Esame di Stato – sessione suppletiva - seconda prova scritta - Liceo scientifico (tutti gli indirizzi) - Prova scritta di Matematica – 3 luglio 2025

PROBLEMA 1 – soluzione a cura di L. Tomasi

PROBLEMA 1

Si consideri la famiglia di funzioni $f_a(x) = (x^2+1)e^{ax+1}$, con a parametro reale non nullo, e si indichi con γ_a il grafico di f_a.

a) Al variare di a, stabilire il numero degli estremi relativi e dei flessi. Determinare il valore positivo di a in modo che il grafico abbia un flesso a tangente orizzontale.

b) Studiare la funzione f_1 e tracciare γ_1. Spiegare perché f_1 è invertibile in $\mathbb{R}$ e indicare con g la sua funzione inversa. Specificare il dominio di g e determinare $g'(e)$.

c) Si consideri la funzione $F(t) = \int_t^0 f_1(x)dx$, con $t \leq 0$. Fornire il significato geometrico della funzione $F(t)$ e verificare che $\lim_{t\to-\infty} F(t) = 3e$.

d) Sia P_a un punto sulla curva γ_a, di ascissa $x < 0$, nonché Q_a ed R_a le sue proiezioni sugli assi coordinati. Determinare, se esiste, il valore del parametro a in corrispondenza del quale l'area del rettangolo $P_aQ_aOR_a$ assume valore massimo se $x = -2$.

Soluzione

Le funzioni $f_a(x) = (x^2+1)e^{ax+1}$, con a parametro reale non nullo, hanno tutte per dominio $\mathbb{R}$ e sono sempre positive e intersecano tutte l'asse delle *y* nel punto $A(0, e)$. Ogni funzione è derivabile per ogni numero reale e quindi continua.

Punto a)

a) Al variare di a, stabilire il numero degli estremi relativi e dei flessi. Determinare il valore positivo di a in modo che il grafico abbia un flesso a tangente orizzontale.

Calcoliamo la derivata prima:

$$f_a'(x) = 2xe^{ax+1} + (x^2+1)ae^{ax+1} = e^{ax+1}(ax^2+2x+a).$$

Il segno della derivata prima dipende soltanto dal segno di ax^2+2x+a. Esaminiamo quindi l'equazione

$$ax^2+2x+a = 0.$$

Si ha

$$\frac{\Delta}{4} = 1 - a^2.$$

Si ha $\frac{\Delta}{4} > 0$ per $-1 < a < 1$.

Tenuto conto che deve essere $a \neq 0$, distinguiamo i casi $0 < a < 1$ da $-1 < a < 0$.

Per $0 < a < 1$, l'equazione ha due soluzioni

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1-a^2}}{a}$$

entrambe negative. Quindi la derivata prima è positiva per valori esterni all'intervallo delle radici e $x = \frac{-1-\sqrt{1-a^2}}{a}$ è un punto di massimo relativo e $x = \frac{-1+\sqrt{1-a^2}}{a}$ è di minimo relativo (figura 1).

