Esame di Stato – sessione straordinaria - seconda prova scritta - Liceo scientifico (tutti gli indirizzi) - Prova scritta di Matematica e Fisica – 20 settembre 2019

PROBLEMA 2 – soluzione di L. Tomasi

In un laboratorio di fisica, si vuole verificare sperimentalmente che un filo rettilineo percorso da corrente, immerso in un campo magnetico uniforme, è soggetto a una forza. A questo scopo, un filo di rame RS rettilineo, rigido, di lunghezza l, misurata in metri (m), di massa m, misurata in chilogrammi (Kg), viene appeso alle estremità di due fili conduttori. Tali fili, verticali e di massa trascurabile, sono liberi di ruotare, senza attrito, intorno a due ganci metallici, P e Q, posizionati alle altre estremità. Attraverso un interruttore, i ganci P e Q vengono collegati a un generatore di corrente continua e il filo di rame viene posto in un campo magnetico $\vec{B}$, uniforme e costante, perpendicolare al filo (fig. 1) e la cui intensità è misurata in tesla (T). Quando si chiude l'interruttore, il circuito è percorso da una corrente di intensità i, misurata in ampere (A) e il filo RS si sposta in una nuova posizione di equilibrio, in cui PR forma un angolo θ con la direzione verticale (fig. 2).

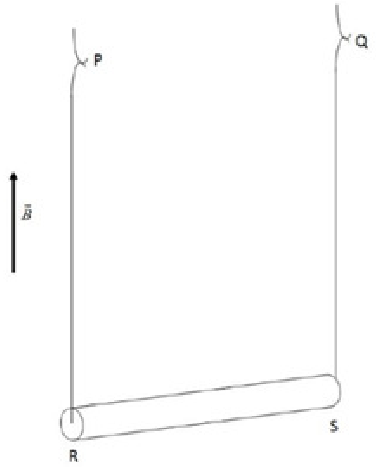

Fig.1

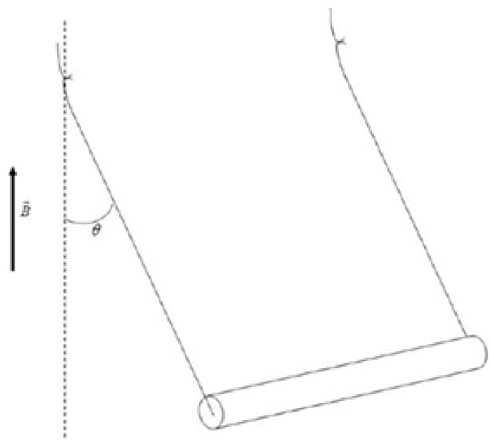

Fig.2

- Descrivere in direzione, verso e intensità, la forza con cui il campo $\vec{B}$ agisce sulla corrente che attraversa il tratto RS. Come varia la posizione di equilibrio del filo di rame al variare dell'intensità e del verso della corrente?

- Rappresentare tutte le forze agenti sul filo RS. Considerando costanti $\vec{B}$, la massa m e la lunghezza l del filo RS, verificare che l'ampiezza dell'angolo θ in funzione dell'intensità di corrente i è data da $\theta(i) = \arctan(\frac{Bl}{mg} \cdot i)$, in cui g è l'accelerazione di gravità

- Posto $\theta(x) = \arctan(kx)$, si considerino, in un sistema di riferimento cartesiano Oxy, le funzioni $y = \theta(x)$ e la sua inversa $y = \theta^{-1}(x)$. Determinare il valore di $k > 0$, affinché i grafici delle suddette funzioni siano tangenti nell'origine. Successivamente, determinare i valori di k in corrispondenza dei quali le rette tangenti ai grafici delle due funzioni formano un angolo di 30° nell'origine.

- Posto $k = 1$, determinare l'equazione della funzione $F(x)$, primitiva di $\theta(x)$ e passante per l'origine del sistema di riferimento. Tracciare il grafico della funzione $y = \theta(x)$ e da esso dedurre il grafico di $y = F(x)$.

