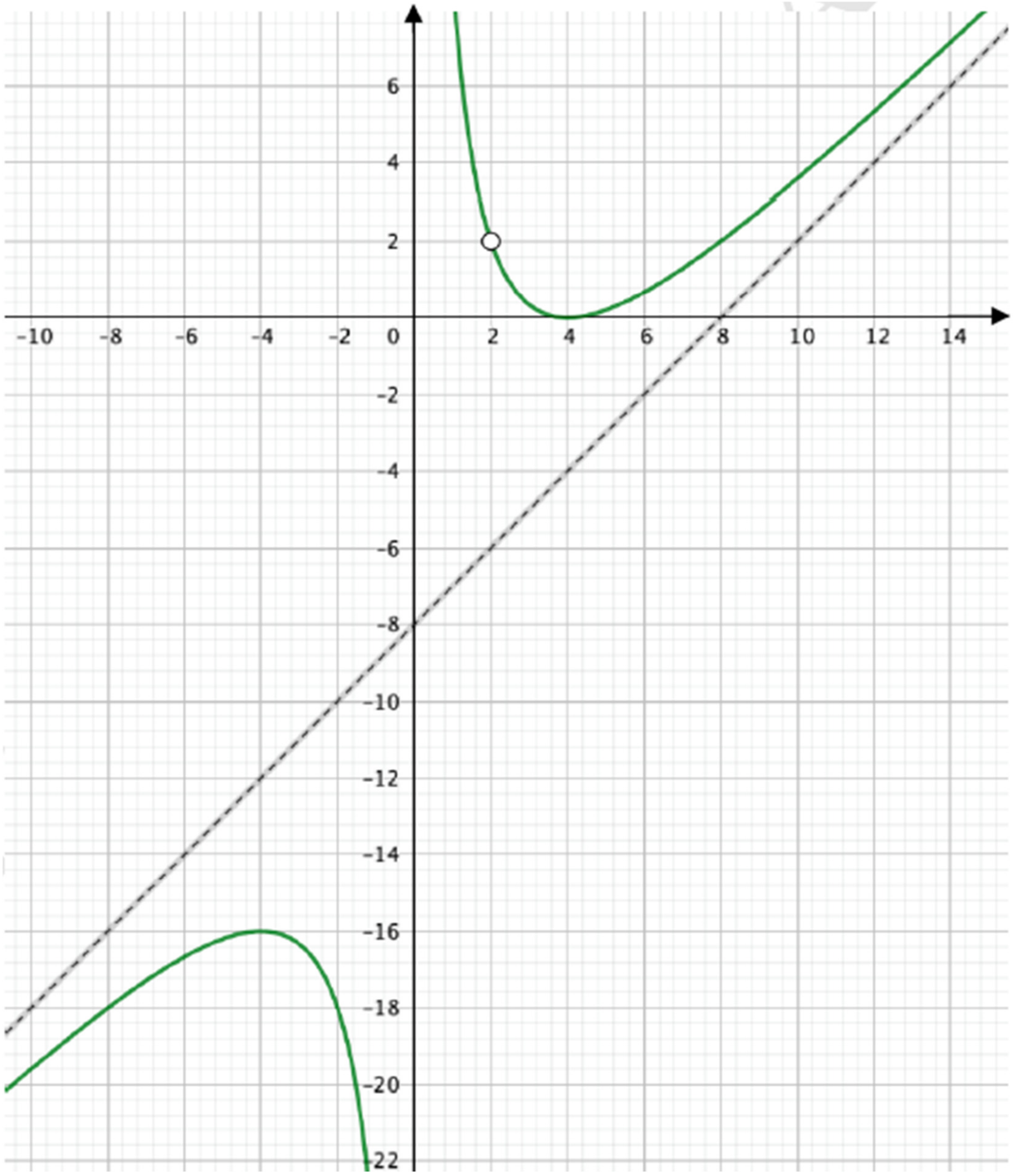
Esame di Stato – sessione suppletiva - seconda prova scritta - Liceo scientifico (tutti gli indirizzi) - Prova scritta di Matematica – 4 luglio 2024

PROBLEMA 1 – soluzione di L. Tomasi

PROBLEMA 1

Si consideri il grafico γ in figura, rappresentativo di una funzione $f(x) = \frac{A(x)}{B(x)}$, dove $A(x)$ e $B(x)$ sono dei polinomi, definita nel dominio $D = (-\infty;\ 0) \cup (0; 2) \cup (2; +\infty)$.



