**Esame di Stato – sessione straordinaria - seconda prova scritta - Liceo scientifico (tutti gli indirizzi) - Prova scritta di Matematica – 20 settembre 2018**

**PROBLEMA 2 – soluzione di L. Tomasi**

Consideriamo la funzione $f : \Re \rightarrow \Re$, così definita:

$$f(x) = \ln(a \cdot e^{bx} + c)$$

al variare di $a, b, c$ parametri reali positivi.

1) Verifica che, comunque si scelgano i parametri, si ha:

$$f'(x) > 0 \ \ \forall x \in \Re, \ \ f''(x) > 0 \ \ \forall x \in \Re.$$

2) Verifica inoltre che, comunque si scelgano i parametri, la funzione $f$ ha un asintoto orizzontale, per $x \rightarrow -\infty$, e un asintoto obliquo, per $x \rightarrow +\infty$; determina $a, b, c$ in modo che l'asintoto orizzontale, per $x \rightarrow -\infty$, sia la retta di equazione $y = 0$ e l'asintoto obliquo, per $x \rightarrow +\infty$, sia la retta di equazione $y = x$.

3) Dimostra che ponendo $a = b = c = 1$ si ha:

$$x < f(x) < e^x \ \forall x \in \Re.$$

4) Verifica inoltre che ponendo $a = b = c = 1$ e detta $A$ l'area della parte di piano compresa tra il grafico della funzione $h(x) = f(-|x|)$ e l'asse $x$ del riferimento cartesiano, si ha

$$A < 2$$

Inoltre, a partire dalle caratteristiche del grafico della funzione $h(x)$, determina un numero reale $S$, quanto più grande possibile, tale che

$$A > S.$$

**Soluzione**

Consideriamo la funzione $f : \Re \rightarrow \Re$, così definita:

$$f(x) = \ln(a \cdot e^{bx} + c)$$

al variare di $a, b, c$ parametri reali positivi.

La funzione assegnata, $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, è definita come segue:

$$f(x) = \ln(a \cdot e^{bx} + c)$$

al variare di $a, b, c$, parametri reali positivi.

La funzione data ha come dominio $\mathbb{R}$ perché, in base alle ipotesi sui parametri, $a \cdot e^{bx} + c > 0$ per ogni $x$ reale.

**Punto 1)**

1) Verifica che, comunque si scelgano i parametri, si ha:

$$f'(x) > 0 \ \ \forall x \in \Re, \ \ f''(x) > 0 \ \ \forall x \in \Re .$$

Calcoliamo la derivata prima della funzione. Si ha:

$$f'^{(x)} = \frac{ab\ e^{bx}}{a \cdot e^{bx} + c}.$$

In base alle ipotesi sulla positività dei parametri, $f'(x)$ è sempre positiva. Ne segue che la funzione $f(x)$ è crescente (in senso stretto) in tutto il dominio.

La derivata seconda è:

$$f''(x) = \frac{ab^2 e^{bx}\ (a \cdot e^{bx} + c) - (ab\ e^{bx})^2}{(a \cdot e^{bx} + c)^2}$$

ossia

$$f''(x) = \frac{ab^2 (ae^{2bx} + ce^{bx} - ae^{2bx})}{(a \cdot e^{bx} + c)^2}$$

e in conclusione:

$$f''(x) = \frac{ab^2 c\ e^{bx}}{(a \cdot e^{bx} + c)^2},$$

che, in base alle ipotesi sui parametri, è positiva per ogni $x \in \mathbb{R}$. Quindi la funzione $f(x)$ è convessa nel suo dominio, qualunque siano i parametri positivi $a, b, c$.

**Punto 2)**

2) Verifica inoltre che, comunque si scelgano i parametri, la funzione $f$ ha un asintoto orizzontale, per $x \to -\infty$, e un asintoto obliquo, per $x \to +\infty$; determina $a,b,c$ in modo che l'asintoto orizzontale, per $x \to -\infty$, sia la retta di equazione $y = 0$ e l'asintoto obliquo, per $x \to +\infty$, sia la retta di equazione $y = x$ .

