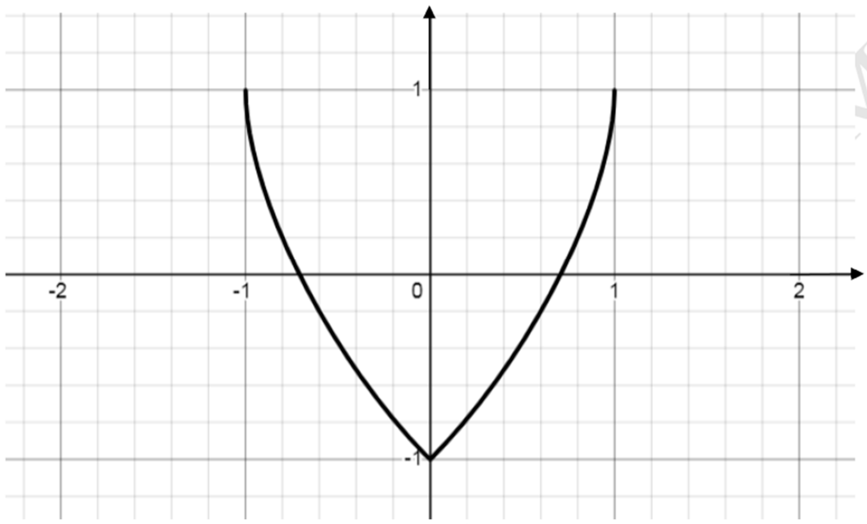
Esame di Stato – seconda prova scritta - Liceo scientifico (tutti gli indirizzi)
Prova scritta di Matematica - 20 giugno 2024

PROBLEMA 2 – soluzione a cura di L. Tomasi e S. De Stefani

«All'inizio e alla fine, abbiamo il mistero. [...] A questo mistero la matematica ci avvicina, pur senza penetrarlo». (E. De Giorgi)

Si consideri la famiglia di funzioni $f_n(x) = \sqrt[n]{x^2} - \sqrt{ax^2 + bx + 1}$, con $n \in N$, $n > 1$ e $a, b \in \mathbb{R}$, $a < 0$.

a) Verificare che, qualunque sia il valore di n, la funzione f_n non è derivabile nel punto di ascissa $x = 0$. Determinare il valore di n in corrispondenza del quale il grafico di f_n presenta un punto angoloso. Per opportuni valori dei parametri a, b, il grafico α, in figura, rappresenta la funzione $f_2(x) = |x| - \sqrt{ax^2 + bx + 1}$. Determinare i parametri a e b, considerando che f_2 è definita in $[-1; 1]$ e che il suo grafico è simmetrico rispetto all'asse delle ordinate.



Si ponga, d'ora in avanti, $a = -1$, $b = 0$.

b) Studiare la funzione $g(x) = |x| + \sqrt{1 - x^2}$, verificando che non è derivabile negli estremi del dominio e nel punto di ascissa $x = 0$. Indicare con β il suo grafico e tracciare la curva $\gamma = \alpha \cup \beta$.

c) La retta r, di equazione $x = k$, con $-1 < k < 1$, interseca γ nei punti P e Q. Dimostrare che la misura del segmento PQ è massima quando r è asse di simmetria di γ.

d) Verificare che la funzione $H(x) = \frac{1}{2}\left(arcsen(x) + x\sqrt{1 - x^2}\right)$ è una primitiva della funzione $h(x) = \sqrt{1 - x^2}$. Con il metodo che si ritiene più opportuno, calcolare l'area della regione finita di piano delimitata da γ.

«Le forme create dal matematico, come quelle create dal pittore o dal poeta, devono essere belle: le idee, come i colori o le parole, devono legarsi armoniosamente. La bellezza è il requisito fondamentale: al mondo non c'è posto perenne per la matematica brutta». (G. H. Hardy)

Soluzione

Punto a)

Tutte le funzioni della famiglia data hanno il dominio definito da $ax^2 + bx + 1 \geq 0$. Essendo per ipotesi $a < 0$, e osservando che il discriminante $\Delta = b^2 - 4a$ è quindi sempre positivo, il dominio è dato dall'intervallo chiuso che ha per estremi i punti di ascissa $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4a}}{2a}$.

