

Esame di Stato – seconda prova scritta - Liceo Scientifico
Prova scritta di Matematica - 20 giugno 2024

QUESITO 6 - soluzione a cura di Laura Rossi

6. Si consideri la funzione integrale $F(x) = \int_a^x \frac{\cos(\frac{1}{t})}{t^2} dt$, con $x \geq a$, in cui a indica un parametro reale positivo. Determinare il più grande valore di a in modo che $F\left(\frac{2}{\pi}\right) = -\frac{1}{2}$.

Soluzione

Data la funzione integrale

$$F(x) = \int_a^x \frac{\cos\left(\frac{1}{t}\right)}{t^2} dt, \text{ con } x \geq a > 0$$

determiniamo

$$F\left(\frac{2}{\pi}\right) = \int_a^{\frac{2}{\pi}} \frac{\cos\left(\frac{1}{t}\right)}{t^2} dt = \left[-\sin\left(\frac{1}{t}\right)\right]_a^{\frac{2}{\pi}} = -1 + \sin\frac{1}{a}.$$

Imponiamo:

$$-1 + \sin\frac{1}{a} = -\frac{1}{2}$$

ossia

$$\sin\frac{1}{a} = \frac{1}{2}$$

e otteniamo

$$\frac{1}{a} = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad \vee \quad \frac{1}{a} = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, \quad \text{con } k \in \mathbb{N},$$

dove abbiamo imposto $k \in \mathbb{N}$ perché deve essere $a > 0$.

Abbiamo quindi ottenuto le due successioni decrescenti

$$a = \frac{1}{\frac{\pi}{6} + 2k\pi} \quad \vee \quad a = \frac{1}{\frac{5\pi}{6} + 2k\pi}, \text{ con } k \in \mathbb{N}.$$

Poiché deve essere $x \geq a > 0$, ne segue, ponendo $x = \frac{2}{\pi}$, $0 < a \leq \frac{2}{\pi}$.

Il più grande valore di $a > 0$ per cui è verificata questa relazione, tra le infinite soluzioni, è pertanto

$$a = \frac{6}{5\pi}.$$

Tabella di analisi del quesito (Matematica)

| | | | | |
|--|--|----------------------------------|--|---|
| Livello di difficoltà stimato | <input type="checkbox"/> Basso | <input type="checkbox"/> Medio | <input checked="" type="checkbox"/> Alto | <input type="checkbox"/> Molto alto |
| Formulazione del problema | <input type="checkbox"/> Scorretta | <input type="checkbox"/> Ambigua | <input type="checkbox"/> Poco chiara | <input checked="" type="checkbox"/> Corretta <input type="checkbox"/> Molto chiara |
| L'argomento è presente nelle Indicazioni Nazionali | <input checked="" type="checkbox"/> Sì | | <input type="checkbox"/> No | |
| L'argomento è presente nel QdR di Matematica | <input checked="" type="checkbox"/> Sì | | <input type="checkbox"/> No | |
| Di solito, viene svolto nella pratica didattica usuale? | <input checked="" type="checkbox"/> Sì | | <input type="checkbox"/> No | |
| | | | | <input type="checkbox"/> Non è esplicitato / Non è chiaro |
| | | | | <input type="checkbox"/> Non è esplicitato / Non è chiaro |
| | | | | <input type="checkbox"/> Non sempre |

| | | | |
|---|--|--|--|
| È un argomento presente nei libri di testo di Matematica? | <input type="checkbox"/> No | <input type="checkbox"/> Non sempre | <input checked="" type="checkbox"/> Sempre |
| Verifica conoscenze / abilità/ competenze fondamentali? | <input checked="" type="checkbox"/> Sì | <input type="checkbox"/> Solo parzialmente | <input type="checkbox"/> No |
| Per la risoluzione del quesito è utile una calcolatrice grafica? | <input checked="" type="checkbox"/> Sì | <input type="checkbox"/> No | <input type="checkbox"/> Parzialmente |