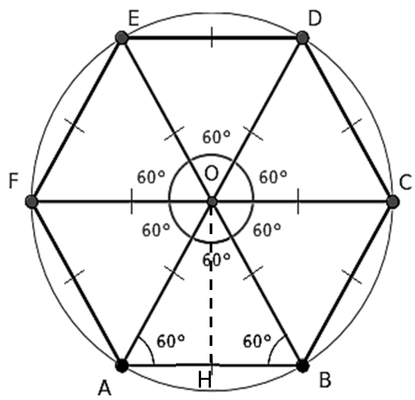
Esame di Stato – seconda prova scritta - Liceo Scientifico
Prova scritta di Matematica - 20 giugno 2024

QUESITO 8 - soluzione a cura di S. De Stefani

8. Scrive Carlo Emilio Gadda in uno dei racconti de *L'Adalgisa – Disegni milanesi*: «Le stanze del servizio, il bagno, i corridoi, l'anticamera e l'uno de' due gabinetti, eran pavimentati con piastrelle rosse di piccolo formato: esagonali [...]. L'apotèma di quelle mattonelle misurava centimetri 5,196: mentreché il raggio del circolo circoscritto raggiungeva i 60 millimetri».
Esprimere la relazione esatta tra raggio del cerchio circoscritto ed apotema (ossia il raggio del cerchio inscritto) per un esagono regolare. Verificare il risultato ottenuto alla luce delle misure indicate dallo scrittore. Spiegare perché, utilizzando piastrelle esagonali regolari tutte congruenti, è possibile pavimentare un piano. Con quali altri poligoni regolari, tra loro congruenti, è possibile pavimentare un piano? Motivare la risposta.

Soluzione



Poniamo

OH = apotema = raggio del cerchio inscritto $= r$

OA = raggio del cerchio circoscritto $= R$.

Si ha: $\frac{OH}{AO} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, da cui $\frac{\sqrt{3}}{2}R = r$.

Verifica delle misure indicate dallo scrittore: se $r = 5{,}196$ cm e $R = 6$ cm, $3\sqrt{3} \approx 5{,}196$.

Sapendo che la somma degli angoli interni di un poligono di *n* lati è $(n-2)180°$, l'ampiezza di ogni angolo interno di un poligono regolare di *n* lati vale

$$\frac{(n-2)\cdot 180°}{n}.$$

Si può pavimentare un piano con poligoni regolari di *n* lati se in ogni vertice convergono *k* poligoni (*k* numero naturale maggiore o uguale a 3), tali che $k \cdot \frac{(n-2)\cdot 180°}{n} = 360°$, da cui segue

$$k = \frac{2n}{n-2}, \qquad \text{con } n \geq 3, n \in \mathbb{N}.$$

Possiamo riscrivere la relazione precedente come segue (togliendo e aggiungendo 4 al numeratore):

$$k = 2 + \frac{4}{n-2}.$$

Affinché k sia un numero naturale, $\frac{4}{n-2}$ deve essere un numero intero. Quindi $n-2$ deve essere un divisore di 4, ossia uno dei tre numeri $\{1,2,4\}$. Di conseguenza gli unici valori di n accettabili sono $\{3,4,6\}$, che corrispondono al triangolo equilatero, al quadrato e all'esagono regolare.

Gli unici tre casi possibili per n sono esplicitati nella seguente tabella:

Poligono regolare (n lati)	Angolo interno	Valori di k, numero di poligoni che "convergono" in un vertice (devono essere almeno 3)
Triangolo equilatero	60°	6
Quadrato	90°	4
Pentagono regolare	108°	k non è intero
Esagono regolare	120°	3
Ottagono regolare	135°	k è minore di 3, impossibile
…	…	impossibile

Tabella di analisi del quesito

Livello di difficoltà stimato	☐ Basso	☒ Medio	☐ Alto	☐ Molto alto	
Formulazione del problema	☐ Scorretta	☐ Ambigua	☐ Poco chiara	☒ Corretta	☐ Molto chiara
L'argomento è presente nelle Indicazioni Nazionali	☐ Sì		☐ No	☐ Non è esplicitato / Non è chiaro	
L'argomento è presente nel QdR di Matematica	☐ Sì		☐ No	☐ Non è esplicitato / Non è chiaro	
Di solito, viene svolto nella pratica didattica usuale?	☐ Sì		☒ No	☐ Non sempre	
È un argomento presente nei libri di testo di Matematica?	☐ No		☒ Non sempre	☐ Sempre	
Verifica conoscenze / abilità/ competenze fondamentali?	☐ Sì		☐ Solo parzialmente	☒ No	
Per la risoluzione del quesito è utile una calcolatrice grafica?	☐ Sì		☒ No	☐ Parzialmente	