Le funzioni sono continue nel dominio e il punto $(0; -1)$ appartiene al grafico di tutte le funzioni. Le funzioni inoltre sono derivabili nell'intervallo, tranne nel punto di ascissa $x = 0$ che vogliamo ora analizzare. Esaminiamo quindi la derivata prima di queste funzioni distinguendo il caso $n = 2$ da quelli in cui $n > 2$.

Nel caso $n = 2$ si ottiene $f_2(x) = |x| - \sqrt{ax^2 + bx + 1}$, ossia, chiamando semplicemente $f(x)$ questa funzione:

$$f(x) = \begin{cases} x - \sqrt{ax^2 + bx + 1} & \text{se } x \geq 0 \\ -x - \sqrt{ax^2 + bx + 1} & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

La derivata prima è data da:

$$f'(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{2ax + b}{2\sqrt{ax^2 + bx + 1}} & \text{se } x \geq 0 \\ -1 - \dfrac{2ax + b}{2\sqrt{ax^2 + bx + 1}} & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

In questo caso il punto $x = 0$ è un punto angoloso perché esistono sia la derivata destra che quella sinistra, ma sono diverse tra loro; si ha infatti:

$$f'_+(0) = 1 - \frac{b}{2}$$

$$f'_-(0) = -1 - \frac{b}{2}.$$

Per $n > 2$, la derivata prima è data da

$$f'(x) = \frac{2}{n} x^{\frac{2-n}{n}} - \frac{2ax + b}{2\sqrt{ax^2 + bx + 1}} = \frac{2}{n\sqrt[n]{x^{n-2}}} - \frac{2ax + b}{2\sqrt{ax^2 + bx + 1}}.$$

Vogliamo calcolare il limite di $f'(x)$ per $x \to 0$, da destra e da sinistra.

Il limite della seconda parte della derivata prima

$$-\frac{2ax + b}{2\sqrt{ax^2 + bx + 1}}$$

per $x \to 0$ è $-b/2$.

Rimane da esaminare il limite, per $x \to 0$ (da destra e da sinistra), della derivata prima della seguente funzione $h(x) = \sqrt[n]{x^2}$, che è data da:

$$h'(x) = \frac{2}{n} x^{\frac{2-n}{n}} = \frac{2}{n x^{\frac{n-2}{n}}} = \frac{2}{n\sqrt[n]{x^{n-2}}}.$$

Tale derivata non è definita per $x = 0$.

Calcoliamo quindi i limiti di $h'(x)$, a destra e a sinistra, per $x \to 0$.

Osserviamo prima di tutto che essendo $h(x)$ una funzione pari (per ogni $n \geq 2$) la sua derivata $h'(x)$ è una funzione dispari.

Supponiamo ora che $n > 2$.

Poiché si ha

$$\lim_{x\to 0^+} h'(x) = \lim_{x\to 0^+} \left(\frac{2}{n\sqrt[n]{x^{n-2}}}\right) = +\infty$$

ne consegue (essendo $h'(x)$ una funzione dispari), che

$$\lim_{x\to 0^-} h'(x) = \lim_{x\to 0^-} \left(\frac{2}{n\sqrt[n]{x^{n-2}}}\right) = -\infty\,.$$

Quindi per $n > 2$, la funzione $h(x) = \sqrt[n]{x^2}$ ha una cuspide nel punto $x = 0$.