Essendo per ipotesi $b > 0$, si ha $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{bx} = 0$; pertanto la retta di equazione $y = \ln c$ è asintoto orizzontale a sinistra per il grafico della funzione.

Si ha inoltre

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

Esiste quindi la condizione necessaria, ma non sufficiente, per l'esistenza di un asintoto obliquo.

Calcoliamo pertanto

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(a\cdot e^{bx}+c)}{x},$$

che si presenta nella forma indeterminata $\frac{\infty}{\infty}$. Applicando la seconda regola di de l'Hôpital, per due volte, si ha

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(a\cdot e^{bx}+c)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{ab\,e^{bx}}{a\cdot e^{bx}+c}}{1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{ab^2e^{bx}}{ab\,e^{bx}}=b$$

che per ipotesi è un numero positivo; pertanto possiamo porre $m=b$.
Calcoliamo ora il

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-mx)=\lim_{x\to+\infty}(\ln(a\cdot e^{bx}+c)-bx)$$

che si presenta nella forma indeterminata $+\infty-\infty$. Possiamo scrivere questo limite in un altro modo:

$$\lim_{x\to+\infty}(\ln(a\cdot e^{bx}+c)-\ln e^{bx})=\lim_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{a\cdot e^{bx}+c}{e^{bx}}\right).$$

Calcoliamo ora il limite ausiliario (che si presenta nella forma indeterminata $\frac{\infty}{\infty}$):

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{a\cdot e^{bx}+c}{e^{bx}}.$$

Applicando la seconda regola di de l'Hôpital, otteniamo:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{a\cdot e^{bx}+c}{e^{bx}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{ab\cdot e^{bx}}{be^{bx}}=a.$$

Pertanto si ha:

$$\lim_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{a\cdot e^{bx}+c}{e^{bx}}\right)=\ln a.$$

Quindi possiamo porre $q=\ln a$ e la retta di equazione $y=bx+\ln a$ è l'asintoto obliquo a destra per tutte le funzioni (figura 1).

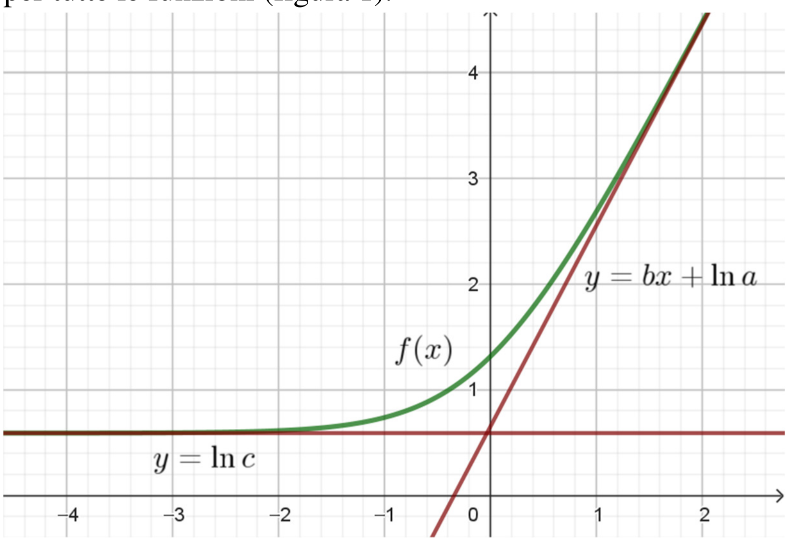


figura 1

Se ora l'asintoto orizzontale deve avere equazione $y = 0$ e l'asintoto obliquo destro $y = x + 1$, ne segue $a = b = c = 1$. Infatti
deve essere

$$\begin{cases} b = 1 \\ \ln a = 1 \\ \ln c = 1 \end{cases}$$

Si ottiene pertanto la funzione

$$y = \ln(e^x + 1)$$

che ha il grafico riportato in figura 2.