a) Analizzando il grafico, si deducano lo zero, l'insieme immagine e gli estremi relativi di f. Determinare i valori dei limiti agli estremi del dominio e i valori di $\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x}$ e $\lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - x)$. Scrivere le equazioni degli asintoti di f.

b) Supponendo che la funzione f abbia equazione

$$y = \frac{a(x-b)^2(x-c)}{x(x-d)}$$

determinare i valori dei parametri a, b, c, d.

c) Dal grafico γ, dedurre i grafici delle funzioni $f(|x|)$ e $\ln(f(x))$ specificando, per ciascuna, dominio, asintoti, estremi e insieme immagine.

d) Si consideri la funzione $F(x) = \int_3^x f(t)dt$, definita nell'intervallo $[3; 8]$. Tracciare un suo grafico rappresentativo Γ, specificando l'ascissa del punto di flesso e il coefficiente angolare della retta tangente in tale punto.

Soluzione

La funzione $f(x)$ razionale fratta ed ha come dominio $\mathbb{R}\backslash\{0,2\}$. Dal grafico si ricava che l'asse delle ordinate è asintoto verticale per il grafico mentre la retta di equazione $y = x - 8$ è asintoto obliquo. Inoltre la funzione ha una discontinuità eliminabile per $x = 2$. Il grafico probabilmente è quello di un'iperbole non equilatera, in cui è stato tolo il punto di ascissa $x = 2$.

Punto a)

a) Analizzando il grafico, si deducano lo zero, l'insieme immagine e gli estremi relativi di f. Determinare i valori dei limiti agli estremi del dominio e i valori di $\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x}$ e $\lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - x)$. Scrivere le equazioni degli asintoti di f.

Osserviamo che l'analisi del grafico non dà informazioni certe, a meno che queste informazioni non vengano esplicitamente richiamate nel testo.
Probabilmente lo zero (doppio) della funzione si ha per $x = 4$.
L'insieme immagine è formato dalle due semirette $(-\infty, -16] \cup [0, +\infty)$.
Gli estremi relativi sono $x = 4$ (punto di minimo relativo) e $x = -4$ (punto di massimo relativo).
I valori dei limiti agli estremi del dominio sono (probabilmente)

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$$
$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = -\infty$$

ossia l'asse y $(x = 0)$ è asintoto verticale per il grafico della funzione; dal grafico si ricava anche che probabilmente:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$
$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty.$$

Inoltre, dal grafico si ricava che probabilmente

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 1 = m$$
$$\lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - mx) = -8$$

ossia la retta di equazione $y = x - 8$ è asintoto obliquo per il grafico della funzione.

Punto b)

b) Supponendo che la funzione f abbia equazione

$$y = \frac{a(x-b)^2(x-c)}{x(x-d)}$$

determinare i valori dei parametri a, b, c, d.

Dal grafico, si ricava che $d = 2$; infatti la funzione non è definita per $x = 2$.
Inoltre deve essere $b = 4$, perché la funzione ha un punto doppio per $x = 4$.
Infine deve essere $c = d = 2$, perché il grafico della funzione non è definito in $x = 2$ e vogliamo che $x = 2$ sia un punto di discontinuità eliminabile.
Si ottiene quindi

$$y = \frac{a(x-4)^2(x-2)}{x(x-2)} = \frac{a(x-4)^2}{x} \quad (con\ x \neq 2).$$

Imponendo il passaggio per il punto $(-4, -16)$ si ottiene

$$-16 = \frac{a(-4-4)^2}{-4}$$

da cui si ricava

$$a = 1.$$

Quindi la funzione ha come espressione

$$y = \frac{(x-4)^2(x-2)}{x(x-2)} = \frac{(x-4)^2}{x} \quad (con\ x \neq 2).$$

Si può anche scrivere nella forma:

$$f(x) = \frac{x^2 - 8x + 16}{x} = x - 8 + \frac{16}{x} \quad (con\ x \neq 2).$$

Si ha

$$f'(x) = 1 - \frac{16}{x^2} = \frac{x^2 - 16}{x^2} \quad (con\ x \neq 2).$$

che è positiva per $x < -4$ e $x > 4$, negativa o nulla altrimenti. Quindi si conferma che $x = -4$ è un punto di massimo relativo e $x = 4$ è un punto di minimo relativo.
La derivata seconda è:

$$f''(x) = \frac{32}{x^3} \quad (con\ x \neq 2).$$

Quindi la funzione è concava per $x < 0$ e convessa per $0 < x < 2$ e per $x > 2$.
Il grafico è quello assegnato nel testo.

