Sessione straordinaria 2024
Seconda prova scritta
12 settembre 2024

Ministero dell'istruzione e del merito

A002 - ESAME DI STATO CONCLUSIVO DEL SECONDO CICLO DI ISTRUZIONE

Testo valevole per tutti i seguenti indirizzi:
LI02, LI03, LI15, LI1S, LI22, LI23, LI31, LI32, LIA2, LIAO,
LIB2, LIC2, LID2, LII2, LII3, LII4, LIIS, LIS2, EA02, EA10
Disciplina: MATEMATICA

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 4 quesiti del questionario.

PROBLEMA 1

Sia data la seguente funzione parametrica:

$$y = x^3 + ax^2 + c$$

a) Si dimostri che per ogni valore dei parametri reali a e c $(\mathrm{a} \neq 0)$, il flesso coincide con il punto medio del segmento che ha per estremi i punti di massimo e di minimo relativi.

b) Si determinino i valori dei parametri affinché la funzione abbia il massimo in $x = -2$ e abbia un flesso di ordinata 6.

c) Si disegni quindi il grafico della funzione $f(x) = x^3 + 3x^2 + 4$, e si calcoli l'area della regione finita di piano compresa tra la funzione, l'asse delle ascisse, l'asse delle ordinate e la retta di equazione $x = -2$.

d) Si dimostri infine che la funzione $f(x)$ è simmetrica rispetto al suo punto di flesso. Successivamente, si applichi alla funzione $f(x)$ la traslazione di vettore $\vec{v}\,(\alpha, \beta)$. Determinare $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, affinché la funzione traslata risulti dispari.

PROBLEMA 2

Si consideri la funzione $f(x) = e^{-x^2}$.

a) Tracciare, nel medesimo sistema di riferimento, il grafico γ_1 della funzione $f(x)$ e il grafico γ_2 della sua funzione derivata, individuando i loro asintoti, estremi e flessi. Successivamente scrivere le coordinate del punto *P* in cui γ_1 e γ_2 si intersecano.

b) La retta di equazione $x = t,\ t \in \mathbb{R}$, incontra γ_1 e γ_2, rispettivamente, nei punti P_1 e P_2. Determinare il valore del parametro t, in modo che la misura del segmento che unisce i due punti abbia misura massima e calcolare il valore di tale misura.

c) Sia γ_3 il grafico rappresentativo della funzione $f''(x)$. Calcolare l'area della regione finita delimitata da γ_2 e γ_3 .

d) Posto $F(x) = \int_0^x e^{-t^2}\,dt$, calcolare il $\lim\limits_{x\to 0} \frac{F(x)}{f'(x)}$ spiegando perché, in $x = 0$, le funzioni $F(x)$ ed $f'(x)$ sono infinitesime dello stesso ordine.

Ministero dell'istruzione e del merito

Testo valevole per tutti i seguenti indirizzi:
LI02, LI03, LI15, LI1S, LI22, LI23, LI31, LI32, LIA2, LIAO, LIB2, LIC2, LID2, LII2, LII3, LII4, LIIS, LIS2, EA02, EA10

Disciplina: MATEMATICA

QUESITI

1. Sia data una circonferenza Γ e siano $A\hat{C}B$ e $A\hat{D}B$ angoli alla circonferenza che insistono sull'arco *AB*, con *AC* parallelo a *DB*. Detto *O* il punto di intersezione di *BC* e *AD*, dimostrare che i triangoli *ACO* e *BOD* sono isosceli e simili fra di loro.
2. Lanciando due dadi regolari a sei facce, qual è la probabilità di:
   - ottenere somma 10;
   - ottenere per somma un numero multiplo di 2 o di 3;
   - ottenere per somma un numero multiplo di 2 e di 3.
3. Il centro di una superficie sferica S è il punto di intersezione tra la retta r individuata dalle equazioni
$$\begin{cases} x + y - 2z = 0 \\ 3x + 2y - 1 = 0 \end{cases}$$
e la retta t passante per i punti $A(-2,3,0)$ e $B(2,-1,2)$. La superficie S è inoltre tangente al piano α di equazione $4x - 2y - 4z + 1 = 0$. Qual è l'equazione di *S*?
4. Determinare il valore del parametro reale $k > 1$ in modo che il valor medio della funzione
$$f(x) = \ln(x^3) + \frac{3x - 3}{x}$$
sull'intervallo $[1, k]$ sia uguale a $1 - \ln\left(\frac{5}{2}\right)$.
5. Individuare e classificare i punti in cui la funzione $f(x) = |x - 1| + \sqrt[3]{x^3 + x^2}$ è continua ma non derivabile.
6. Determinare l'equazione di una funzione polinomiale di primo grado $y = f(x)$ tale che
$$i) \int_0^1 f(x)dx = 1;$$
$$ii) \int_1^2 f(x)dx = 2.$$
7. In un sistema di riferimento cartesiano *Oxy*, l'equazione $xy = k$, con *k* parametro reale non nullo, rappresenta un'iperbole equilatera riferita ai propri asintoti. Si dimostri che le rette tangenti nei suoi vertici sono perpendicolari alle bisettrici dei quadranti del sistema di riferimento considerato.
8. Scrive Paolo Giordano ne *La solitudine dei numeri primi*: «I numeri primi sono divisibili soltanto per 1 e per sé stessi. Se ne stanno al loro posto nell'infinita serie dei numeri naturali, schiacciati come tutti fra due, ma un passo in là rispetto agli altri».
Si considerino la funzione $f(x) = x^p$ e la sua derivata $(p-1)$-esima f^{p-1}. Si può dimostrare che, se *p* è un numero primo, allora *p* divide $f^{p-1} + 1$. Verificare la correttezza di tale affermazione per tutti i numeri primi minori di 10.

Durata massima della prova: 6 ore.
È consentito l'uso di calcolatrici scientifiche o grafiche purché non siano dotate della capacità di elaborazione simbolica algebrica e non abbiano la disponibilità di connessione a Internet.
È consentito l'uso del dizionario bilingue (italiano-lingua del paese di provenienza) per i candidati di madrelingua non italiana. Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla consegna della traccia.