Esame di Stato – sessione suppletiva - seconda prova scritta - Liceo scientifico (tutti gli indirizzi) - Prova scritta di Matematica – 5 luglio 2018

PROBLEMA 1 – soluzione di L. Tomasi

Un artigiano deve realizzare una cornice in cui inscrivere uno specchio di forma circolare. A partire da una tavola quadrata di lato 3π decimetri (approssimato alla seconda cifra decimale), adoperando una macchina a controllo numerico (*CNC*), incide su ciascun lato una decorazione che rappresenta una porzione di curva goniometrica come si vede in figura 1.

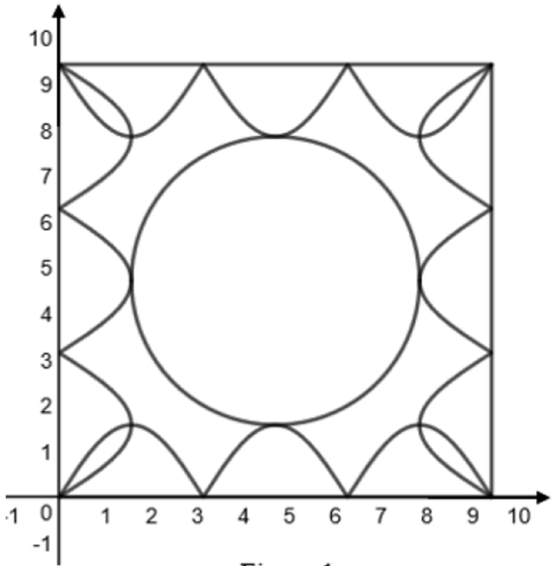

Figura 1

La macchina traccia sul lato giacente sull'asse delle ascisse la curva descritta dalla funzione $y = k|sen(x)|$ con $x \in [0,3\pi]$ e k parametro reale positivo. La cornice viene ruotata per realizzare la decorazione su ciascun lato. (La precisione della macchina è di $10^{-4}\,m$, quindi al di sopra della precisione richiesta dalle misure della cornice).

1. Per ottenere la decorazione, occorre che le curve su due lati consecutivi si intersechino nel loro punto di massimo più vicino al vertice della cornice. Verifica che tale richiesta è soddisfatta per $k = \frac{\pi}{2}$. La decorazione presenta delle "*foglie*" (colorate in grigio in figura 2) in corrispondenza dei quattro vertici. L'artigiano vuole rivestire queste quattro regioni con una polvere ceramica. Determina l'area, espressa in dm^2, della superficie da ricoprire.

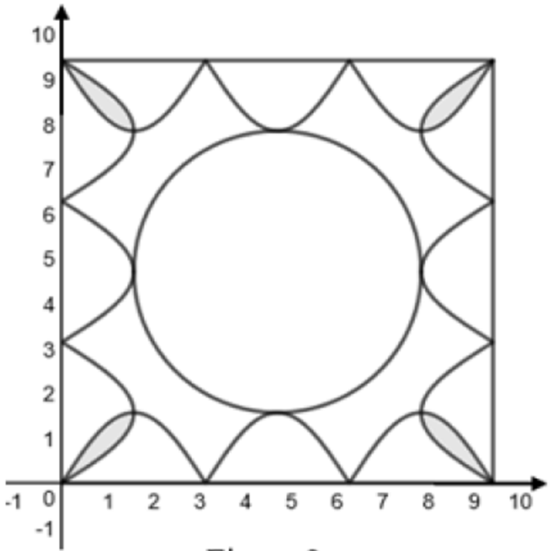

Figura 2

Volendo offrire ai clienti la possibilità di inserire nella cornice uno specchio di dimensioni maggiori, l'artigiano ne realizza un'altra con il lato delle stesse misure della precedente, ma con le quattro curve goniometriche che hanno in comune solo i vertici della cornice, così come in figura 3.