Soluzione

Osservazione. In un testo d'esame è disdicevole vedere scritto il simbolo di kg con la "k" maiuscola (terza riga del testo del problema).

Indichiamo con delle lettere i vari punti del problema.

Punto a)

- Descrivere in direzione, verso e intensità, la forza con cui il campo $\vec{B}$ agisce sulla corrente che attraversa il tratto RS. Come varia la posizione di equilibrio del filo di rame al variare dell'intensità e del verso della corrente?

La forza che il campo magnetico esercita sul filo percorso dalla corrente di intensità i è data dalla legge (che possiamo attribuire a Faraday e Ampère):

$$\vec{F} = i\,\vec{l} \times \vec{B}$$

Fissato un sistema di riferimento *Oxyz* (con l'asse *y* perpendicolare al piano della figura) come in figura 1, la forza è diretta come l'asse *x* se la corrente va da *R* verso *S* ed ha il verso opposto all'asse *x* se la corrente va da *S* a *R*.

L'intensità della forza magnetica è

$$F = Bil \sin\alpha$$

dove l'angolo α è quello formato dal vettore $\vec{l}$ (che ha la stessa direzione del filo e verso uguale a quello convenzionale della corrente) con il vettore campo magnetico $\vec{B}$. Nel caso del problema proposto, l'angolo $\alpha = 90°$ e quindi l'intensità della forza magnetica è:

$$F = Bil.$$

Pertanto, all'aumentare dell'intensità della corrente, la forza aumenta e l'angolo θ aumenta. Se si cambia il verso della corrente, il filo si sposta verso sinistra di un angolo θ negativo (in verso orario), in una posizione simmetrica, rispetto all'asse *z*, del punto *R*.

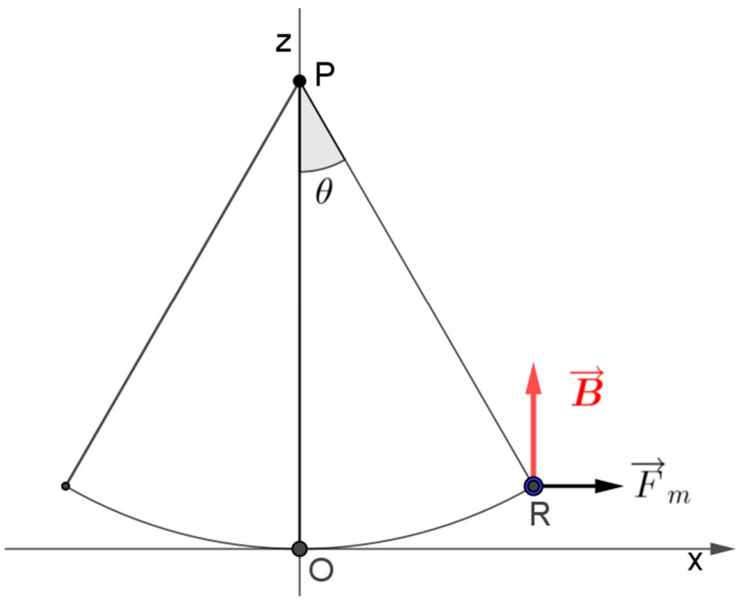

figura 1

Punto b)

- Rappresentare tutte le forze agenti sul filo RS. Considerando costanti $\vec{B}$, la massa m e la lunghezza l del filo RS, verificare che l'ampiezza dell'angolo θ in funzione dell'intensità di corrente i è data da $\theta(i) = \arctan(\frac{Bl}{mg} \cdot i)$, in cui g è l'accelerazione di gravità