Punto c)

c) Dal grafico γ, dedurre i grafici delle funzioni $f(|x|)$ e $\ln(f(x))$ specificando, per ciascuna, dominio, asintoti, estremi e insieme immagine.

Dal grafico γ, per ottenere il grafico di

$$f(|x|) = \frac{(|x| - 4)^2}{|x|}$$

(supponiamo $x \neq 2$)

$$f(|x|) = \begin{cases} f(x) & se\ \ x > 0 \\ f(-x) & se\ x < 0 \end{cases}$$

Si ottiene

$$f(|x|) = \begin{cases} \dfrac{(x-4)^2}{x} & se \;\; x > 0 \\ \dfrac{(-x-4)^2}{-x} & se \; x < 0 \end{cases}$$

ossia

$$f(|x|) = \begin{cases} \dfrac{(x-4)^2}{x} & se \;\; x > 0 \\ -\dfrac{(x+4)^2}{x} & se \; x < 0 \end{cases}$$

Il dominio di questa funzione è formato dall'insieme dei numeri reali, tranne $x = 0$ e $x = \pm 2$.
La funzione ottenuta è pari. Quindi il grafico, rispetto a quello di $f(x)$, ha una discontinuità eliminabile anche per $x = -2$, e un asintoto obliquo a sinistra, che ha per equazione $y = -x - 8$, e un ulteriore punto di minimo relativo per $x = -4$.
L'insieme immagine di $f(|x|)$ è formato dai numeri reali non negativi.
Il grafico è riportato in figura 1.

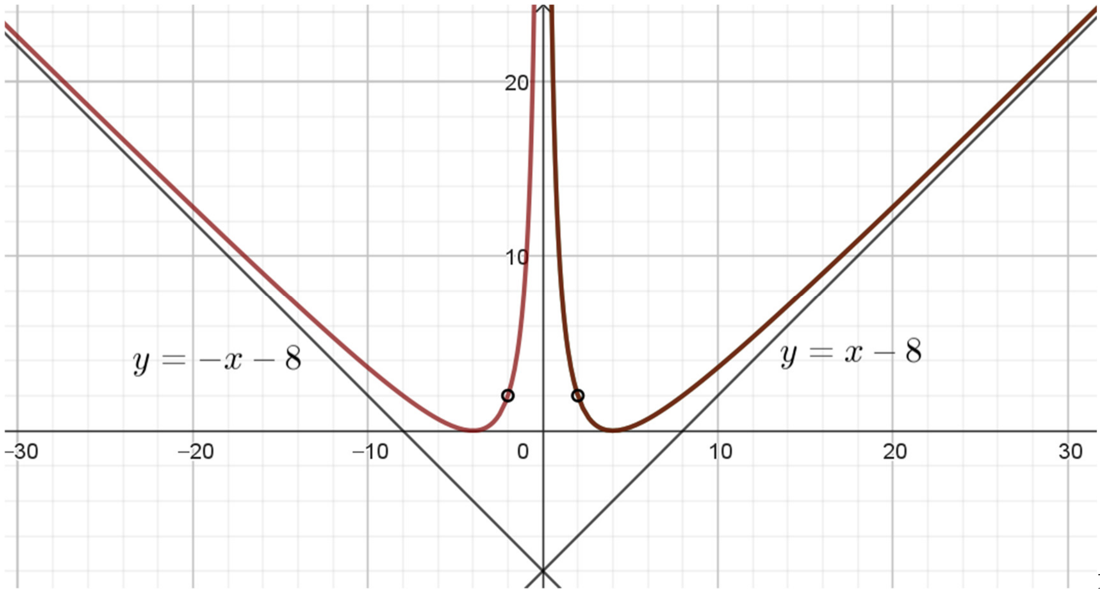


figura 1

Dal grafico γ, per ottenere il grafico di

$$g(x) = \ln(f(x))$$

occorre ipotizzare $f(x) > 0$. Il dominio di questa funzione è pertanto formato dall'insieme dei numeri reali positivi esclusi i punti $x = 2$ (punto di discontinuità eliminabile) e $x = 4$.

$$g(x) = \ln \frac{(x-4)^2(x-2)}{x(x-2)}.$$

Lo zero della funzione $f(x)$, dà luogo a un asintoto verticale, di equazione $x = 4$.
I punti in cui $f(x) = 1$ diventano gli zeri della funzione $g(x)$; si ottiene quindi $x = \frac{9 \pm \sqrt{17}}{2}$.
Negli intervalli in cui $f(x) > 1$, la funzione $g(x) = \ln(f(x))$ è positiva; $g(x) > 0$ nell'intervallo $0 < x < \frac{9-\sqrt{17}}{2}$ (con $x \neq 2$) e nella semiretta $x > \frac{9+\sqrt{17}}{2}$.