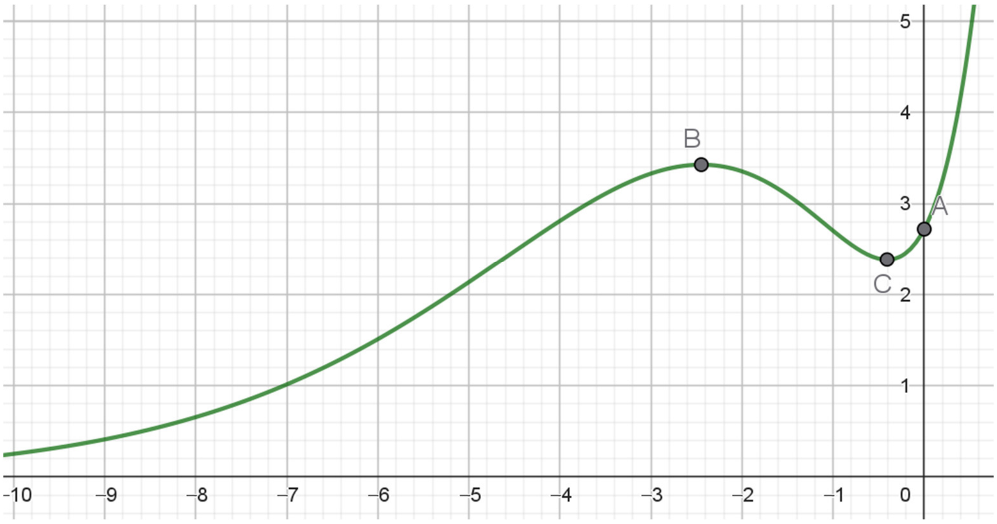

figura 1

Per $-1 < a < 0$, l'equazione ha le due soluzioni

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1-a^2}}{a}$$

entrambe positive. Quindi la derivata prima è negativa per valori esterni all'intervallo delle radici e $x = \frac{-1+\sqrt{1-a^2}}{a}$ è un punto di minimo relativo e $x = \frac{-1-\sqrt{1-a^2}}{a}$ è di massimo relativo (figura 2).

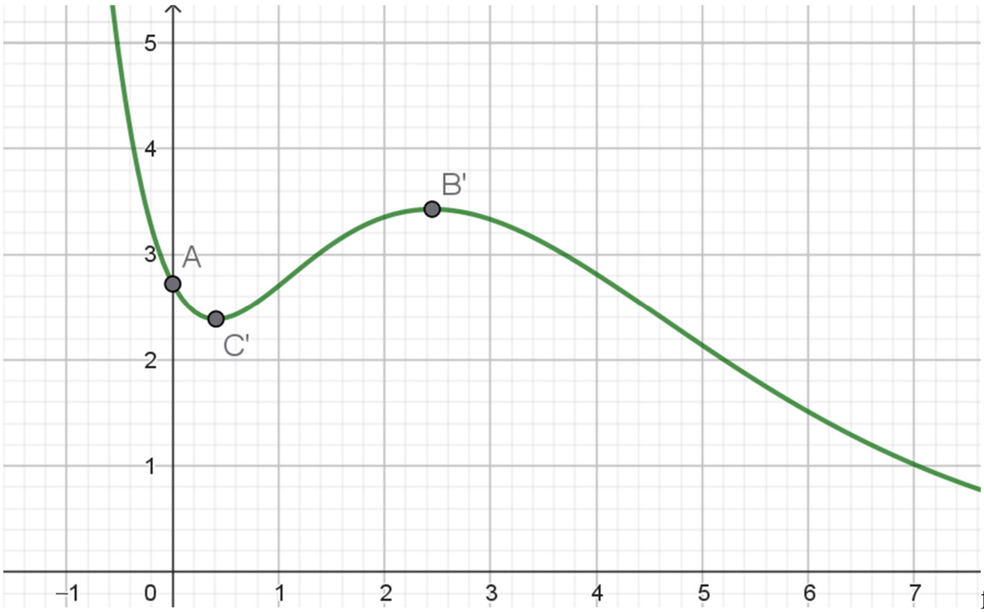

figura 2

Si noti che il grafico ottenuto per un valore del parametro $-1 < a < 0$ (figura 2) è simmetrico del grafico precedente (figura1) rispetto all'asse *y*, perché si ottiene cambiando il segno al parametro *a* (figura 3). Per esempio, il grafico che si ottiene ponendo $a = -\frac{3}{4}$ è simmetrico, rispetto all'asse *y*, del grafico che si ottiene per $a = \frac{3}{4}$.

