Esame di Stato – seconda prova scritta - Liceo scientifico (tutti gli indirizzi)
Prova scritta di Matematica - 20 giugno 2024

PROBLEMA 1 – soluzione a cura di L. Rossi, M. Ferrari e L. Tomasi

Si consideri $f_{a,b}(x) = \frac{ax^3+b}{x^2}$, con $a, b \in \mathbb{R}$.

a) Determinare i valori dei parametri in modo che la retta t, di equazione $7x + y - 12 = 0$, sia tangente al grafico di $f_{a,b}(x)$ nel suo punto P di ascissa $x = 1$.

Si ponga, d'ora in avanti, $a = 1$ e $b = 4$.

b) Studiare la funzione $f(x) = \frac{x^3+4}{x^2}$ e tracciarne il grafico γ. Scrivere l'equazione dell'ulteriore retta tangente alla curva γ passante per P.

c) Al variare del parametro reale m, determinare il numero di intersezioni tra la retta di equazione $y - 5 = m(x - 1)$ e la curva γ.

d) Sia $S(k)$, con $k > \frac{3}{2}$, l'area della regione finita di piano compresa tra la curva γ, il suo asintoto obliquo, la retta t e la retta di equazione $x = k$. Calcolare il $\lim_{k\to+\infty} S(k)$, fornendo un'interpretazione geometrica del risultato ottenuto.

Soluzione

Punto a)

Le funzioni date $f_{a,b}(x) = \frac{ax^3+b}{x^2}$ hanno tutte per dominio $\mathbb{R}_0$, ossia $x \neq 0$.
Il punto P di ascissa $x = 1$ della curva appartiene anche alla retta tangente *t* (di equazione $y = -7x + 12$) e quindi ha ordinata 5; le coordinate di P sono (1; 5).
Le due condizioni per determinare i valori dei parametri *a* e *b* sono rappresentate dal passaggio del grafico della funzione per il punto *P*:

$$5 = a + b$$

e che la derivata della funzione calcolata nel punto *P* sia uguale al coefficiente angolare della retta tangente in *P*. Calcoliamo la derivata prima della funzione data:

$$f'(x) = \frac{ax^4 - 2bx}{x^4} = \frac{ax^3 - 2b}{x^3} = a - \frac{2b}{x^3}.$$

Poiché $f'_{a,b}(1) = -7$, si ottiene:

$$a - 2b = -7\,.$$

Dal sistema di queste due condizioni

$$\begin{cases} a + b = 5 \\ a - 2b = -7 \end{cases}$$

si ricava: $a = 1$ e $b = 4$. Si ottiene quindi la seguente funzione:

$$f(x) = \frac{x^3 + 4}{x^2} = x + \frac{4}{x^2}\,.$$

Punto b)

Dominio D: $x \neq 0$.
Zero della funzione: $x = -\sqrt[3]{4}$.
La funzione non è né pari né dispari.
Segno: considerando che il denominatore è positivo $\forall x \in D$, la funzione è positiva dove lo è il numeratore, quindi per $x > -\sqrt[3]{4}$

Limiti della funzione agli estremi del dominio
Si ha: $\lim_{x\to 0^{\pm}} \frac{x^3+4}{x^2} = +\infty$ e quindi l'asse y è asintoto verticale.
Si ha inoltre
$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3+4}{x^2} = \frac{+\infty}{+\infty} F.I.$, ma essendo il grado del numeratore maggiore del denominatore tale limite è $+\infty$. Non ci sono quindi asintoti orizzontali a destra.
$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3+4}{x^3} = \frac{+\infty}{+\infty}\ F.I.$ ma avendo il numeratore e il denominatore grado uguale, tale limite è pari al rapporto dei coefficienti della x di grado massimo, quindi 1, che è il coefficiente angolare dell'asintoto obliquo. Calcoliamo ora il seguente limite:
$\lim_{x\to+\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x\to+\infty} \frac{4}{x^2} = 0$; quindi l'intercetta dell'asintoto obliquo è nulla.
Pertanto l'asintoto obliquo destro è la bisettrice del primo e terzo quadrante ed ha equazione $y = x$.
Analogamente: $\lim_{x\to-\infty} \frac{x^3+4}{x^2} = \frac{-\infty}{+\infty}\ F.I. = -\infty$; $\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^3+4}{x^3} = \frac{-\infty}{-\infty} F.I. = 1$;
$\lim_{x\to-\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x\to-\infty} \frac{4}{x^2} = 0$; quindi $y = x$ è l'unico asintoto obliquo sia a destra che a sinistra.