Gli asintoti per il grafico della funzione $g(x)$ sono l'asse y e la retta di equazione $x = 4$. Si vede, con il seguente limite, che, a destra, non c'è un asintoto orizzontale

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} \ln(f(x)) = \lim_{x\to+\infty} \ln(f(x)) = +\infty.$$

Poiché, inoltre, si ha

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} g'(x) = 0\,,$$

si conclude che non esiste nemmeno un asintoto obliquo a destra.

L'insieme immagine di $g(x)$ è l'insieme $\mathbb{R}$.

La derivata prima è data da (con $x \neq 2$):

$$g'(x) = \frac{x}{(x-4)^2} \cdot \frac{(x^2-16)}{x^2} = \frac{x+4}{x(x-4)}.$$

La funzione $g(x)$ non ha massimi o minimi relativi.

La derivata seconda è:

$$g''(x) = -\frac{x^2+8x-16}{x^2(x-4)^2}.$$

Il grafico di $g(x)$ ha quindi un flesso (discendente) per $x = 4\left(\sqrt{2}-1\right) \approx 1{,}66$.

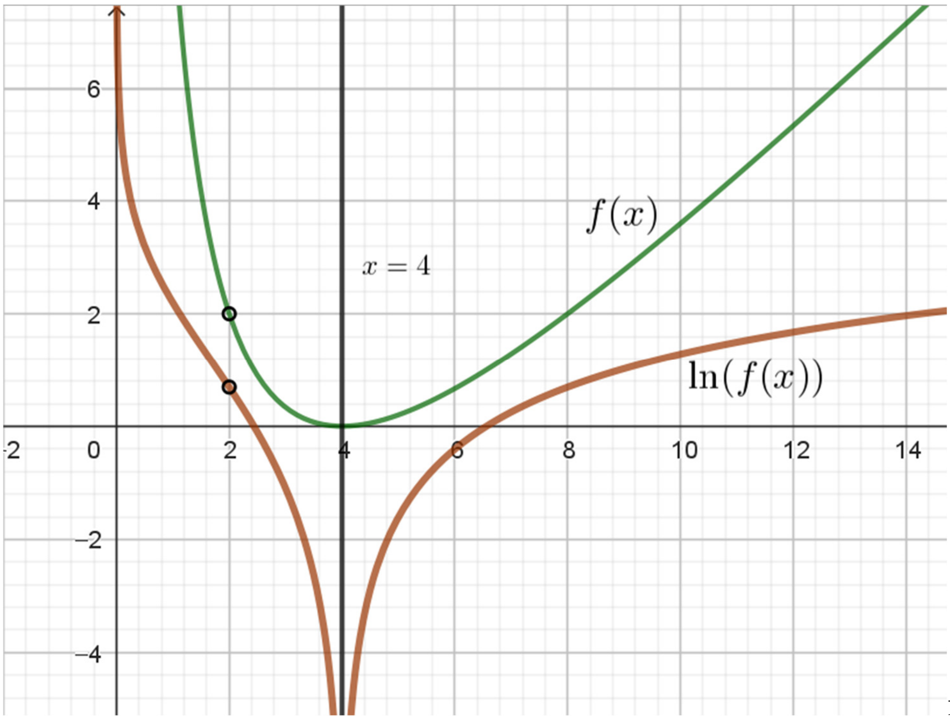


figura 2

Punto d)

d) Si consideri la funzione $F(x) = \int_3^x f(t)dt$, definita nell'intervallo $[3; 8]$. Tracciare un suo grafico rappresentativo Γ, specificando l'ascissa del punto di flesso e il coefficiente angolare della retta tangente in tale punto.

Consideriamo la funzione integrale, definita nell'intervallo chiuso $[3, 8]$:

$$F(x) = \int_3^x f(t)\,dt.$$

Si ha ovviamente $F(3) = 0$.
Poiché nell'intervallo dato si ha $x \neq 2$, possiamo scrivere
$$F(x) = \int_3^x \frac{(t-4)^2}{t}\, dt$$
ossia
$$F(x) = \int_3^x \left(t - 8 + \frac{16}{t}\right) dt = \left[\frac{1}{2}t^2 - 8t - 16\ln t\right]_3^x =$$
$$= \frac{1}{2}x^2 - 8x - 16\ln x - \left(\frac{9}{2} - 24 - 16\ln 3\right).$$
Pertanto
$$F(x) = \frac{1}{2}x^2 - 8x - 16\ln x + \frac{39}{2} + 16\ln 3\,.$$
Il grafico di $F(x)$ è riportato nella figura 3.

