

Esame di Stato – seconda prova scritta - Liceo Scientifico
Prova scritta di Matematica - 20 giugno 2024

QUESITO 4 - soluzione a cura di Laura Rossi

4. Dimostrare che l'equazione $x^3 + x - \cos x = 0$ ammette un'unica soluzione positiva.

Soluzione 1

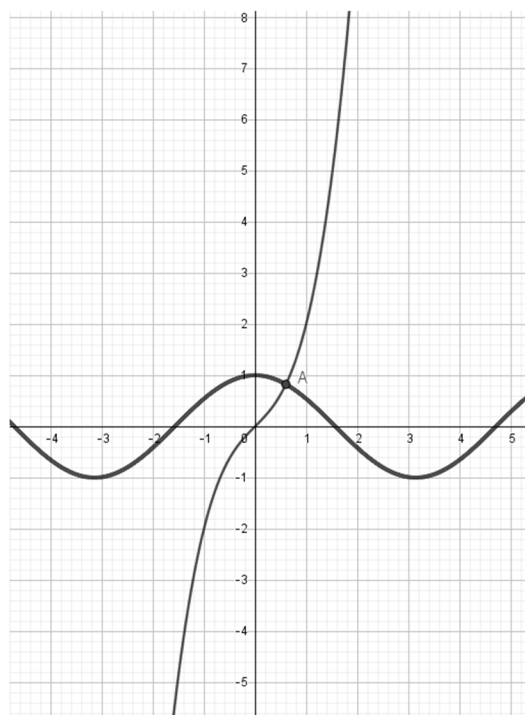
Metodo grafico

Riscrivo l'equazione nella forma $x^3 + x = \cos x$ e risolvo graficamente:

$$\begin{cases} y = x^3 + x \\ y = \cos x \end{cases}$$

La funzione $y = x^3 + x$ è polinomiale continua in \mathbb{R} , sempre crescente poiché la derivata prima $y' = 3x^2 + 1 > 0 \forall x \in \mathbb{R}$ e passa per l'origine degli assi. La situazione è la seguente:

le funzioni hanno un unico punto A di intersezione la cui ascissa α è compresa tra 0 e 1. α sarà dunque l'unica soluzione positiva dell'equazione assegnata.



Soluzione 2

Teorema di Bolzano generalizzato

La funzione $y = f(x) = x^3 + x - \cos x$ è continua in \mathbb{R} in quanto somma di funzioni continue in \mathbb{R} ;

$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 + x - \cos x) = +\infty$ poiché

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 + x - \cos x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 \left(1 + \frac{1}{x^2} - \frac{\cos x}{x^3} \right) = +\infty, \text{ essendo } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0 \text{ e } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cos x}{x^3} = 0$$

per il teorema del confronto sui limiti.

In maniera analoga, si ha $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 + x - \cos x) = -\infty$.

Dunque essendo soddisfatte le ipotesi del teorema di Bolzano generalizzato, esiste almeno un $c \in \mathbb{R}$ tale che $f(c) = 0$. Tale c è unico in virtù del fatto che $y = f(x)$ è strettamente crescente in \mathbb{R} ; infatti $f'(x) = 3x^2 + 1 + \sin x > 0 \forall x \in \mathbb{R}$ in quanto somma di $3x^2$ e $(1 + \sin x)$ entrambe quantità non negative che non si annullano contemporaneamente.

Tale valore di c è positivo perché $f(0) = -1 < 0$.

Tabella di analisi del quesito

Livello di difficoltà stimato	<input checked="" type="checkbox"/> Basso	<input type="checkbox"/> Medio	<input type="checkbox"/> Alto	<input type="checkbox"/> Molto alto	
Formulazione del problema	<input type="checkbox"/> Scorretta	<input type="checkbox"/> Ambigua	<input type="checkbox"/> Poco chiara	<input type="checkbox"/> Corretta	<input checked="" type="checkbox"/> Molto chiara
L'argomento è presente nelle Indicazioni Nazionali	<input checked="" type="checkbox"/> Sì		<input type="checkbox"/> No		
L'argomento è presente nel QdR di Matematica	<input checked="" type="checkbox"/> Sì		<input type="checkbox"/> No		
				<input type="checkbox"/> Non è esplicitato / Non è chiaro	
				<input type="checkbox"/> Non è esplicitato / Non è chiaro	

Di solito, viene svolto nella pratica didattica usuale?	<input checked="" type="checkbox"/> Sì	<input type="checkbox"/> No	<input type="checkbox"/> Non sempre
È un argomento presente nei libri di testo di Matematica?	<input type="checkbox"/> No	<input type="checkbox"/> Non sempre	<input checked="" type="checkbox"/> Sempre
Verifica conoscenze / abilità / competenze fondamentali?	<input checked="" type="checkbox"/> Sì	<input type="checkbox"/> Solo parzialmente	<input type="checkbox"/> No
Per la risoluzione del quesito è utile una calcolatrice grafica?	<input checked="" type="checkbox"/> Sì	<input type="checkbox"/> No	<input type="checkbox"/> Parzialmente