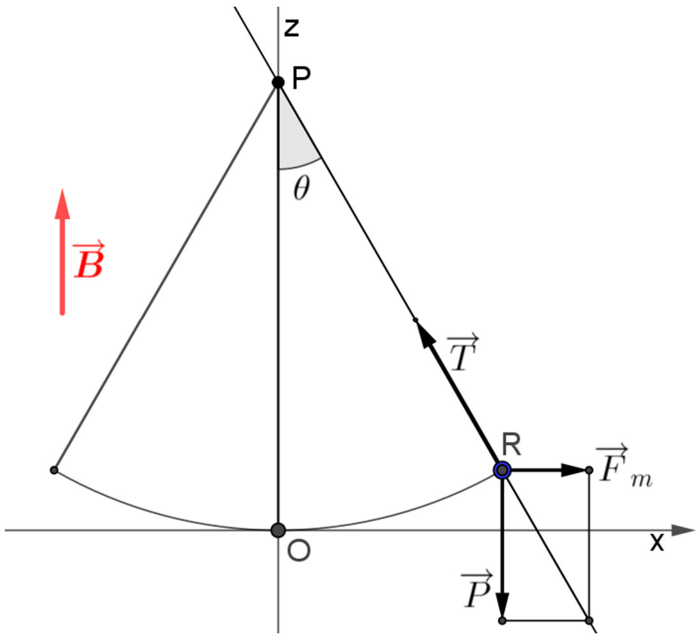

figura 2

Le forze che agiscono sul tratto di filo *RS* sono: la forza peso $\vec{P}$ (che ha la direzione dell'asse *z* e verso opposto all'asse *z*), la forza dovuta al campo magnetico $\vec{F}_m$ (che agisce quando scorre la corrente di intensità *i* nel filo) e la tensione del filo $\vec{T}$ (figura 2), applicate nel baricentro del filo. La tensione in realtà agisce sui fili *PR* e *QS*. Qui consideriamo la tensione risultante, Nella figura abbiamo supposto che la corrente sia entrante nella figura (con verso opposto a quello dell'asse *y* del riferimento *Oxyz* nello spazio). Pertanto la forza magnetica, per la "regola della mano destra", ha la direzione e il verso dell'asse *x*. Per l'equilibrio si ha:

$$\vec{T} = \vec{P} + \vec{F}_m \,.$$

Proiettando sugli assi coordinati *x* e *z* si ottiene:

$$\begin{cases} T \sin\theta = F_m \\ T \cos\theta = P \end{cases}$$

da cui, facendo il rapporto termine a termine, si ottiene

$$\tan\theta = \frac{F_m}{P}$$

ossia

$$\tan\theta = \frac{Bil}{mg}$$

e in definitiva:

$$\theta = \arctan\left(\frac{Bil}{mg}\right)$$

che si può scrivere

$$\theta(i) = \arctan\left(\frac{Bl}{mg}i\right)$$

mettendo in evidenza l'intensità della corrente, come unica variabile da considerare secondo il testo, come si doveva trovare.

Punto c)

- Posto $\theta(x) = \arctan(kx)$, si considerino, in un sistema di riferimento cartesiano Oxy, le funzioni $y = \theta(x)$ e la sua inversa $y = \theta^{-1}(x)$. Determinare il valore di $k > 0$, affinché i grafici delle suddette funzioni siano tangenti nell'origine. Successivamente, determinare i valori di k in corrispondenza dei quali le rette tangenti ai grafici delle due funzioni formano un angolo di 30° nell'origine.

Tracciamo il grafico della funzione $\theta(x) = \arctan(kx)$ con $k > 0$. Queste funzioni sono definite per ogni numero reale e sono dispari. Quindi l'origine è il centro di simmetria. Hanno per asintoto destro orizzontale la retta $y = \frac{\pi}{2}$ e per asintoto orizzontale sinistro, essendo dispari, $y = -\frac{\pi}{2}$ (figura 3).