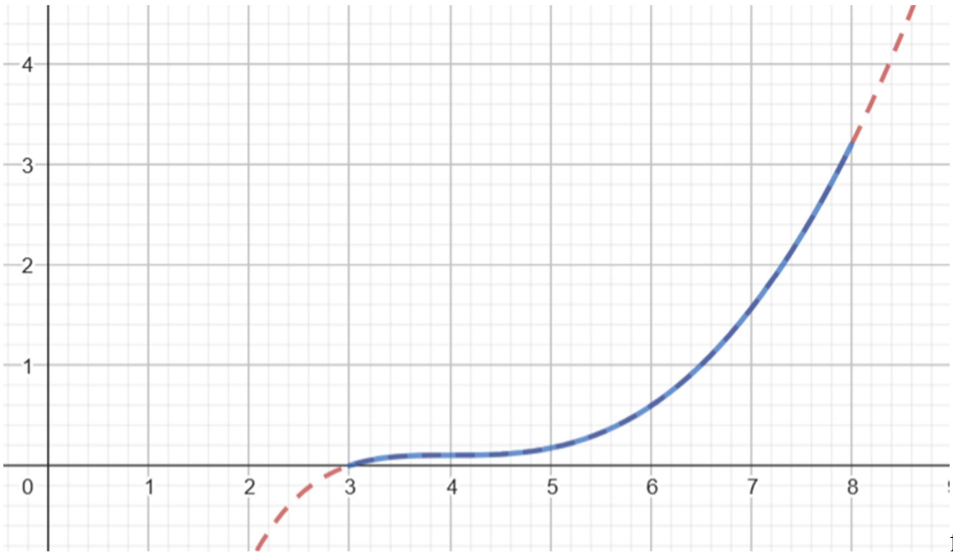


figura 3

Si ha ovviamente
$$F'(x) = f(x)$$
e
$$F''(x) = f'(x) = \frac{x^2 - 16}{x^2} \quad (\text{con } 3 \leq x \leq 8).$$
Pertanto il flesso (ascendente) ha ascissa $x = 4$.
Il coefficiente angolare della retta tangente in tale punto è
$$m = F'(4) = f(4) = 0.$$
Si conclude che $x = 0$ è un punto di flesso con tangente orizzontale per il grafico di $F(x)$.

Tabella di analisi/commento del problema

<table>
<tr><td>Livello di difficoltà stimato</td><td>☐ Basso</td><td>☐ Medio</td><td>☒ Alto</td><td colspan="2">☐ Molto alto</td></tr>
<tr><td>Formulazione del problema</td><td>☐ Scorretta</td><td>☐ Ambigua</td><td>☐ Poco chiara</td><td>☒ Corretta</td><td>☐ Molto chiara</td></tr>
<tr><td>Si tratta di un problema contestualizzato</td><td>☒ No</td><td>☐ Parzialmente</td><td>☐ In modo accettabile</td><td colspan="2">☐ Ben contestualizzato</td></tr>
<tr><td>L'argomento è presente nelle Indicazioni Nazionali</td><td colspan="2">☒ Sì</td><td>☐ No</td><td colspan="2">☐ Non è esplicitato / Non è chiaro</td></tr>
<tr><td>L'argomento è presente nel QdR di Matematica?</td><td colspan="2">☒ Sì</td><td>☐ No</td><td colspan="2">☐ Non è esplicitato / Non è chiaro</td></tr>
<tr><td>Di solito, viene svolto nella pratica didattica usuale?</td><td colspan="2">☒ Sì</td><td>☐ No</td><td colspan="2">☐ Non sempre</td></tr>
<tr><td>È un argomento presente nei libri di testo di Matematica?</td><td colspan="2">☐ No</td><td>☐ Non sempre</td><td colspan="2">☒ Sempre</td></tr>
<tr><td>Verifica conoscenze / abilità/ competenze fondamentali?</td><td colspan="2">☒ Sì</td><td>☐ Solo parzialmente</td><td colspan="2">☐ No</td></tr>
<tr><td>Per la risoluzione del problema è utile una calcolatrice grafica?</td><td colspan="2">☒ Sì</td><td>☐ No</td><td colspan="2">☐ Parzialmente</td></tr>
</table>