Esame di Stato – sessione suppletiva - seconda prova scritta - Liceo scientifico (tutti gli indirizzi) - Prova scritta di Matematica – 4 luglio 2024

PROBLEMA 2 – soluzione di L. Tomasi

Si consideri la famiglia di curve $f_a(x) = \frac{x^2-1}{e^{ax}}$, con a parametro reale non nullo, e si indichi con Γ_a il grafico di f_a.

a) Verificare che tutti i grafici Γ_a hanno tre punti in comune e scrivere le loro coordinate.

b) Al variare del parametro a, individuare gli intervalli di monotonia di Γ_a, le ascisse degli estremi relativi e dei flessi.

c) Determinare i valori del parametro a in modo che il punto F, intersezione di Γ_a con l'asse delle ordinate, sia un punto di flesso. In corrispondenza di tali valori, scrivere le equazioni delle rette tangenti in F.

d) Dimostrare che, per ogni valore di $a \neq 0$, le curve Γ_a e Γ_{-a} sono simmetriche tra loro rispetto all'asse delle ordinate. Determinare l'area della regione finita di piano delimitata dai grafici Γ_1 e Γ_{-1}.

Soluzione

Consideriamo la famiglia di funzioni (con a parametro reale non nullo):

$$f_a(x) = \frac{x^2 - 1}{e^{ax}}.$$

Queste funzioni hanno tutte come dominio $\mathbb{R}$ ed essendo il denominatore sempre positivo, sono positive all'esterno dell'intervallo $[-1,1]$.

Sono funzioni derivabili (e quindi anche continue) in tutto il dominio.

Punto a)

a) Verificare che tutti i grafici Γ_a hanno tre punti in comune e scrivere le loro coordinate.

Tutte le curve passano per i punti $(-1,0)$ e $(1,0)$. Dimostriamo che passano anche per un altro punto. Considerate due generiche curve della famiglia, la loro intersezione è data dal sistema

$$\begin{cases} y = \dfrac{x^2 - 1}{e^{ax}} \\ y = \dfrac{x^2 - 1}{e^{a'x}} \end{cases}$$

Le due curve si intersecano per

$$\frac{x^2 - 1}{e^{ax}} = \frac{x^2 - 1}{e^{a'x}}$$

$$(x^2 - 1)\left(e^{a'x} - e^{ax}\right) = 0$$

L'equazione $x^2 - 1 = 0$ ha per soluzioni $x = \pm 1$ e

$$e^{a'x} = e^{ax}$$

che fornisce

$$ax = a'x$$

che ha come soluzione $x = 0$.
Si ottengono quindi i punti di coordinate: $(-1,0), (0,-1)$ e $(1,0)$.

Punto b)

b) Al variare del parametro a, individuare gli intervalli di monotonia di Γ_a, le ascisse degli estremi relativi e dei flessi.

Osserviamo, che il grafico che si ottiene per il parametro a è simmetrico, rispetto all'asse delle ordinate, del grafico che si ottiene per $-a$.

Supponiamo quindi $a > 0$.

La derivata prima della funzione è

$$f_a'(x) = \frac{2xe^{ax} - (x^2-1)ae^{ax}}{e^{2ax}} = \frac{e^{ax}(2x - ax^2 + a)}{e^{2ax}} = \frac{2x - ax^2 + a}{e^{ax}}$$

Poiché il denominatore è sempre positivo, il segno della derivata prima dipende soltanto da quello della funzione polinomiale $-ax^2 + 2x + a$. Risolviamo l'equazione al variare del parametro $a > 0$.

$$ax^2 - 2x - a = 0$$

Si ha

$$\frac{\Delta}{4} = 1 + a^2$$

che è positivo per ogni parametro a.
Pertanto le soluzioni sono

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1+a^2}}{a}.$$

Se $a > 0$, per valori esterni all'intervallo delle radici la derivata prima è negativa e quindi la funzione è decrescente. Il punto $x = \frac{1-\sqrt{1+a^2}}{a} < 0$ è un punto di minimo relativo (e, si trova, anche assoluto) e $x = \frac{1+\sqrt{1+a^2}}{a} > 0$ è un punto di massimo relativo.

