Esame di Stato – sessione suppletiva - seconda prova scritta - Liceo scientifico (tutti gli indirizzi) - Prova scritta di Matematica – 5 luglio 2018

QUESITO 4 - soluzione di L. Tomasi

4. Verificare che $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(x)dx = \frac{n-1}{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-2}(x)dx$ per $n>1$ e usare questo risultato per calcolare $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4(x)dx$.

Soluzione

Calcoliamo prima il seguente integrale indefinito:

$$\int \cos^n x\, dx = \int (1-\sin^2 x)\cos^{n-2} x\, dx = \int \cos^{n-2} x\, dx + \int \sin x\,(-\sin x)\cos^{n-2} x\, dx. \qquad (*)$$

Calcoliamo ora, per parti, l’integrale

$$\int \sin x\,(-\sin x)\cos^{n-2} x\, dx.$$

Consideriamo $\sin x$ come “fattore finito” e $(-\sin x)\cos^{n-1} x\ \ dx$ come “fattore differenziale.

Si ha:

$$\int \sin x\,(-\sin x)\cos^{n-2} x\, dx = \sin x \cdot \frac{1}{n-1} \cdot \cos^{n-1} x + \frac{1}{n-1}\int \cos^n x\, dx.$$

Sostituendo nell’integrale (*), si ha:

$$\int \cos^n x\, dx = \int \cos^{n-2} x\, dx + \frac{1}{n-1}\sin x \cdot \cos^{n-1} x + \boxed{\frac{1}{n-1}\int \cos^n x\, dx}.$$

Portando nella prima parte l’integrale evidenziato, si ottiene:

$$\int \cos^n x\, dx + \boxed{\frac{1}{n-1}\int \cos^n x\, dx} = \int \cos^{n-2} x\, dx + \frac{1}{n-1}\sin x \cdot \cos^{n-1} x\ ,$$

ossia

$$\frac{n}{n-1}\int \cos^n x\, dx = \int \cos^{n-2} x\, dx + \frac{1}{n-1}\sin x \cdot \cos^{n-1} x\,.$$

Moltiplicando entrambi i membri per $\frac{n-1}{n}$, si ha infine:

$$\int \cos^n x\, dx = \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} x\, dx + \frac{1}{n}\sin x \cdot \cos^{n-1} x\,.$$

Ne segue che

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\, dx = \frac{n-1}{n} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-2} x\, dx + \left[\frac{1}{n}\sin x \cdot \cos^{n-1} x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}.$$

Ma

$$\left[\frac{1}{n}\sin x \cdot \cos^{n-1} x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 0;$$

pertanto otteniamo:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\, dx = \frac{n-1}{n} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-2} x\, dx$$

come si doveva trovare.

Possiamo ora utilizzare il risultato trovato per calcolare il seguente integrale:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 x\, dx = \frac{3}{4} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\, dx = \frac{3}{4} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right) dx =$$

$$= \frac{3}{8} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos 2x) dx = \frac{3}{8}\left[x + \frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3}{8}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{3}{16}\pi.$$

Argomento: integrali definiti per parti; integrali "araba fenice".

Tabella di analisi del quesito

Livello di difficoltà stimato	☐ Basso	☐ Medio	☒ Alto	☐ Molto alto	
Formulazione del quesito	☐ Scorretta	☐ Ambigua	☐ Poco chiara	☒ Corretta	☐ Molto chiara
L'argomento è presente nelle Indicazioni Nazionali	☒ Sì	☐ No		☐ Non è esplicitato / Non è chiaro	
Di solito, viene svolto nella pratica didattica usuale?	☒ Sì	☐ No		☐ Non sempre	
È un argomento presente nei libri di testo di Matematica?	☐ No	☐ Non sempre		☒ Sempre	
Verifica conoscenze / abilità/ competenze fondamentali?	☐ Sì	☐ Solo parzialmente		☒ No	
Per la risoluzione del quesito è utile una calcolatrice grafica?	☐ Sì	☒ No		☐ Parzialmente	