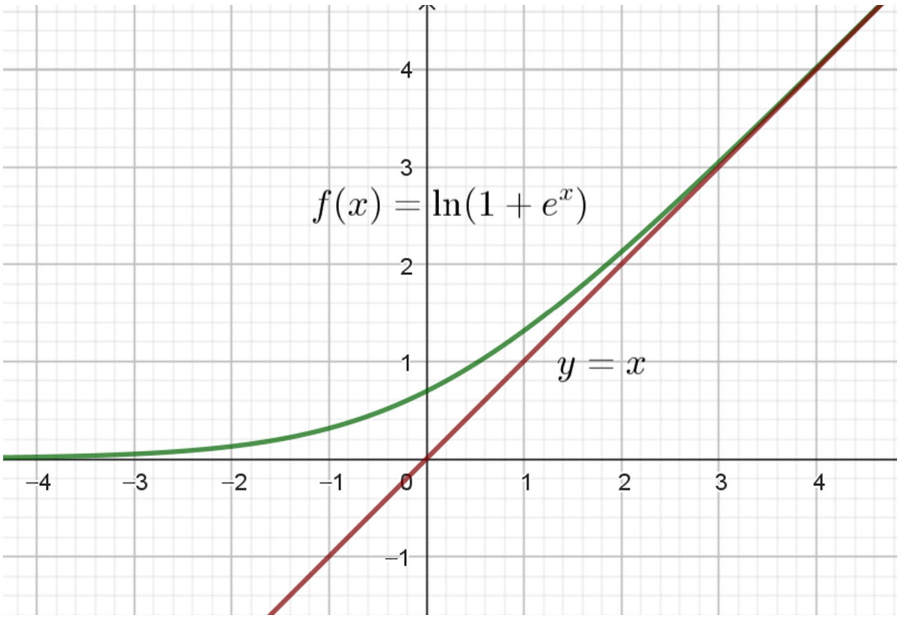


figura 2

**Punto 3)**

3) Dimostra che ponendo $a = b = c = 1$ si ha:

$$x < f(x) < e^x \; \forall x \in \Re.$$

La disuguaglianza

$$x < f(x)$$

è facile da dimostrare. Infatti si ha

$$e^x < e^x + 1\,.$$

Applicando la funzione logaritmo naturale (funzione crescente), si ha

$$\ln(e^x) < \ln(e^x + 1)$$

ossia

$$x < \ln\,(e^x + 1)$$

per ogni *x* reale.
Per dimostrare che si ha anche

$$f(x) < e^x$$

ossia

$$\ln(1 + e^x) < e^x$$

poniamo $t = e^x > 0$. Dobbiamo dimostrare che

$$\ln(1 + t) < t$$

che possiamo risolvere graficamente

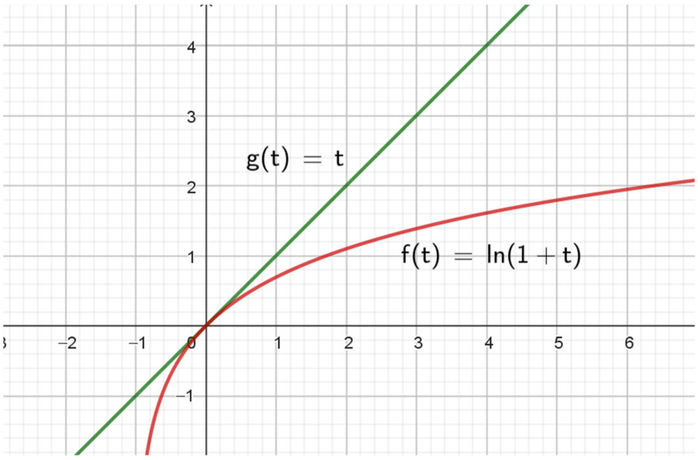


figura 3

Dal grafico osserviamo che se $t > 0$, allora

$$\ln(1+t) < t$$

perché la funzione $f(x)$ è concava per ogni $t$ ed è tangente alla retta $y = t$ in $t = 0$.
Ne segue quindi

$$\ln(1+e^x) < e^x$$

per ogni $x$ reale.

**Punto 4)**

4) Verifica inoltre che ponendo $a = b = c = 1$ e detta $A$ l'area della parte di piano compresa tra il grafico della funzione $h(x) = f(-|x|)$ e l'asse $x$ del riferimento cartesiano, si ha

$$A < 2$$

Inoltre, a partire dalle caratteristiche del grafico della funzione $h(x)$, determina un numero reale $S$, quanto più grande possibile, tale che

$$A > S$$

Osservazione. L'ultima richiesta non è formulata in modo corretto perché non esiste "un numero reale $S$, "quanto più grande possibile", tale che $A > S$. Inoltre nel testo c'è l'imprecisione di chiamare "area" il *limite* di un'area tra il grafico della funzione e l'asse delle $x$.