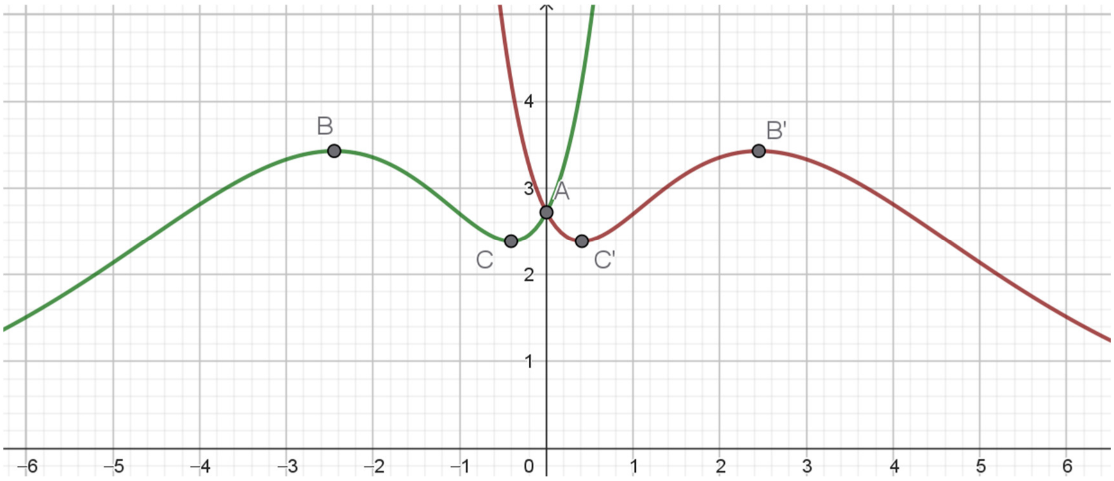

figura 3

Per $\frac{\Delta}{4} = 0$ si ha $a = \pm 1$. In questi casi si ottiene un'unica soluzione dell'equazione che sarà

$$x = -1 \quad \text{se} \;\; a = 1$$

e in questo caso la derivata è sempre positiva, tranne per $x = -1$ (che sarà pertanto un punto di flesso con tangente orizzontale) e la funzione è crescente in tutto il dominio;
oppure

$$x = 1 \quad \text{se} \;\; a = -1$$

e in questo caso la derivata è sempre negativa, tranne per $x = 1$ (che sarà pertanto un punto di flesso con tangente orizzontale) e la funzione è decrescente in tutto il dominio.

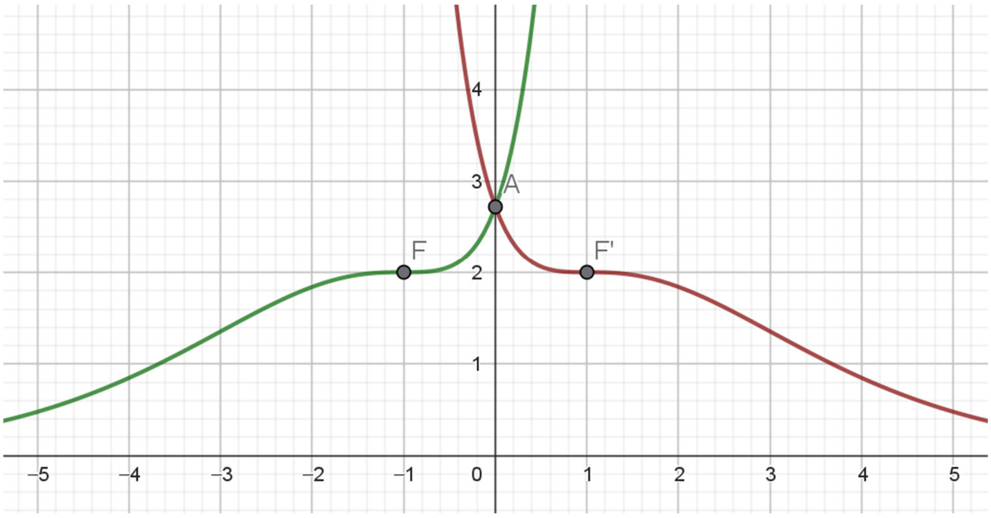

figura 4

Se $a > 1$, la derivata prima è sempre positiva e la funzione è crescente in tutto il dominio.
Se $a < 1$, la derivata prima è sempre negativa e la funzione è decrescente in tutto il dominio.