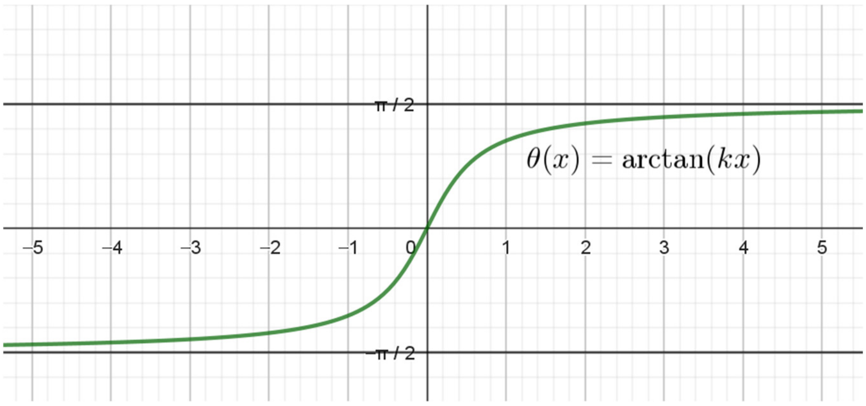

figura 3

Tracciamo il grafico della funzione $\theta(x) = \arctan(kx)$ con $k < 0$. Queste funzioni sono definite per ogni numero reale e sono dispari. Quindi l'origine è il centro di simmetria. Hanno per asintoto destro orizzontale la retta $y = -\frac{\pi}{2}$ e per asintoto orizzontale sinistro, essendo dispari, $y = \frac{\pi}{2}$ (figura 4).

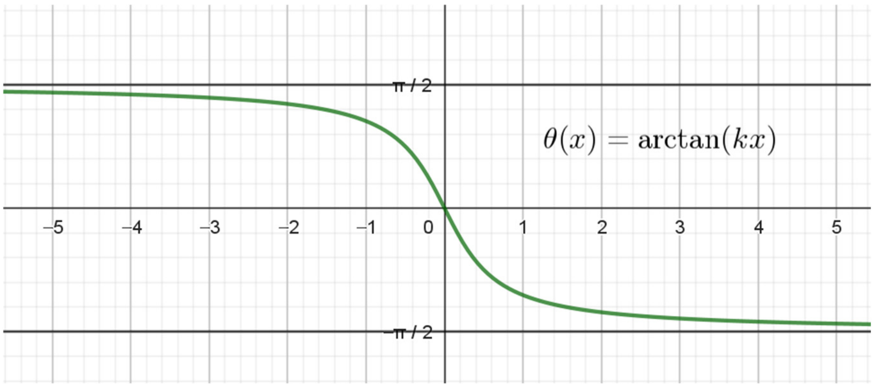

figura 4

La derivata prima è:

$$\theta'(x) = \frac{k}{1 + k^2x^2}$$

che è sempre positiva se $k > 0$ (e sempre negativa se $k < 0$).

Quindi la funzione $\theta(x)$ è crescente in senso stretto se $k > 0$ (e decrescente in senso stretto se $k < 0$).

Pertanto la funzione è invertibile per ogni $k \neq 0$.

Questa osservazione basta già per calcolare la derivata della funzione inversa nel punto $x = 0$, che per il teorema della derivata della funzione inversa, tenuto conto che $\theta(0) = 0$, sarà

$$(\theta^{-1})'(0) = \frac{1}{\theta'(0)} = \frac{1}{k}.$$

Per determinare la funzione inversa risolviamo rispetto alla variabile x la funzione

$$\theta = \arctan(kx)$$

Otteniamo

$$kx = \tan\theta$$

ossia

$$x = \frac{1}{k}\tan\theta$$

e scambiando le variabili, si ha ovviamente:

$$\theta^{-1}(x) = \frac{1}{k}\tan x \qquad \left(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\right)$$

il cui grafico (per $k > 0$) è quello indicato nella figura 5.