La funzione $h(x)$ è definita nel seguente modo:

$$h(x) = f(-|x|) = \ln\left(1 + e^{-|x|}\right) = \begin{cases} \ln(1+e^{-x}) & \text{per } x \geq 0 \\ \ln(1+e^{x}) & \text{per } x < 0 \end{cases}$$

è definita su $\mathbb{R}$, pari, avente per asintoto orizzontale l'asse delle $x$. La derivata prima è la seguente

$$h'(x) = \begin{cases} \dfrac{-e^{-x}}{1+e^{-x}} & per\ x \geq 0 \\ \dfrac{e^{x}}{1+e^{x}} & per\ x < 0 \end{cases}$$

Si ha

$$h'_+(0) = -\frac{1}{2}$$

e

$$\lim_{x \to 0^-} h'(x) = \frac{1}{2}.$$

Quindi il punto $x = 0$ è un punto angoloso.

La funzione ha il suo massimo assoluto nel punto angoloso, ossia per $x = 0$, e vale $h(0) = \ln 2$.

La derivata seconda è

$$h''(x) = \begin{cases} \frac{e^x}{(1+e^x)^2} & per\ x \geq 0 \\ \frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2} & per\ x < 0 \end{cases}$$

La funzione è quindi convessa nel dominio, tranne nel punto $x = 0$.

Il grafico della funzione $h(x) = \ln\left(1 + e^{-|x|}\right)$ è riportato in figura 4.

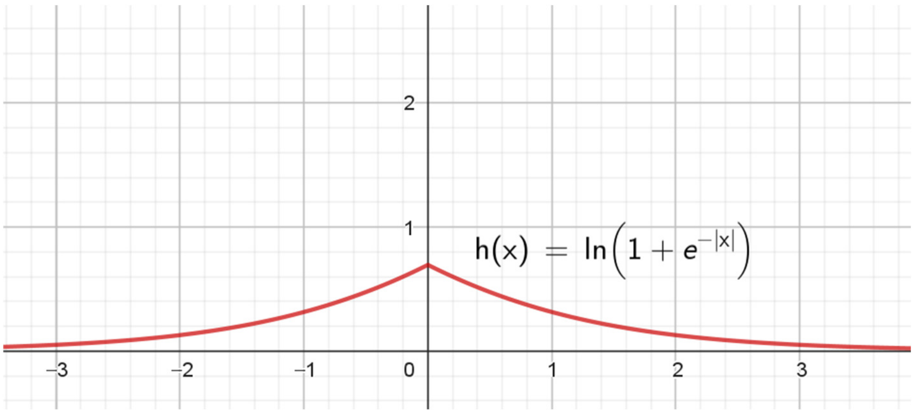

figura 4

L'area $A$, ammesso che l'integrale integrale improprio sia convergente, è data da

$$A = 2\int_{-\infty}^{0} h(x)dx = 2\int_{-\infty}^{0} \ln(1+e^x)\, dx.$$

Questo integrale improprio non si riesce a fare con i metodi elementari (scomposizione, sostituzione, per parti).

Dimostriamo però che è convergente.

Ovviamente questo integrale è positivo.

Nel punto 3) precedente abbiamo dimostrato che

$$\ln(1+e^x) < e^x$$

Quindi:

$$\int_{-\infty}^{0} h(x)dx < \int_{-\infty}^{0} e^x dx$$

e anche

$$2\int_{-\infty}^{0} h(x)dx < 2\int_{-\infty}^{0} e^x dx$$

Poiché

$$\int_{-\infty}^{0} e^x dx = 1,$$

ne segue che

$$2\int_{-\infty}^{0} h(x)dx < 2.$$

Pertanto, l'integrale improprio

$$\int_{-\infty}^{0} h(x)dx$$

è convergente e quindi possiamo affermare che:

$$A < 2.$$

Dimostriamo che

$$\int_{-\infty}^{0} e^x dx = 1.$$

Si ha, con $a \le 0$:

$$\int_{-\infty}^{0} e^x dx = \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{0} e^x dx = \lim_{a\to-\infty}[e^x]_a^0 = \lim_{a\to-\infty}(1-e^a) = 1.$$

[Nonostante la richiesta sia formulata in modo scorretto] Possiamo trovare un numero reale positivo $S$ tale che $A > S$.