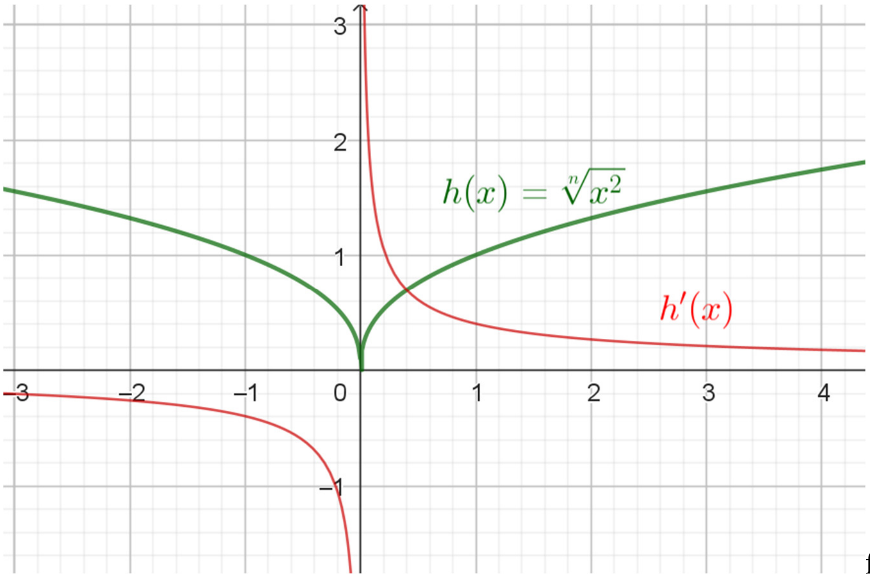


figura 1

Di conseguenza, se $n > 2$, allora si hanno anche i seguenti limiti

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} \left(\frac{2}{n\sqrt[n]{x^{n-2}}} - \frac{2ax+b}{2\sqrt{ax^2+bx+1}}\right) = +\infty$$

$$\lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{x\to 0^-} \left(\frac{2}{n\sqrt[n]{x^{n-2}}} - \frac{2ax+b}{2\sqrt{ax^2+bx+1}}\right) = -\infty.$$

Quindi, per $n > 2$, il punto di ascissa $x = 0$ è un punto cuspidale (punto di non derivabilità, con retta tangente parallela all'asse delle *y*) anche per le funzioni $f_n(x)$.

Pertanto, si ottiene un punto angoloso in $x = 0$ se e solo se $n = 2$. Sia quindi

$$f_2(x) = |x| - \sqrt{ax^2+bx+1}\,.$$

Poiché questa funzione deve avere il grafico assegnato nella figura (del testo) e deve essere una funzione pari definita nell'intervallo chiuso $[-1,1]$, imponiamo $f_2(x) = f_2(-x)$, ottenendo

$$|x| - \sqrt{ax^2+bx+1} = |x| - \sqrt{ax^2-bx+1},$$

$$\sqrt{ax^2+bx+1} = \sqrt{ax^2-bx+1},$$

da cui segue $b = 0$.

Poiché inoltre deve essere $f_2(1) = 1$, si ottiene $a = -1$.

Pertanto si ha $f_2(x) = |x| - \sqrt{1-x^2}$, che chiameremo semplicemente $f(x)$.

Si noti il punto angoloso per $x = 0$ e i punti di non derivabilità (con tangente parallela all'asse delle ordinate) nei punti di ascissa $x = \pm 1$. Nel punto $x = 0$ si ha $f'_+(0) = 1$ e $f'_-(0) = -1$.

$$f'(x)=\begin{cases}1+\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}} & \text{se } 0\le x<1\\ -1+\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}} & \text{se} -1<x<0\end{cases}$$

Studiando il segno di $f'(x)$ per $0<x<1$, si ha $f'(x)>0$ all'intervallo $0<x<1$, in cui la funzione $f(x)$ è crescente. Poiché $f(x)$ è pari, ne segue che $f(x)$ è decrescente in $-1<x<0$.
La derivata seconda è data da

$$f''(x)=\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)^3}},$$

che è positiva sia nell'intervallo $0<x<1$, che nell'intervallo $-1<x<0$. Quindi $f(x)$ è convessa su questi intervalli. Il grafico di $f(x)$ è riportato nella seguente figura 2 (la stessa proposta nel testo del problema).