Studio della derivata prima.
Si ottiene $f'(x) = \frac{x^3-8}{x^3}$, che si annulla per $x = 2$.
Studiando il segno della derivata prima si trova che la funzione è crescente per $x < 0$ o per $x > 2$; pertanto $x = 2$ è un punto di minimo relativo della funzione, con $f(2) = 3$.
Si vede immediatamente che $f''(x) = \frac{24}{x^4}$. Quindi la funzione è convessa per $x < 0$ o per $x > 0$.

Il grafico della funzione è quindi il seguente.

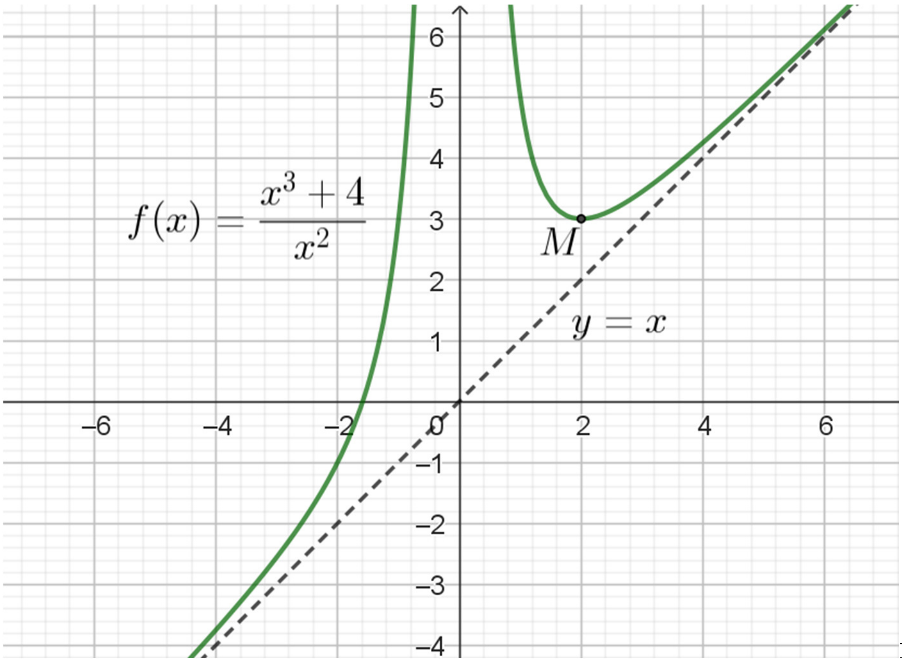

figura 1

Per determinare l'ulteriore retta tangente al grafico della funzione condotta per il punto *P*, scriviamo l'equazione della tangente a γ in un suo generico punto $A\left(\alpha, \frac{\alpha^3+4}{\alpha^2}\right)$ con $\alpha \neq 0$: tale retta ha equazione

$$y - \frac{\alpha^3+4}{\alpha^2} = \left(1 - \frac{8}{\alpha^3}\right)(x - \alpha)$$

con $\alpha \neq 0$.
Imponiamo il passaggio per $P(1,5)$ e otteniamo:

$$5 - \frac{\alpha^3+4}{\alpha^2} = \left(1 - \frac{8}{\alpha^3}\right)(1 - \alpha)$$

Svolgendo i calcoli si ottiene

$$\alpha^3 - 3\alpha + 2 = 0$$

ossia scomponendo in fattori $(\alpha - 1)^2(\alpha + 2) = 0$ da cui $\alpha = -2 \quad \alpha = 1$ (la soluzione $\alpha = 1$ restituisce il punto *P*).
Dunque si ottiene il punto $B(-2, -1)$ e l'equazione dell'ulteriore retta tangente a γ passante per *P* è

$$y + 1 = 2(x + 2)$$

ossia $y = 2x + 3$.