Un numero $S$ è l'area del triangolo isoscele $PBC$ formato dalle rette tangenti nel punto angoloso con l'asse delle $x$ (figura 5).

L'area del triangolo $PBC$ è

$$S = 2(\ln 2)^2$$

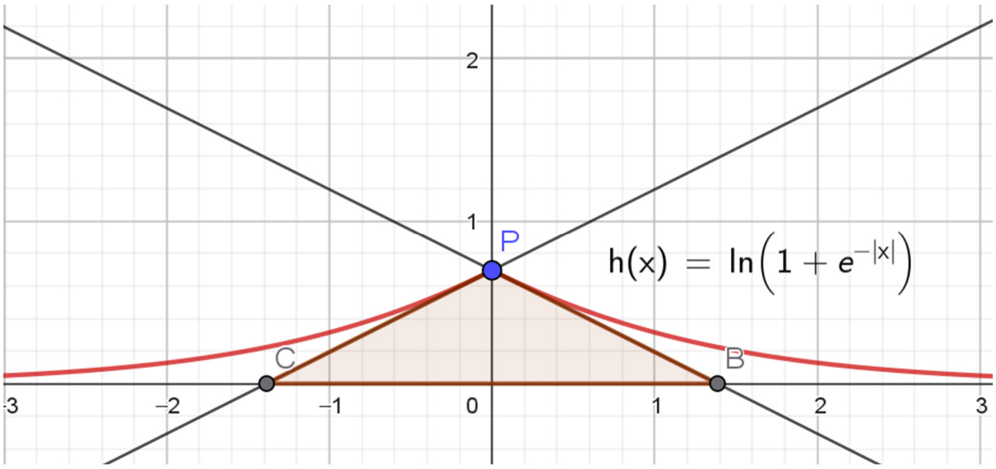


figura 5

Pertanto

$$2(\ln 2)^2 < A < 2.$$

Questa approssimazione si può migliorare dal basso osservando che

$$(\ln 2)e^x \leq \ln(1+e^x) \qquad per\ x \leq 0$$

Pertanto si ha:

$$2 \cdot \ln 2 < A < 2.$$

$$\ln 4 < A < 2.$$

$$1{,}386\ldots < A < 2.$$

Con un metodo numerico (vedi figura 6) si trova che

$$A = 2\int_{-\infty}^{0} h(x)dx \approx 1{,}6493\ldots$$

figura 6

Argomenti prevalenti: analisi matematica; studio di funzioni parametriche, calcolo integrale; integrali impropri.

**Tabella di analisi/commento del problema**

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Livello di difficoltà stimato | ☐ Basso | ☐ Medio | ☐ Alto | ☒ Molto alto (punto 4) | |
| Formulazione del problema | ☒ Scorretta | ☐ Ambigua | ☐ Poco chiara | ☐Corretta | ☐ Molto chiara |
| Si tratta di un problema contestualizzato | ☒ No | ☐ Parzialmente | ☐ In modo accettabile | ☐ Ben contestualizzato | |
| L'argomento è presente nelle Indicazioni Nazionali | ☒ Sì | ☐ No | | ☐ Non è esplicitato / Non è chiaro | |
| Di solito, viene svolto nella pratica didattica usuale? | ☒ Sì | ☐ No | | ☐ Non sempre | |
| È un argomento presente nei libri di testo di Matematica? | ☐ No | ☐ Non sempre | | ☒ Sempre | |
| Verifica conoscenze / abilità/ competenze fondamentali? | ☒ Sì | ☐ Solo parzialmente | | ☐ No | |
| Per la risoluzione del problema è utile una calcolatrice grafica? | ☒ Sì | ☐ No | | ☐ Parzialmente | |