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1+a^2}}{a}.$$

Se $a < 0$, per valori esterni all'intervallo delle radici la derivata prima è positiva e quindi la funzione è crescente. Il punto $x = \frac{1-\sqrt{1+a^2}}{a} > 0$ è un punto di massimo e $x = \frac{1+\sqrt{1+a^2}}{a} < 0$ è un punto di minimo relativo (e, si trova, anche assoluto).

Ricaviamo ora la derivata seconda:

$$f_a''(x) = \frac{2x - ax^2 + a}{e^{ax}} = \frac{(2-2ax)e^{ax} - (2x - ax^2 + a)ae^{ax}}{e^{2ax}} =$$

$$f_a''(x) = \frac{e^{ax}(2 - 2ax - 2ax + a^2x^2 - a^2)}{e^{2ax}} = \frac{a^2x^2 - 4ax + 2 - a^2}{e^{ax}} =$$

$$f_a''(x) = \frac{a^2x^2 - 4ax + 2 - a^2}{e^{ax}}.$$

Il segno della derivata seconda dipende soltanto da segno del numeratore, ossia dal segno della funzione polinomiale di secondo grado $a^2x^2 - 4ax + 2 - a^2$.

Discutiamo l'equazione parametrica:

$$a^2x^2 - 4ax + 2 - a^2 = 0$$

Si ha

$$\frac{\Delta}{4} = 4a^2 - a^2(2 - a^2) = 2a^2 + a^4 = a^2(2 + a^2)$$

Che è sempre positivo, essendo per ipotesi il parametro $a \neq 0$.

La derivata seconda si annulla per

$$x = \frac{2a \pm |a|\sqrt{2 + a^2}}{a^2}.$$

Per $a > 0$ i punti di flesso hanno ascisse (di segno opposto)

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{2 + a^2}}{a}.$$

Per $a < 0$ i punti di flesso hanno ascisse (di segno opposto)

$$x = \frac{2 \mp \sqrt{2 + a^2}}{a}.$$

Quindi tutte le curve (con $a \neq 0$) hanno due flessi.

Per ogni valore del parametro $a \neq 0$ la curva è convessa per valori esterni all'intervallo dei punti di flesso.
Nella figura 1 disegniamo il grafico della funzione ottenuta per $a = 1$ e quella ottenuta per $a = -1$.

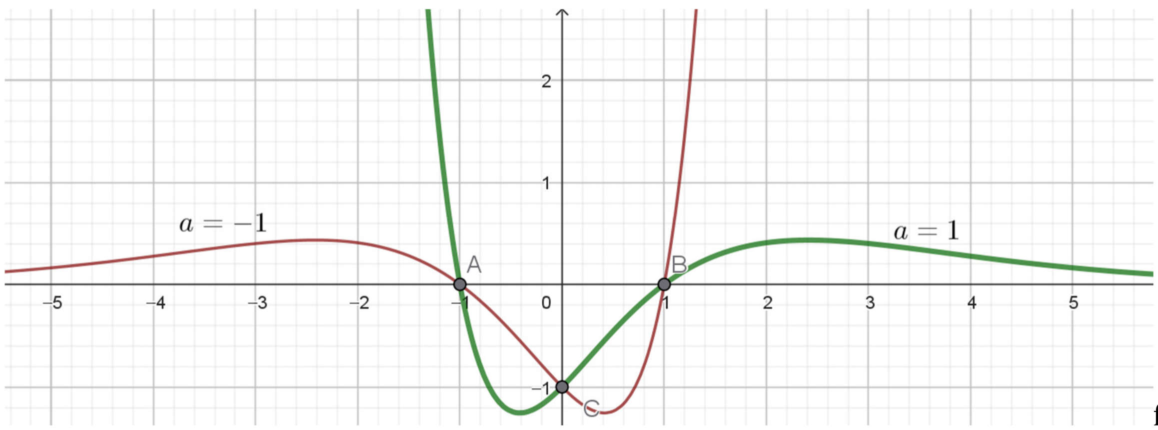

figura 1

Punto c)

c) Determinare i valori del parametro a in modo che il punto F, intersezione di Γ_a con l'asse delle ordinate, sia un punto di flesso. In corrispondenza di tali valori, scrivere le equazioni delle rette tangenti in F.