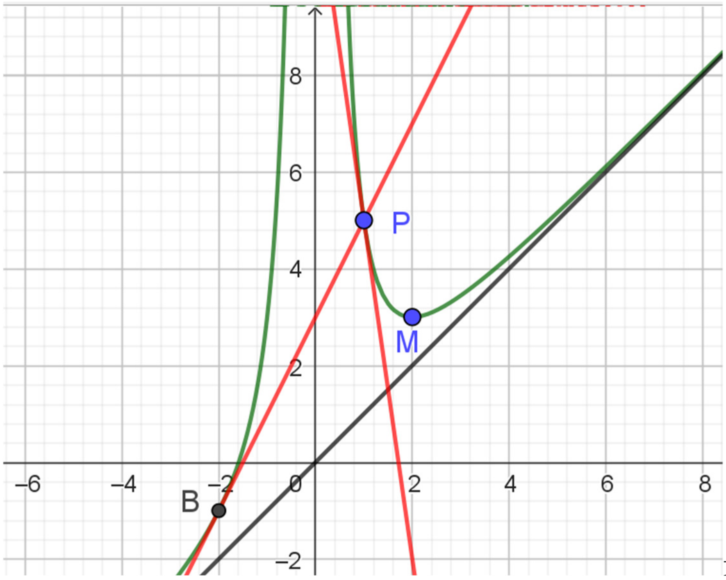

figura 2

Punto c)
Si potrebbe discutere questo punto in modo grafico, intersecando una generica retta del fascio di equazione $y-5=m(x-2)$, con il grafico della funzione, oppure si può usare il seguente metodo.
Per valutare il numero di intersezioni tra la funzione $y=\frac{x^3+4}{x^2}$ e il fascio proprio di rette per $P(1{,}5)$ (punto della funzione) $y-5=m(x-1)$ impostiamo il sistema tra l'equazione della curva e quella del fascio di rette di centro *P*, ottenendo:

$$\begin{cases} y=\dfrac{x^3+4}{x^2} \\ y-5=m(x-1) \end{cases}$$

Sostituisco ed esplicito *m,* ottenendo $m=\frac{x^3-5x^2+4}{x^2(x-1)}=\frac{x^2-4x-4}{x^2}$, con $x\neq 1$ (dobbiamo ricordare che per ogni m c'è sempre *P* come punto di intersezione tra la curva e il fascio di rette).
Ora risolviamo graficamente, dopo aver posto $y=m$ (fascio di rette parallele all'asse delle ascisse):

$$\begin{cases} y=\dfrac{x^2-4x-4}{x^2} \\ y=m \end{cases}$$

La funzione $y=\frac{x^2-4x-4}{x^2}=1-\frac{4}{x}-\frac{4}{x^2}$ è definita in $\mathbb{R}_0$; ha asintoto orizzontale $y=1$ e verticale $x=0$ (asse y).
Poiché $y'=\frac{4}{x^2}+\frac{8}{x^3}=4\frac{x+2}{x^3}$, la funzione è crescente per $x<-2 \vee x>0$ ed è decrescente per $-2<x<0$; quindi ha un punto di massimo relativo (e assoluto) in $x=-2$ e tale massimo vale 2.
Poiché $y''=-\frac{8}{x^3}-\frac{24}{x^4}=-8\cdot\frac{x+3}{x^4}$, la funzione ha un flesso in $x=-3$; la funzione è convessa per $x<-3$ mentre è concava per $-3<x<0 \vee x>0$.
Il grafico della funzione $y=\frac{x^2-4x-4}{x^2}$ è il seguente:

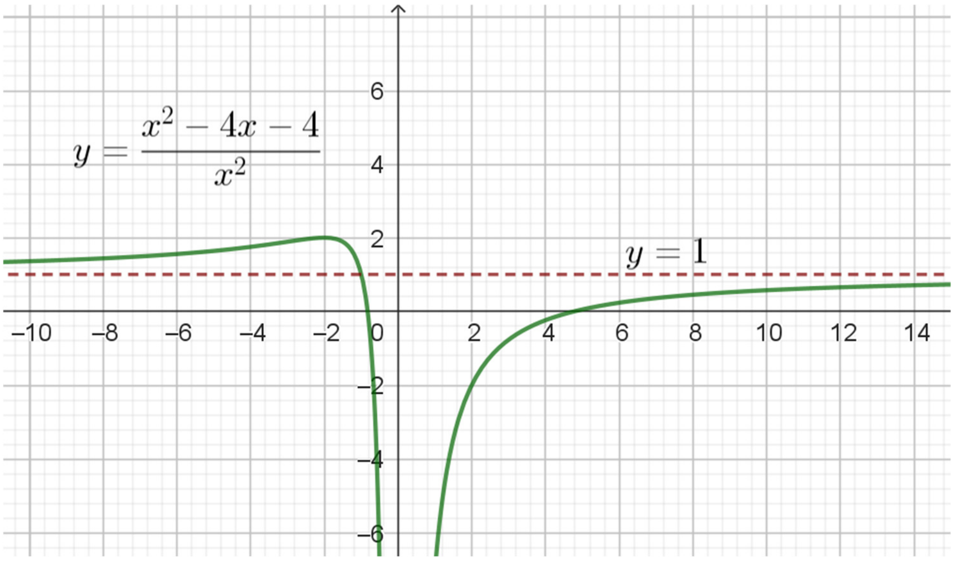

figura 3

Valutando il numero di intersezioni della funzione con il fascio di rette parallele all'asse x, il numero di intersezioni richieste è (ricordando che c'è sempre anche il punto *P* tra le intersezioni):
per $m < 1$ tre intersezioni;
per $m = 1$ due intersezioni;
per $1 < m < 2$ tre intersezioni;
per $m = 2$ due intersezioni (una è doppia);
per $m > 2$ un'intersezione.
Si noti che per $m = -7$ le intersezioni sono tre, due delle quali coincidono (soluzione $x = 1$).

Punto d)

Il punto *C* di intersezione tra asintoto obliquo e retta *t* è ha ascissa $\frac{3}{2}$.

