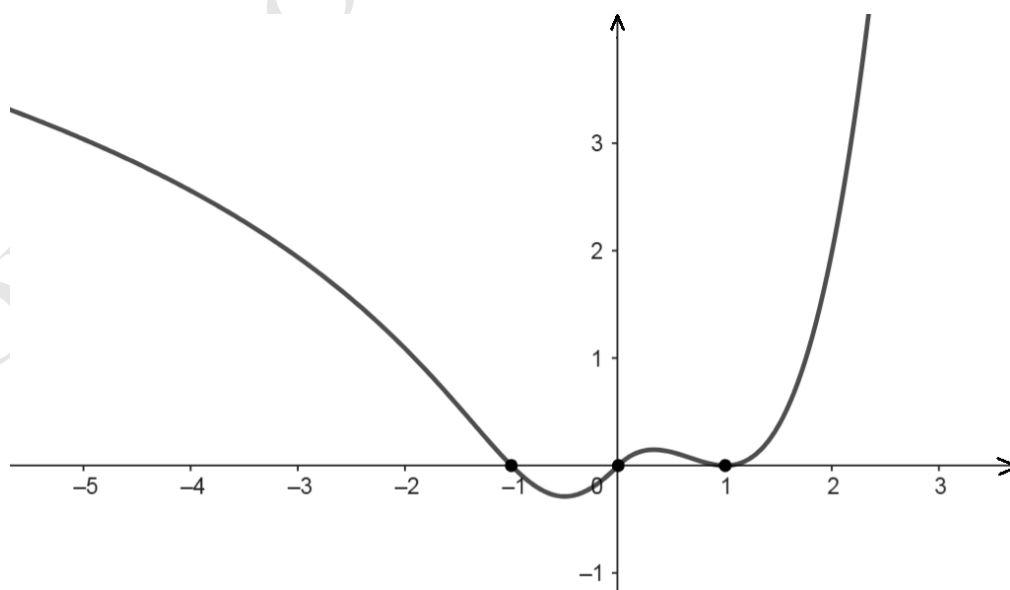


*Ministero dell'istruzione e del merito***A002 - ESAME DI STATO CONCLUSIVO DEL SECONDO CICLO DI ISTRUZIONE****Testo valevole per tutti i seguenti indirizzi:**LI02, LI03, LI15, LI1S, LI22, LI23, LI31, LI32, LIA2, LIAO,
LIB2, LIC2, LID2, LII2, LII3, LII4, LIIS, LIS2, EA02, EA10**Disciplina: MATEMATICA*****Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 4 quesiti del questionario.*****PROBLEMA 1**

Si consideri la famiglia di funzioni $f_a(x) = (x^2 + 1)e^{ax+1}$, con a parametro reale non nullo, e si indichi con γ_a il grafico di f_a .

- Al variare di a , stabilire il numero degli estremi relativi e dei flessi. Determinare il valore positivo di a in modo che il grafico abbia un flesso a tangente orizzontale.
- Studiare la funzione f_1 e tracciare γ_1 . Spiegare perché f_1 è invertibile in $\mathbb{R}$ e indicare con g la sua funzione inversa. Specificare il dominio di g e determinare $g'(e)$.
- Si consideri la funzione $F(t) = \int_t^0 f_1(x)dx$, con $t \leq 0$. Fornire il significato geometrico della funzione $F(t)$ e verificare che $\lim_{t \rightarrow -\infty} F(t) = 3e$.
- Sia P_a un punto sulla curva γ_a , di ascissa $x < 0$, nonché Q_a ed R_a le sue proiezioni sugli assi coordinati. Determinare, se esiste, il valore del parametro a in corrispondenza del quale l'area del rettangolo $P_aQ_aOR_a$ assume valore massimo se $x = -2$.

PROBLEMA 2



Ministero dell'istruzione e del merito

A002 - ESAME DI STATO CONCLUSIVO DEL SECONDO CICLO DI ISTRUZIONE

Il grafico γ in figura rappresenta la funzione f così definita:

$$f(x) = \begin{cases} \ln(P_2(x)) & \text{se } x < 0 \\ P_3(x) & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

dove $P_2(x)$ e $P_3(x)$ sono, rispettivamente, polinomi di 2° e di 3° grado.

- a) Utilizzando le informazioni desumibili dal grafico e tenendo conto che γ è tangente alla retta $y = x$ nell'origine e all'asse delle ascisse in $x = 1$, individuare i polinomi $P_2(x)$ e $P_3(x)$.

