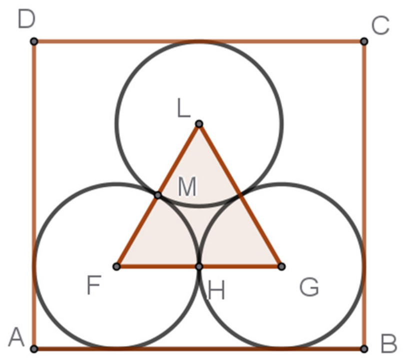


figura 3

In questa configurazione si ha $AB = 8$ e

$$BC = 2 + 2 + 2\sqrt{3} = 2(2 + \sqrt{3}).$$

L'area del rettangolo di base della scatola (parallelepipedo rettangolo) è pertanto

$$S_1 = 8 \cdot 2(2 + \sqrt{3}) = 16(2 + \sqrt{3}).$$

L'efficienza del primo impacchettamento (con 3 candele) sarà pertanto

$$ef_1 = \frac{12\pi}{16(2 + \sqrt{3})} = \frac{3\pi}{4(2 + \sqrt{3})} \approx 63{,}13\%.$$

Nella configurazione del secondo tipo di impacchettamento, si ha la seguente figura:

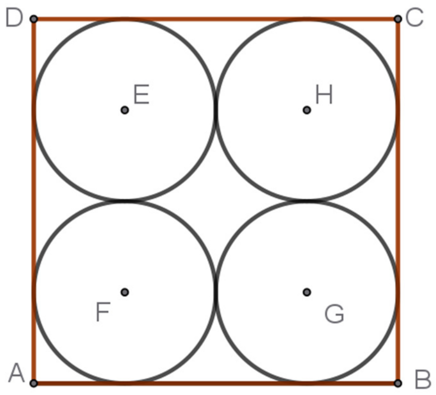


figura 4

In questa configurazione si ha $AB = 8$ e l'area del quadrato a base della scatola (parallelepipedo rettangolo) è pertanto

$$S_2 = 8^2 = 64.$$

L'efficienza del secondo impacchettamento (con 4 candele) sarà pertanto

$$ef_2 = \frac{16\pi}{64} = \frac{\pi}{4} \approx 78{,}54\%.$$

Il secondo tipo di impacchettamento è ovviamente più conveniente.

Argomento prevalente: analisi matematica; volume di un solido di rotazione. Problema "contestualizzato" (anche se è poco credibile che nella produzione di candele "light tea" si facciano questi calcoli…).

Tabella di analisi/commento del problema

Livello di difficoltà stimato	☐ Basso	☐ Medio	☒ Medio/Alto	☐ Molto alto	
Formulazione del problema	☐ Scorretta	☐ Ambigua	☒ Poco chiara	☒ Corretta	☐ Molto chiara
Si tratta di un problema contestualizzato	☐ No	☐ Parzialmente	☒ In modo accettabile	☐ Ben contestualizzato	
L'argomento è presente nelle Indicazioni Nazionali	☒ Sì	☐ No	☐ Non è esplicitato / Non è chiaro		
Di solito, viene svolto nella pratica didattica usuale?	☒ Sì	☐ No	☐ Non sempre		
È un argomento presente nei libri di testo?	☐ No	☐ Non sempre	☒ Sempre		
Verifica conoscenze / abilità/ competenze fondamentali?	☒ Sì	☐ Solo parzialmente	☐ No		
Per la risoluzione del problema era utile una calcolatrice grafica?	☒ Sì	☐ No	☐ Parzialmente		