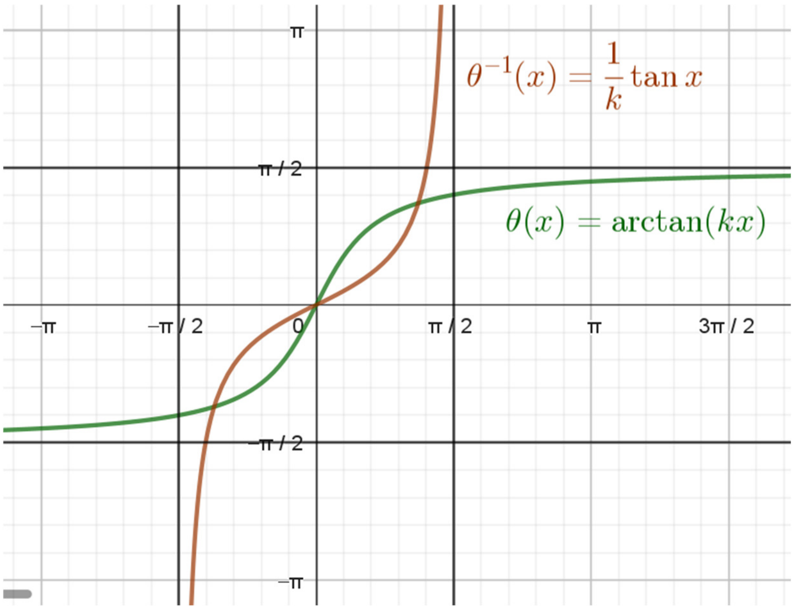

figura 5

Affinché i due grafici siano tangenti nell'origine, le due derivate calcolate per $x = 0$ devono essere uguali:

$$\theta'(x) = \frac{k}{1 + k^2x^2}$$

$$D(\theta^{-1}(x)) = \frac{1}{k}(1 + \tan^2 x)$$

Quindi si ottiene

$$k = \frac{1}{k}$$

da cui si ha $k^2 = 1$ e $k = \pm 1$. Poiché k deve essere positivo, si ha $k = 1$ e si ottiene semplicemente $\theta(x) = \arctan(x)$ e $\theta^{-1}(x) = \tan x$, quest'ultima con dominio $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ (grafici nella figura 6).

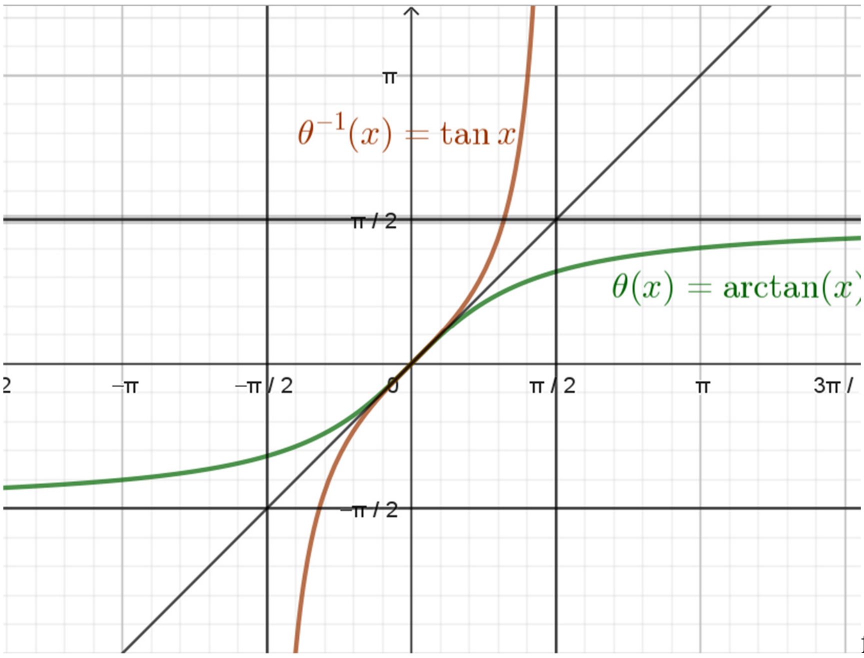

figura 6

Determiniamo infine i valori di k per cui le rette tangenti nell'origine formano un angolo di 30°.