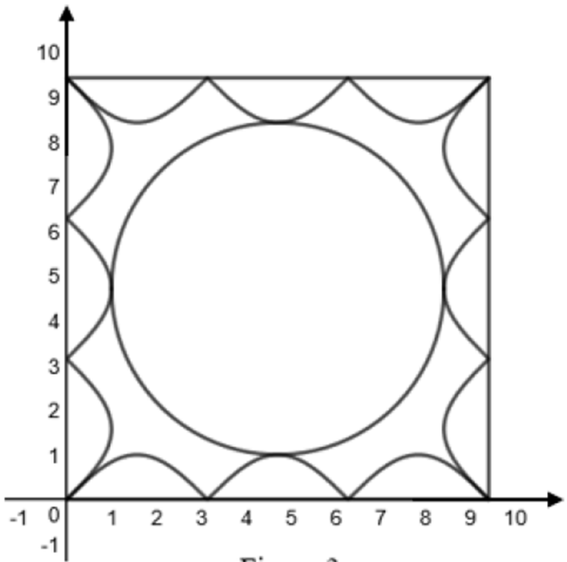

Figura 3

2. Verifica che per ottenere una decorazione di questo tipo occorre impostare nella macchina *CNC* un valore di k compreso tra 0 e 1 e che per $k=1$ due decorazioni consecutive sono tangenti nel vertice della cornice. Determina inoltre, in funzione di $k \in [0;1]$, l'area della parte di cornice compresa tra i lati e le quattro curve goniometriche, esprimendola in dm^2.
3. L'artigiano ha ovviamente l'esigenza di offrire la cornice a clienti che hanno specchi circolari di dimensioni diverse. Determina in funzione del parametro k l'area dello specchio tangente alle quattro curve goniometriche e stabilisci quindi l'area minima e massima possibile dello specchio.

Un cliente, per cui è stata realizzata una cornice con $k=1$, chiede che la regione compresa tra lo specchio e le quattro curve venga dipinta con una vernice di cui l'artigiano possiede un flacone da $125\ ml$.

4. Dal momento che con 1 litro di vernice è possibile coprire $6\,m^2$ di superficie, la quantità a disposizione è sufficiente per passare due mani di vernice? Per quale valore di k la quantità di vernice richiesta è massima?

Soluzione

Un artigiano deve realizzare una cornice in cui inscrivere uno specchio di forma circolare. A partire da una tavola quadrata di lato 3π decimetri (approssimato alla seconda cifra decimale), adoperando una macchina a controllo numerico (*CNC*), incide su ciascun lato una decorazione che rappresenta una porzione di curva goniometrica come si vede in figura 1.

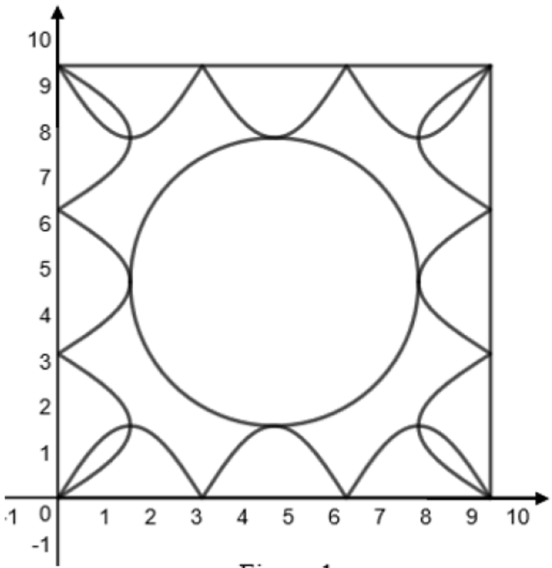

Figura 1

La macchina traccia sul lato giacente sull'asse delle ascisse la curva descritta dalla funzione $y = k|sen(x)|$ con $x \in [0,3\pi]$ e k parametro reale positivo. La cornice viene ruotata per realizzare la decorazione su ciascun lato. (La precisione della macchina è di $10^{-4} m$, quindi al di sopra della precisione richiesta dalle misure della cornice).

1. Per ottenere la decorazione, occorre che le curve su due lati consecutivi si intersechino nel loro punto di massimo più vicino al vertice della cornice. Verifica che tale richiesta è soddisfatta per $k = \frac{\pi}{2}$. La decorazione presenta delle "*foglie*" (colorate in grigio in figura 2) in corrispondenza dei quattro vertici. L'artigiano vuole rivestire queste quattro regioni con una polvere ceramica. Determina l'area, espressa in dm^2, della superficie da ricoprire.

Osservazione sul testo della prova. Le unità di misura non vanno scritte in corsivo, ma in tondo.