Il punto di intersezione con l'asse delle ordinate ha coordinate $(0, -1)$. Questo punto è di flesso se

$$\frac{2 \pm \sqrt{2+a^2}}{a} = 0$$

ossia

$$2 \pm \sqrt{2+a^2} = 0$$

che fornisce

$$2 - \sqrt{2+a^2} = 0$$
$$2 = \sqrt{2+a^2},$$

Elevando al quadrato si ottiene:

$$a^2 + 2 = 4$$

e quindi $a = \pm\sqrt{2}$ (figura2).

Per $a = \sqrt{2}$, i flessi hanno ascisse $x = 0$ (discendente) e $x = 2\sqrt{2}$ (ascendente).

Per $a = -\sqrt{2}$, i flessi hanno ascisse $x = -2\sqrt{2}$ (discendente) e $x = 0$ (ascendente).

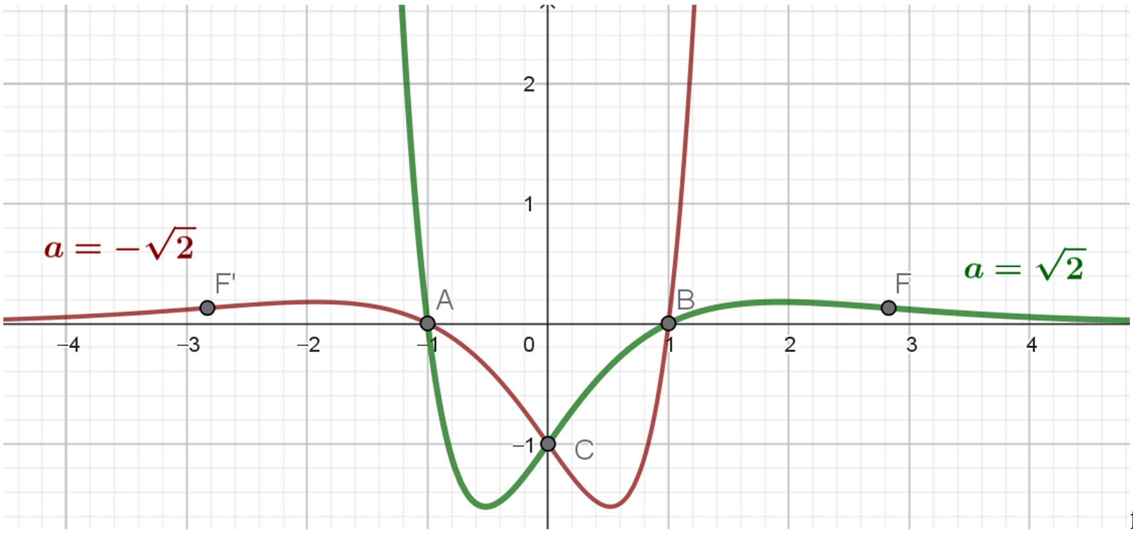

figura 2

Punto d)

d) Dimostrare che, per ogni valore di $a \neq 0$, le curve Γ_a e Γ_{-a} sono simmetriche tra loro rispetto all'asse delle ordinate. Determinare l'area della regione finita di piano delimitata dai grafici Γ_1 e Γ_{-1}.

Abbiamo già osservato questa proprietà nel punto iniziale. Ora lo dimostriamo.

Data la funzione

$$f_a(x) = \frac{x^2 - 1}{e^{ax}}$$

si ha

$$f_{-a}(-x) = \frac{x^2-1}{e^{-a(-x)}} = \frac{x^2-1}{e^{ax}} = f_a(x).$$

Quindi

$$f_{-a}(-x) = f_a(x)$$

Quindi applicando alla Γ_a la simmetria assiale rispetto all'asse *y*

$$\begin{cases} x' = -x \\ y' = y \end{cases}$$

si ottiene la curva Γ_{-a}.