Deve essere

$$\tan 30° = \frac{k - 1/k}{1 + k \cdot \frac{1}{k}}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{k^2 - 1}{2k}$$

$$3k^2 - 2\sqrt{3}k - 3 = 0$$

Calcoliamo il discriminante ridotto:

$$\frac{\Delta}{4} = 3 + 9 = 12.$$

Pertanto

$$k = \frac{\sqrt{3} \pm 2\sqrt{3}}{3}$$

ossia, $k = \sqrt{3}$ (figura 7) oppure $k = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ (figura 8) .

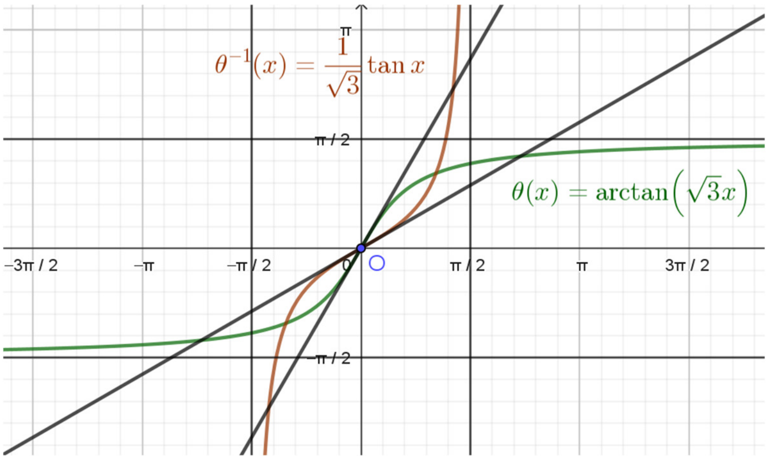

figura 7

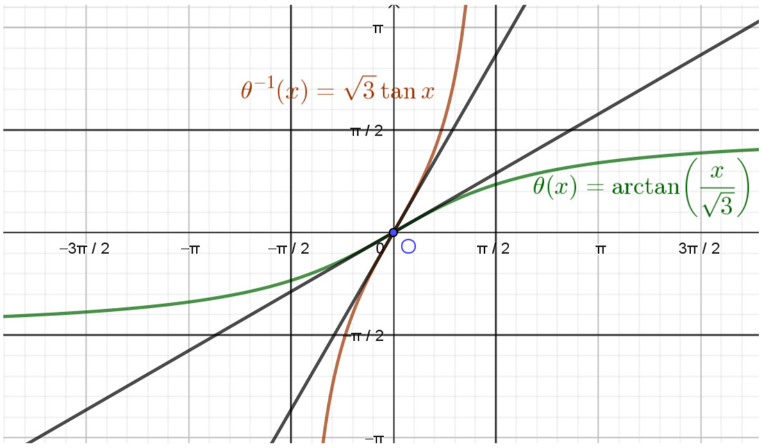

figura 8

Punto d)

▪ Posto $k = 1$, determinare l'equazione della funzione $F(x)$, primitiva di $\theta(x)$ e passante per l'origine del sistema di riferimento. Tracciare il grafico della funzione $y = \theta(x)$ e da esso dedurre il grafico di $y = F(x)$.

Data la funzione

$$\theta(x) = \arctan(x)$$

calcoliamo (integrazione per parti) una sua primitiva

$$F(x) = \int \arctan x \; dx = x \arctan x - \int x \frac{1}{1 + x^2} dx = x \arctan x - \frac{1}{2}\ln(1 + x^2) + c.$$

(Non occorre il valore assoluto dell'argomento del logaritmo perché $1 + x^2 > 0$ per ogni x).

Imponendo che $F(0) = 0$, si ottiene $c = 0$ e quindi:

$$F(x) = x \arctan x - \frac{1}{2}\ln(1 + x^2),$$

che è una funzione definita sui reali, pari. Si ha infatti:

$$F(-x) = -x \arctan(-x) - \frac{1}{2}\ln(1 + (-x)^2) = x \arctan x - \frac{1}{2}\ln(1 + x^2) = F(x)$$

di cui conosciamo la derivata prima (funzione dispari)

$$F'(x) = \arctan x$$

e anche la derivata seconda (funzione pari)

$$F''(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

Pertanto $F(x)$ ha un minimo relativo (e assoluto) per $x = 0$ (che vale 0) ed è una funzione convessa.