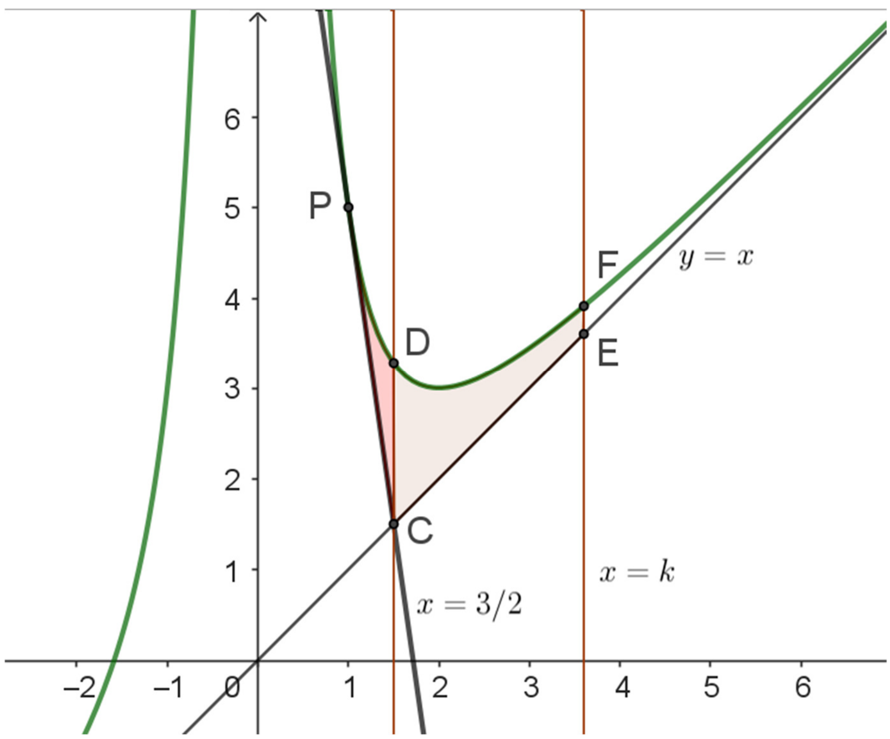

figura 4

Essendo $k > \frac{3}{2}$, l'area va calcolata come somma dei due integrali S_1 ed S_2, dove

$$S_1 = \int_1^{\frac{3}{2}} \left(\frac{x^3+4}{x^2} - (-7x+12) \right) dx = \int_1^{\frac{3}{2}} \left(8x + \frac{4}{x^2} - 12 \right) dx =$$

$$= 4\int_1^{\frac{3}{2}} \left(2x + \frac{1}{x^2} - 3 \right) dx = 4 \cdot \left[x^2 - \frac{1}{x} - 3x \right]_1^{\frac{3}{2}} =$$

$$= 4\left[\left(\frac{9}{4} - \frac{2}{3} - \frac{9}{2} \right) - (-3) \right] = 4\left[-\frac{35}{12} + 3 \right] = \frac{1}{3}$$

ed

$$S_2 = \int_{\frac{3}{2}}^{k} \left(\frac{x^3+4}{x^2} - x \right) dx = \int_{\frac{3}{2}}^{k} \frac{4}{x^2} dx = 4 \cdot \left[-\frac{1}{x} \right]_{\frac{3}{2}}^{k} = \frac{8}{3} - \frac{4}{k}.$$

Pertanto si ha

$$S(k) = S_1 + S_2 = \frac{1}{3} + \frac{8}{3} - \frac{4}{k} = 3 - \frac{4}{k}.$$

Si ottiene quindi $\lim_{k \to +\infty} S(k) = 3$, che rappresenta geometricamente il limite a cui tende l'area della regione limitata di piano compresa tra la curva, la tangente *t* e l'asintoto obliquo quando la retta di equazione $x = k$ trasla verso destra, per $k \to +\infty$ (figura 4).

Tabella di analisi/commento del problema

Livello di difficoltà stimato	☐ Basso	☐ Medio	☐ Alto	☒ Molto alto (punto c)	
Formulazione del problema	☐ Scorretta	☐ Ambigua	☐ Poco chiara	☒ Corretta	☐ Molto chiara
Si tratta di un problema contestualizzato	☒ No	☐ Parzialmente	☐ In modo accettabile	☐ Ben contestualizzato	
L'argomento è presente nelle Indicazioni Nazionali	☒ Sì	☐ No	☐ Non è esplicitato / Non è chiaro		
L'argomento è presente nel QdR di Matematica?	☒ Sì	☐ No	☐ Non è esplicitato / Non è chiaro		
Di solito, viene svolto nella pratica didattica usuale?	☒ Sì	☐ No	☐ Non sempre		
È un argomento presente nei libri di testo di Matematica?	☐ No	☐ Non sempre	☒ Sempre		
Verifica conoscenze / abilità/ competenze fondamentali?	☒ Sì	☐ Solo parzialmente	☐ No		
Per la risoluzione del problema è utile una calcolatrice grafica?	☒ Sì	☐ No	☐ Parzialmente		