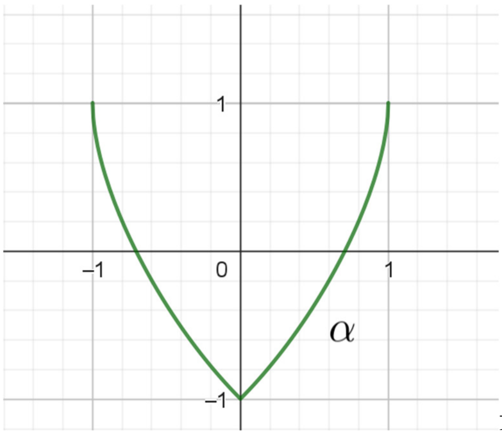


figura 2

Punto b)

Studiamo ora la funzione $g(x)=|x|+\sqrt{1-x^2}$, che è definita nell'intervallo chiuso $[-1,1]$ ed è pari e non è derivabile nei punti $x=0$ e $x=\pm 1$. Per verificarlo basta studiare la derivabilità nei punti $x=0$ e $x=1$.
La derivata prima è la seguente:

$$g'(x)=\begin{cases}1-\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}} & \text{se } 0\le x<1\\ -1-\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}} & \text{se} -1<x<0\end{cases}$$

Il punto $x=0$ è un punto angoloso, mentre i punti di ascissa $x=\pm 1$ sono punti in cui la retta tangente è parallela all'asse *y* (quindi esiste il limite del rapporto incrementale, ma è infinito).
Studiando il segno di $g'(x)$ per $0<x<1$, si ha $g'(x)>0$ per $\frac{\sqrt{1-x^2}-x}{\sqrt{1-x^2}}>0$, che risolta porta all'intervallo $0<x<\frac{\sqrt{2}}{2}$, in cui la funzione $g(x)$ è crescente. Quindi il punto di ascissa $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ è un punto di massimo relativo (e assoluto) di $g(x)$ e si ha $g\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\sqrt{2}$.
Essendo la funzione $g(x)$ pari, presenta due massimi assoluti in $\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2};\sqrt{2}\right)$.

Calcolando la derivata seconda si arriva a $g''(x) = \frac{1}{(x^2-1)\sqrt{1-x^2}}$, si trova che è negativa nell'intervallo $0 < x < 1$ (con punto angoloso in $x = 0$); quindi la funzione ha la concavità rivolta verso il basso in questo intervallo. Essendo pari, è convessa anche nell'intervallo $-1 < x < 0$.

Il grafico β della funzione $g(x)$ è riportato nella seguente figura.

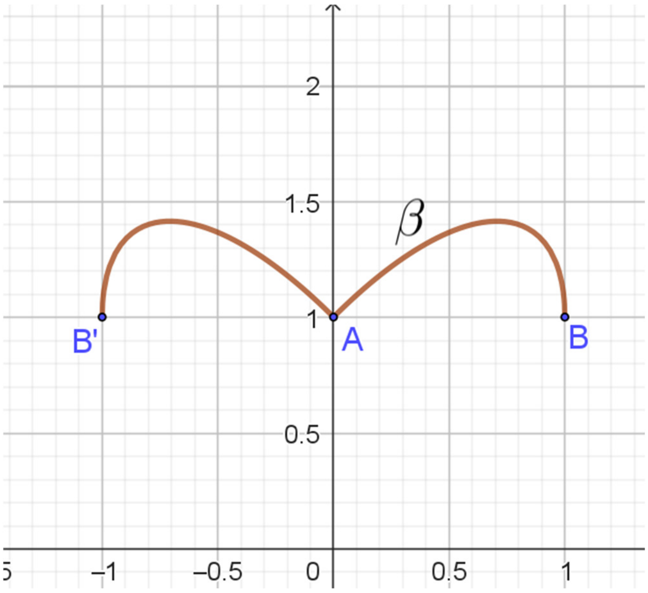


figura 3

L'unione dei due grafici fornisce una curva γ a forma di "cuore" [e quindi, forse, si cominciano a capire le citazioni riportate all'inizio e alla fine del testo di questo problema 2].