La funzione $F(x)$ non ha asintoti, anche se la sua derivata tende a $\frac{\pi}{2}$ per $x \to \pm\infty$. Si ha infatti

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{F(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} F'(x) = \frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{F(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} F'(x) = -\frac{\pi}{2}$$

ma

$$\lim_{x\to+\infty} (F(x) - mx) = \lim_{x\to+\infty} \left(F(x) - \frac{\pi}{2}x\right) = -\infty$$

I grafici di $F(x)$ e di $\theta(x)$ sono riportati in figura 9.

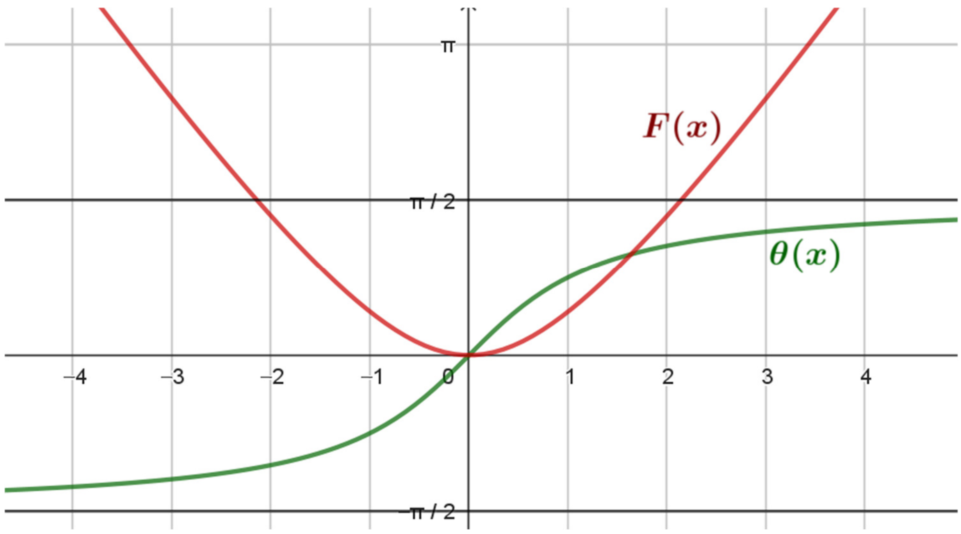

figura 9

Commento. Argomenti prevalenti: elettromagnetismo; forza magnetica che agisce su un filo percorso da corrente; analisi matematica; calcolo integrale. Il problema parte da un argomento di Fisica (elettromagnetismo) e arriva alla Matematica.

Il problema richiede alla/o studentessa/e una certa abilità di collegamento tra Fisica e Matematica.

Tabella di analisi/commento del problema

Livello di difficoltà stimato	☐ Basso	☐ Medio	☒ Alto	☐ Molto alto
Formulazione del problema	☐ Scorretta	☐ Ambigua	☐ Poco chiara	☒ Corretta ☐ Molto chiara
Si tratta di un problema contestualizzato	☐ No	☐ Parzialmente	☐ In modo accettabile	☒ Ben contestualizzato
L'argomento è presente nelle Indicazioni Nazionali	☒ Sì	☐ No		☐ Non è esplicitato / Non è chiaro
L'argomento è presente nel QdR di Matematica?	☒ Sì	☐ No		☐ Non è esplicitato / Non è chiaro
Di solito, viene svolto nella pratica didattica usuale?	☒ Sì	☐ No		☐ Non sempre
È un argomento presente nei libri di testo di Matematica?	☐ No	☐ Non sempre		☒ Sempre
Verifica conoscenze / abilità/ competenze fondamentali?	☒ Sì	☐ Solo parzialmente		☐ No
Per la risoluzione del problema è utile una calcolatrice grafica?	☒ Sì	☐ No		☐ Parzialmente