Per determinare l'area della regione finita di piano compresa tra le due curve Γ_1 e Γ_{-1}, data la simmetria rispetto all'asse *y* delle due curve (figura 3), basta calcolare il seguente integrale

$$S = 2\int_0^1 \left(\frac{x^2-1}{e^x} - \frac{x^2-1}{e^{-x}}\right)dx = 2\int_0^1 \left((x^2-1)e^{-x} - (x^2-1)e^x\right)dx =$$

$$= 2\int_0^1 (x^2-1)(e^{-x}-e^x)\,dx.$$

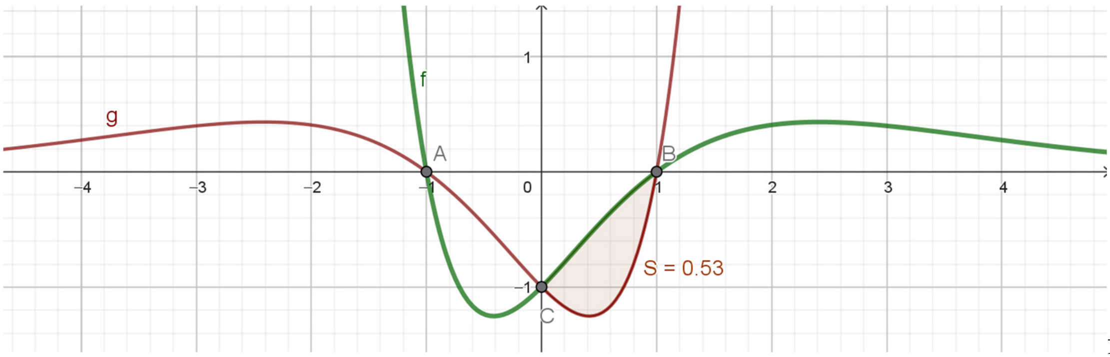

figura 3

Calcoliamo prima, per parti (applicato due volte), il seguente integrale indefinito:

$$\int (x^2-1)(e^{-x}-e^x)dx = (x^2-1)(-e^{-x}-e^x) - \int 2x(-e^{-x}-e^x)dx =$$

$$= (x^2-1)(-e^{-x}-e^x) + 2\int x(e^{-x}+e^x)dx =$$

$$= (x^2-1)(-e^{-x}-e^x) + 2\left(x(-e^{-x}+e^x) - \int(-e^{-x}+e^x)dx\right) =$$

$$= (1-x^2)(e^x+e^{-x}) + 2x(e^x-e^{-x}) - 2(e^{-x}+e^x) + c =$$

$$= (-1-x^2)(e^x+e^{-x}) + 2x(e^x-e^{-x}) + c.$$

Ritornando all'integrale definito, si ha quindi:

$$S = 2[(-1-x^2)(e^x+e^{-x}) + 2x(e^x-e^{-x})]_0^1 =$$

$$= 2\left[-2\left(e+\frac{1}{e}\right)+2\left(e-\frac{1}{e}\right)-(-2)\right] = 2\left(-2e-\frac{2}{e}+2e-\frac{2}{e}+2\right) =$$

$$= 2\left(2-\frac{4}{e}\right) \approx 1{,}057.$$

Tabella di analisi/commento del problema

Livello di difficoltà stimato	☐ Basso	☐ Medio	☒ Alto	☐ Molto alto	
Formulazione del problema	☐ Scorretta	☐ Ambigua	☐ Poco chiara	☒ Corretta	☐ Molto chiara
Si tratta di un problema contestualizzato	☒ No	☐ Parzialmente	☐ In modo accettabile	☐ Ben contestualizzato	
L'argomento è presente nelle Indicazioni Nazionali	☒ Sì	☐ No	☐ Non è esplicitato / Non è chiaro		
L'argomento è presente nel QdR di Matematica?	☒ Sì	☐ No	☐ Non è esplicitato / Non è chiaro		
Di solito, viene svolto nella pratica didattica usuale?	☒ Sì	☐ No	☐ Non sempre		
È un argomento presente nei libri di testo di Matematica?	☐ No	☐ Non sempre	☒ Sempre		
Verifica conoscenze / abilità/ competenze fondamentali?	☒ Sì	☐ Solo parzialmente	☐ No		
Per la risoluzione del problema è utile una calcolatrice grafica?	☒ Sì	☐ No	☐ Parzialmente		