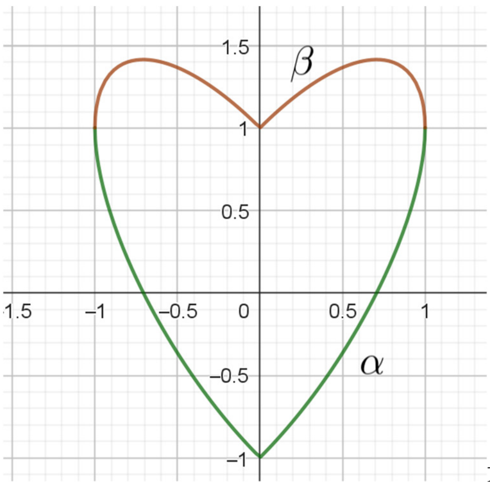


figura 4

Punto c)

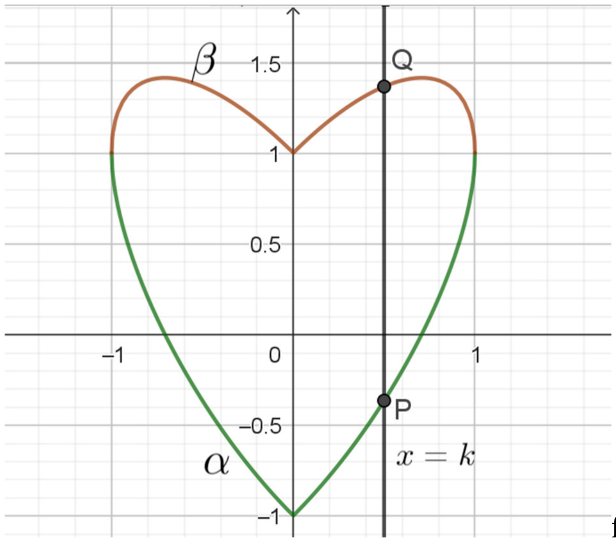


figura 5

Intersechiamo la curva con una generica retta di equazione $x = k$, con $-1 \leq k \leq 1$. Data la simmetria della curva rispetto all'asse y possiamo supporre $0 \leq k \leq 1$. I punti P e Q di intersezione con la curva hanno coordinate $P\left(k;\ \ |k| - \sqrt{1-k^2}\right)$ e $Q\left(k;\ \ |k| + \sqrt{1-k^2}\right)$.
Pertanto la lunghezza del segmento PQ in funzione di k sarà data da

$$l(k) = \overline{PQ} = 2\sqrt{1-k^2}\,,$$

che è massima per $k = 0$, ovvero per la retta di equazione $x = 0$ (asse y), asse di simmetria della curva γ. La lunghezza massima della corda PQ vale pertanto 2.

Punto d)

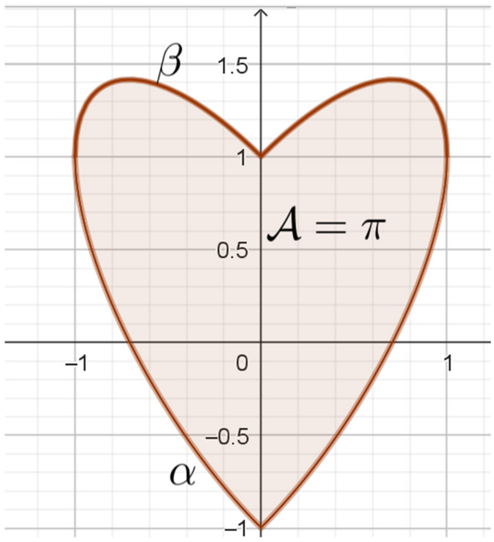


figura 6

La funzione $H(x) = \frac{1}{2}(\arcsin x + x\sqrt{1-x^2}\ )$ è una primitiva di $h(x) = \sqrt{1-x^2}$ se $H'(x) = h(x)$. Verifichiamo:

$$H'(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \sqrt{1-x^2} + x \cdot \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{2-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}\right) = \frac{1-x^2}{\sqrt{1-x^2}} = \sqrt{1-x^2} = h(x).$$

L'area della regione finita di piano racchiusa dalla curva γ vale pertanto, data la simmetria rispetto all'asse y:

$$\mathcal{A} = 2\int_0^1 (g(x) - f_2(x))dx = 2\int_0^1 2\sqrt{1-x^2}\,dx = 4\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = 4\cdot\ [H(x)]_0^1 =$$
$$= 2\left[\arcsin x + x\sqrt{1-x^2}\right]_0^1 = 2(\arcsin 1 - \arcsin 0) = \pi\,.$$

Quindi l'area racchiusa dalla curva γ è la stessa del cerchio di raggio unitario.