Affinché le curve su due lati consecutivi si intersechino nel loro punto di massimo più vicino al vertice della cornice, occorre che il punto di intersezione F abbia coordinate:

$$F\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

Posto $f(x) = k|\sin x|$, si deve porre

$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

Poiché nell'intervallo $0 \leq x < \pi$ la derivata prima è

$$f'(x) = k \cos x$$

si ha

$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

e

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = k \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$$

ossia

$$k = \frac{\pi}{2}.$$

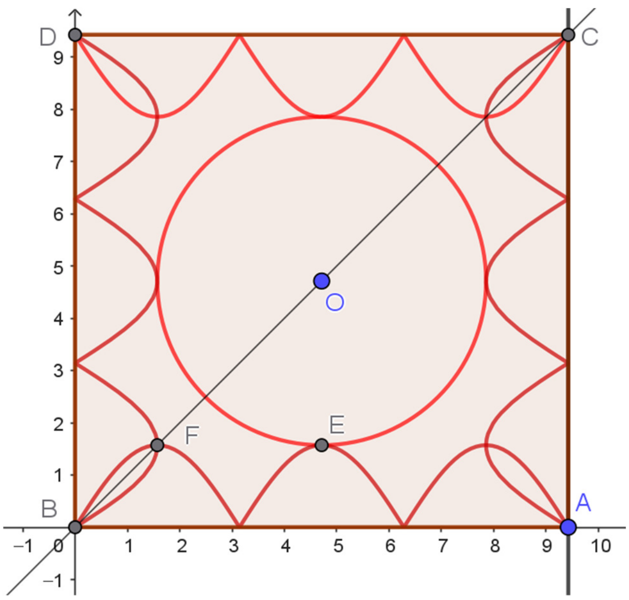

figura 1-soluzione

L'area di una delle quattro "foglie" è pertanto

$$S = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi}{2}\sin x - x\right) dx = 2\left[-\frac{\pi}{2}\cos x - \frac{1}{2}x^2\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 2\left(-\frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{3\pi}{4}.$$

Pertanto le quattro foglie hanno area complessiva $4S = 3\pi$ (in dm^2).

Punto 2)

Volendo offrire ai clienti la possibilità di inserire nella cornice uno specchio di dimensioni maggiori, l'artigiano ne realizza un'altra con il lato delle stesse misure della precedente, ma con le quattro curve goniometriche che hanno in comune solo i vertici della cornice, così come in figura 3.

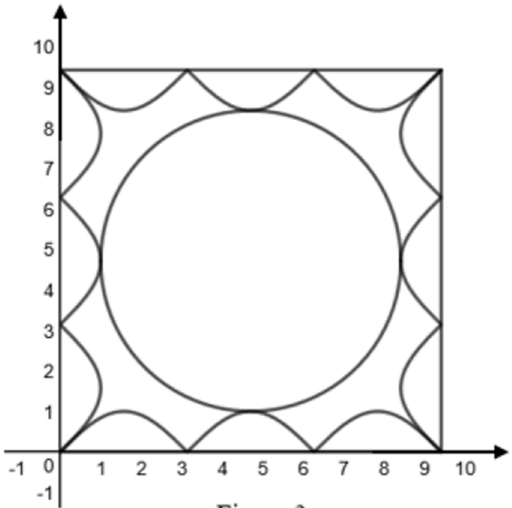

Figura 3

2. Verifica che per ottenere una decorazione di questo tipo occorre impostare nella macchina *CNC* un valore di k compreso tra 0 e 1 e che per $k = 1$ due decorazioni consecutive sono tangenti nel vertice della cornice. Determina inoltre, in funzione di $k \in [0;1]$, l'area della parte di cornice compresa tra i lati e le quattro curve goniometriche, esprimendola in dm^2.

Affinché le decorazioni siano tangenti nel vertice della cornice, occorre che

$$f'(0) = g'(0) = 1$$

dove $g(x)$ è la funzione inversa di $f(x) = k\sin x$ con $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$, ossia:

$$g(x) = \arcsin\left(\frac{x}{k}\right)$$

Poiché $f'(x) = k\cos x$, si ha

$$f'(0) = k\cos 0 = k$$

e quindi $k = 1$.

D'altronde

$$g(x) = \arcsin\left(\frac{x}{k}\right)$$

$$g'(x) = \frac{1}{k\sqrt{1-\left(\frac{x}{k}\right)^2}} \quad con\ 0 \le x < k$$

$$g'(0) = \frac{1}{k} = 1$$

e si ritrova $k = 1$ (figura 3).