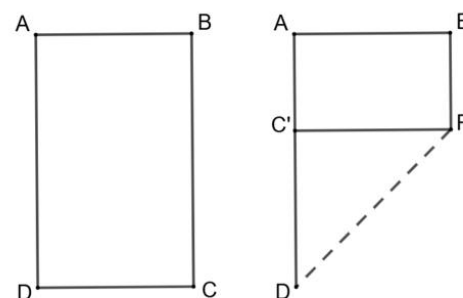
D'ora in avanti, si assuma che

$$f(x) = \begin{cases} \ln(x^2 + x + 1) & \text{se } x < 0 \\ x^3 - 2x^2 + x & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

- b) Determinare le coordinate dei punti stazionari e le ascisse dei punti di flesso di f . Al variare del parametro reale k , stabilire il numero delle soluzioni dell'equazione $f(x) = k$.
- c) Per n intero positivo, determinare $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x^n}$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x^n}$. Verificare, inoltre, che esiste un unico valore di n tale che il $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^n}$ assuma un valore finito non nullo.
- d) Determinare il rapporto tra le aree delle regioni limitate di piano R_1 e R_2 contenute nel I quadrante e così definite:
- R_1 compresa tra γ e la retta di equazione $y = x$;
 - R_2 compresa tra γ e l'asse delle ascisse.

QUESITI

1. Un rettangolo si dice aureo se il rapporto fra i suoi lati è uguale a $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Sia dato un foglio la cui forma è un rettangolo aureo e lo si indichi con $ABCD$. Dopo aver piegato il foglio come mostrato in figura, verificare che anche il rettangolo $ABPC'$ è aureo. Successivamente, determinare la lunghezza di AD , sapendo che $AC' = 40$ cm.
2. Zoe sfida Eva al seguente gioco: lanciando un dado regolare a sei facce, Zoe segna un punto quando esce il 5 oppure il 6, in caso contrario è Eva a segnare un punto. Vince chi arriva prima a 3 punti. Qual è la probabilità che Zoe vinca con il punteggio 3 - 1?
3. Ci sono 9 matite di 9 colori diversi e 3 cassette indicate con A, B, C. Se 4 matite devono essere messe nel cassetto A, 2 nel cassetto B e 3 nel cassetto C, quante sono le possibili collocazioni?



*Ministero dell'istruzione e del merito***A002 - ESAME DI STATO CONCLUSIVO DEL SECONDO CICLO DI ISTRUZIONE**

4. Nello spazio con riferimento cartesiano ortogonale $Oxyz$ sono date le equazioni di due rette:

$$r: \begin{cases} y - z - 1 = 0 \\ x - z = 4 \end{cases} \quad s: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = t \\ z = 3 - t \end{cases}$$

Dopo aver dimostrato che le due rette sono incidenti, determinare l'equazione del piano che le contiene. Verificare che la sfera di centro $C = (5, -7, 2)$ passante per il punto $P = (1, -1, 0)$ è tangente al piano suddetto.

5. Il triangolo di Reuleaux è una figura utilizzata come elemento architettonico in diverse chiese gotiche. Si costruisce a partire da un triangolo equilatero di lato L , puntando il compasso in ogni suo vertice e tracciando l'arco minore di circonferenza che ha per estremi gli altri due vertici. Il triangolo di Reuleaux è la regione di piano delimitata dai tre archi tracciati.

Dimostrare che il suo contorno ha lunghezza πL ed esprimere la sua area in funzione di L .

6. Sapendo che $f(x) = \sin^2(x) - \sin(x)\cos(x)$, determinare gli zeri della funzione $g(x) = \frac{e^{f(x)} - 1}{x^2}$ nell'intervallo $[-\pi; \pi]$,

7. Determinare le coordinate del punto T sulla parabola p di equazione $y = x^2 + x + 3$, nel quale la retta tangente a p risulta parallela alla retta r di equazione $3x + 2y - 1 = 0$. Spiegare perché, sulla parabola p , il punto T è quello che si trova alla minima distanza dalla retta r .

8. Sia data la funzione $f(x) = ax \ln(x) + \frac{b}{x^4} + c \sin\left(\frac{1}{x}\right)$, con $a, b, c \in \mathbb{R}$. Determinare i parametri a, b, c in modo che:

- il $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ esista ed abbia un valore finito;
- $\int_1^e f(x) dx = 1$.

Durata massima della prova: 6 ore.

È consentito l'uso di calcolatrici scientifiche o grafiche purché non siano dotate della capacità di elaborazione simbolica algebrica e non abbiano la disponibilità di connessione a Internet.

È consentito l'uso del dizionario bilingue (italiano-lingua del paese di provenienza) per i candidati di madrelingua non italiana. Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla consegna della traccia.