Questo lo si poteva osservare già nel calcolo dell'integrale:

$$\mathcal{A} = 2\int_0^1 (g(x) - f_2(x))dx = 4\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$$

ricordando che il seguente integrale

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{\pi}{4}$$

rappresenta l'area di un quarto del cerchio unitario (figura 7) e pertanto vale $\pi/4$.

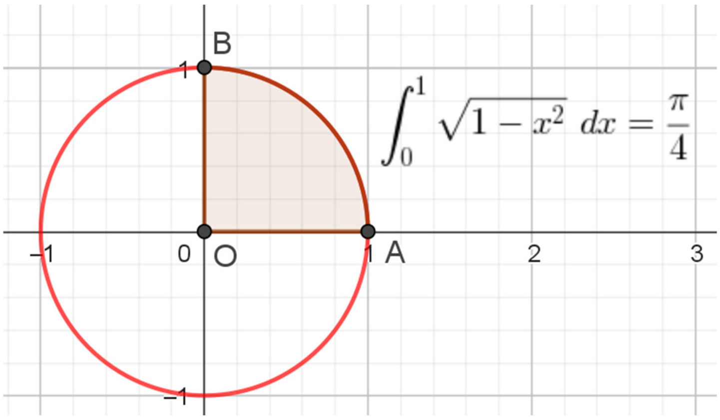


figura 7

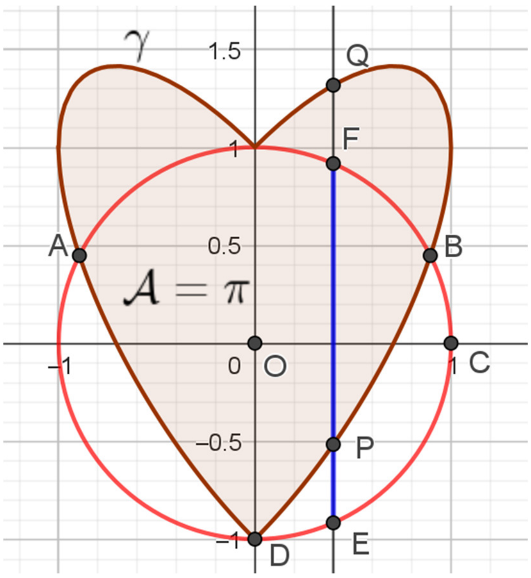


figura 8

Per ogni $-1 \le k \le 1$ la corda PQ individuata sulla curva γ dalla retta di equazione $x = k$ ha la stessa lunghezza della corda EF individuata sul cerchio unitario (figura 8). Si noti quindi che il segmento EP è congruente al segmento FQ per ogni valore di $-1 \le k \le 1$.

Tabella di analisi/commento del problema

Livello di difficoltà stimato	☐ Basso	☐ Medio	☒ Alto	☐ Molto alto	
Formulazione del problema	☐ Scorretta	☐ Ambigua	☐ Poco chiara	☒ Corretta	☐ Molto chiara
Si tratta di un problema contestualizzato	☒ No	☐ Parzialmente	☐ In modo accettabile	☐ Ben contestualizzato	
L'argomento è presente nelle Indicazioni Nazionali	☒ Sì	☐ No	☐ Non è esplicitato / Non è chiaro		
L'argomento è presente nel QdR di Matematica?	☒ Sì	☐ No	☐ Non è esplicitato / Non è chiaro		
Di solito, viene svolto nella pratica didattica usuale?	☒ Sì	☐ No	☐ Non sempre		
È un argomento presente nei libri di testo di Matematica?	☐ No	☐ Non sempre	☒ Sempre		
Verifica conoscenze / abilità/ competenze fondamentali?	☒ Sì	☐ Solo parzialmente	☐ No		
Per la risoluzione del problema è utile una calcolatrice grafica?	☒ Sì	☐ No	☐ Parzialmente		