L'area della parte di cornice compresa tra i lati e le 4 curve goniometriche è

$$S(k) = 4 \cdot 3 \cdot \int_0^{\pi} k \sin x \, dx = 4 \cdot 3 \cdot k \cdot \int_0^{\pi} \sin x \, dx = 12k \cdot 2 = 24k.$$

Infatti si ha:

$$\int_0^{\pi} \sin x \, dx = [-\cos x]_0^{\pi} = -\cos\pi - (-\cos 0) = 2.$$

Punto 3)

3. L'artigiano ha ovviamente l'esigenza di offrire la cornice a clienti che hanno specchi circolari di dimensioni diverse. Determina in funzione del parametro k l'area dello specchio tangente alle quattro curve goniometriche e stabilisci quindi l'area minima e massima possibile dello specchio.

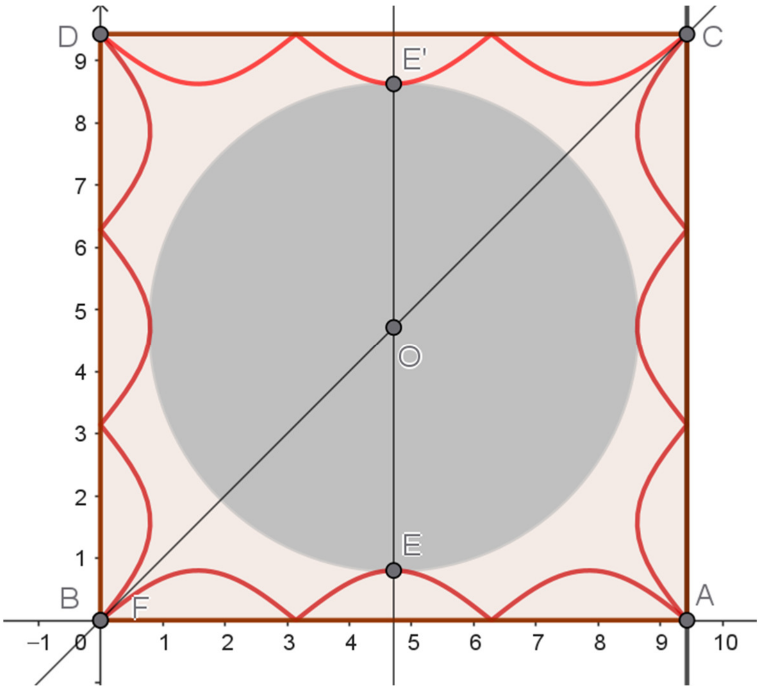

figura 2-soluzione

Calcoliamo il raggio dello specchio (figura 2-soluzione):

$$r(k) = OE = \frac{1}{2}\left(3\pi - 2k\left|\sin\left(\frac{3}{2}\pi\right)\right|\right) = \frac{1}{2}(3\pi - 2k) = \frac{3}{2}\pi - k \qquad con\ 0 \le k \le 1$$

Quindi l'area dello specchio è

$$A(k) = \pi\left(\frac{3}{2}\pi - k\right)^2$$

L'area massima dello specchio è

$$A_{max} = A(0) = \frac{9}{4}\pi^3$$

e l'area minima è

$$A(1) = \pi\left(\frac{3}{2}\pi - 1\right)^2.$$

Parte 4)

Un cliente, per cui è stata realizzata una cornice con $k = 1$, chiede che la regione compresa tra lo specchio e le quattro curve venga dipinta con una vernice di cui l'artigiano possiede un flacone da $125\ ml$.

4. Dal momento che con 1 litro di vernice è possibile coprire $6\ m^2$ di superficie, la quantità a disposizione è sufficiente per passare due mani di vernice? Per quale valore di k la quantità di vernice richiesta è massima?

