

Esame di Stato – seconda prova scritta - Liceo Scientifico
Prova scritta di Matematica - 20 giugno 2024

QUESITO 5 - soluzione a cura di Laura Rossi

5. Determinare la funzione polinomiale di quarto grado $y = p(x)$ sapendo che, in un sistema di riferimento cartesiano, il suo grafico verifica le seguenti condizioni:

- è tangente all'asse x nell'origine;
- passa per il punto $(1,0)$;
- ha un punto stazionario in $(2, -2)$.

Soluzione

Dalle informazioni fornite, il polinomio $p(x)$ di quarto grado si annulla in $x=0$ (passa per l'origine degli assi) e in 1 (passa per $P(1,0)$), dunque può essere scritto nella forma:

$$p(x) = x(x - 1)(ax^2 + bx + c).$$

Il passaggio per $(2, -2)$ si traduce nella condizione: $p(2) = -2$, ossia $2(4a + 2b + c) = -2$.

La tangenza all'asse x nell'origine si traduce nella condizione: $p'(0) = 0$.

Il punto stazionario $(2, -2)$ si traduce nella condizione: $p'(2) = 0$.

Troviamo quindi la derivata prima di $p(x) = x(x - 1)(ax^2 + bx + c)$; scritto $p(x)$ nella forma $p(x) = (x^2 - x)(ax^2 + bx + c)$, deriviamo applicando la regola di derivazione del prodotto:

$$p'(x) = (2x - 1)(ax^2 + bx + c) + (x^2 - x)(2ax + b)$$

La condizione $p'(0) = 0$ restituisce $-c = 0$, ossia $c = 0$;

la condizione $p'(2) = 0$ restituisce $3(4a + 2b + c) + 2(4a + b) = 0$, ossia $20a + 8b + 3c = 0$.

Mettendo a sistema tali condizioni e svolgendo i calcoli si ottiene:

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = -\frac{5}{2} \\ c = 0 \end{cases}$$

Quindi la funzione polinomiale richiesta è

$$p(x) = x(x - 1)\left(x^2 - \frac{5}{2}x\right) = x^2(x - 1)\left(x - \frac{5}{2}\right) = x^4 - \frac{7}{2}x^3 + \frac{5}{2}x^2.$$

Il grafico è il seguente.

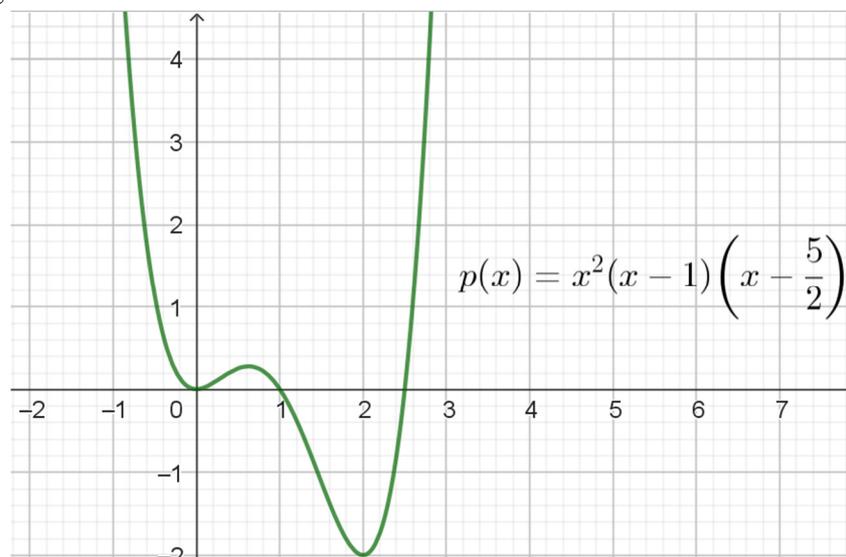


Tabella di analisi del quesito (Matematica)

Livello di difficoltà stimato	<input checked="" type="checkbox"/> Basso	<input type="checkbox"/> Medio	<input type="checkbox"/> Alto	<input type="checkbox"/> Molto alto	
Formulazione del problema	<input type="checkbox"/> Scorretta	<input type="checkbox"/> Ambigua	<input type="checkbox"/> Poco chiara	<input type="checkbox"/> Corretta	<input checked="" type="checkbox"/> Molto chiara
L'argomento è presente nelle Indicazioni Nazionali	<input checked="" type="checkbox"/> Sì		<input type="checkbox"/> No		<input type="checkbox"/> Non è esplicitato / Non è chiaro
L'argomento è presente nel QdR di Matematica	<input checked="" type="checkbox"/> Sì		<input type="checkbox"/> No		<input type="checkbox"/> Non è esplicitato / Non è chiaro
Di solito, viene svolto nella pratica didattica usuale?	<input checked="" type="checkbox"/> Sì		<input type="checkbox"/> No		<input type="checkbox"/> Non sempre
È un argomento presente nei libri di testo di Matematica?	<input type="checkbox"/> No		<input type="checkbox"/> Non sempre		<input checked="" type="checkbox"/> Sempre
Verifica conoscenze / abilità/ competenze fondamentali?	<input checked="" type="checkbox"/> Sì		<input type="checkbox"/> Solo parzialmente		<input type="checkbox"/> No
Per la risoluzione del quesito è utile una calcolatrice grafica?	<input checked="" type="checkbox"/> Sì		<input type="checkbox"/> No		<input type="checkbox"/> Parzialmente