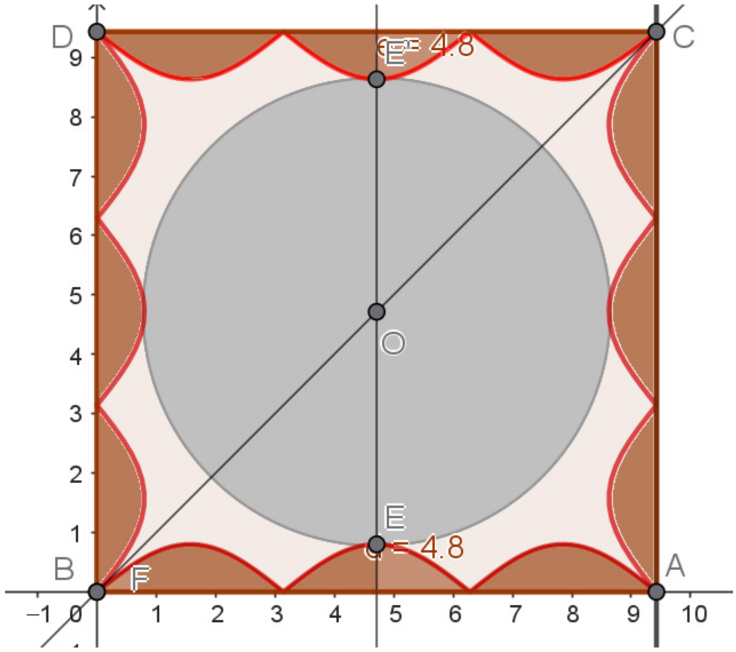

figura 3 - soluzione

L'area della superficie compresa tra le quattro curve e lo specchio (figura 3-soluzione) è

$$S(k) = Area(quadrato) - Area(delle\ 4\ regioni) - Area\ (specchio).$$

$$S(k) = 9\pi^2 - 4\cdot 3\cdot\int_0^{\pi} k\sin x\,dx - \pi\left(\frac{3}{2}\pi - k\right)^2 = 9\pi^2 - 24k - \pi\left(\frac{3}{2}\pi - k\right)^2.$$

Per $k = 1$ si ottiene

$$S(1) = 9\pi^2 - 24 - \pi\left(\frac{3}{2}\pi - 1\right)^2\ \ \mathrm{dm}^2 \approx 0{,}215\ \mathrm{m}^2.$$

Per due passate di verniciatura serve la seguente quantità di vernice

$$Q = 2\cdot 0{,}215\ \mathrm{m}^2\cdot\frac{1\ \ \mathrm{L}}{6\ \mathrm{m}^2} \approx 0{,}072\ \mathrm{L} = 72\ \mathrm{mL}$$

e quindi il flacone "basta e avanza" per fare due passate di verniciatura.

La quantità di vernice è massima quando è massima l'area:

$$S(k) = 9\pi^2 - 24k - \pi\left(\frac{3}{2}\pi - k\right)^2$$

con $0 \le k \le 1$.

Il grafico della funzione $S(k)$ è un arco di parabola. Il massimo si ha nel punto che è l'ascissa del vertice.

Il calcolo è più rapido eseguendo la derivata prima:

$$S'(k) = -24 + 2\pi\left(\frac{3}{2}\pi - k\right) = 0$$

$$S'(k) = -24 + 3\pi^2 - 2\pi k = 0$$

ossia, l'area è massima per

$$k = \frac{3\pi^2 - 24}{2\pi} = \frac{3}{2}\pi - \frac{12}{\pi} \approx 0{,}89\,.$$

Argomento. Analisi matematica. Funzioni trigonometriche. Integrale definito.

Tabella di analisi/commento del problema

Livello di difficoltà stimato	☐ Basso	☒ Medio	☐ Alto	☒ Molto alto	
Formulazione del problema	☐ Scorretta	☐ Ambigua	☒ Poco chiara in alcuni punti	☐Corretta	☐ Molto chiara
Si tratta di un problema contestualizzato	☐ No	☐ Parzialmente	☒ In modo accettabile	☐ Ben contestualizzato	
L'argomento è presente nelle Indicazioni Nazionali	☒ Sì	☐ No	☐ Non è esplicitato / Non è chiaro		
Di solito, viene svolto nella pratica didattica usuale?	☐ Sì	☐ No	☒ Non sempre		
È un argomento presente nei libri di testo di Matematica?	☐ No	☒ Non sempre	☒ Sì		
Verifica conoscenze / abilità/ competenze fondamentali?	☐ Sì	☒ Solo parzialmente	☐ No		
Per la risoluzione del problema è utile una calcolatrice grafica?	☒ Sì	☐ No	☐ Parzialmente		