Calcoliamo ora la derivata seconda:

$$f_a''(x) = ae^{ax+1}(ax^2 + 2x + a) + e^{ax+1}(2ax + 2) =$$
$$= e^{ax+1}(a^2x^2 + 2ax + a^2 + 2ax + 2) = e^{ax+1}(a^2x^2 + 4ax + a^2 + 2)$$

Il segno della derivata seconda dipende soltanto dal segno della funzione polinomiale quadratica:

$$a^2x^2 + 4ax + a^2 + 2.$$

Discutiamo pertanto l'equazione $a^2x^2 + 4ax + a^2 + 2 = 0$ al variare del parametro *a*.
Si ha

$$\frac{\Delta}{4} = 4a^2 - a^2(a^2+2) = a^2(2-a^2).$$

Se $\frac{\Delta}{4} > 0$, ossia per $-\sqrt{2} < a < \sqrt{2}$ e $a \neq 0$, la curva ha due flessi, che hanno per ascisse

$$x = \frac{-2a \pm |a|\sqrt{2-a^2}}{a^2}$$

Per $0 < a < \sqrt{2}$, si ottengono le ascisse (dei flessi) entrambe negative:

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2-a^2}}{a}.$$

Per $-\sqrt{2} < a < 0$, si ottengono le ascisse (dei flessi) entrambe positive:

$$x = \frac{-2 \mp \sqrt{2-a^2}}{a}.$$

Se $\frac{\Delta}{4} = 0$, ossia per $a = \pm\sqrt{2}$ e $a \neq 0$, la curva ha un solo flesso, che ha per ascissa rispettivamente $x = -\sqrt{2}$ oppure $x = \sqrt{2}$.

Se $\frac{\Delta}{4} < 0$, ossia per $a < -\sqrt{2}$ oppure per $a > \sqrt{2}$, la curva non ha flessi.

La curva ha un flesso con tangente orizzontale, con $a > 0$, solo nel caso in cui $a = 1$, come si è visto nello studio della derivata prima. Si ottiene quindi la funzione

$$f_1(x) = (x^2+1)e^{x+1}$$

Punto b)

b) Studiare la funzione f_1 e tracciare γ_1. Spiegare perché f_1 è invertibile in $\mathbb{R}$ e indicare con g la sua funzione inversa. Specificare il dominio di g e determinare $g'(e)$.

Nel punto precedente abbiamo ottenuto la funzione

$$f_1(x) = (x^2+1)e^{x+1}$$

che sappiamo, fin dall'inizio, essere definita e derivabile (quindi continua) su tutti i reali. Abbiamo già osservato che la funzione è sempre positiva e che interseca l'asse delle *y* nel punto $A(0,e)$.
Calcolandone i limiti agli estremi del dominio, si trova

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} (x^2+1)e^{x+1} = \text{forma indet.}\, \infty \cdot 0 =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+1}{e^{-x-1}} = \text{forma indet.} \frac{\infty}{\infty}$$

e usando la regola di De L'Hopital per due volte

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+1}{e^{-x-1}} = = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x}{-e^{-x-1}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2}{e^{-x-1}} = 0\,.$$

Quindi l'asse delle ascisse è asintoto sinistro per il grafico della funzione.
Inoltre si ha

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} (x^2+1)e^{x+1} = +\infty\,,$$

ma si trova immediatamente che a destra oltre a non esserci un asintoto orizzontale, non c'è neppure un asintoto obliquo, perché il limite $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$.

La derivata prima è

$$f_1{}'(x) = (x+1)^2\, e^{x+1}$$

E sappiamo che è sempre positiva o nulla, nel punto $x = -1$ (flesso con tangente orizzontale).
La derivata seconda è:

$$f_1''(x) = (x^2 + 4x + 3)\, e^{x+1} = (x+1)(x+3)e^{x+1}$$

Quindi la funzione ha due flessi, F di ascissa $x = -1$ (con tangente "orizzontale") e l'altro, che indichiamo con F', di ascissa $x = -3$. Il suo grafico è riportato nella figura 5.

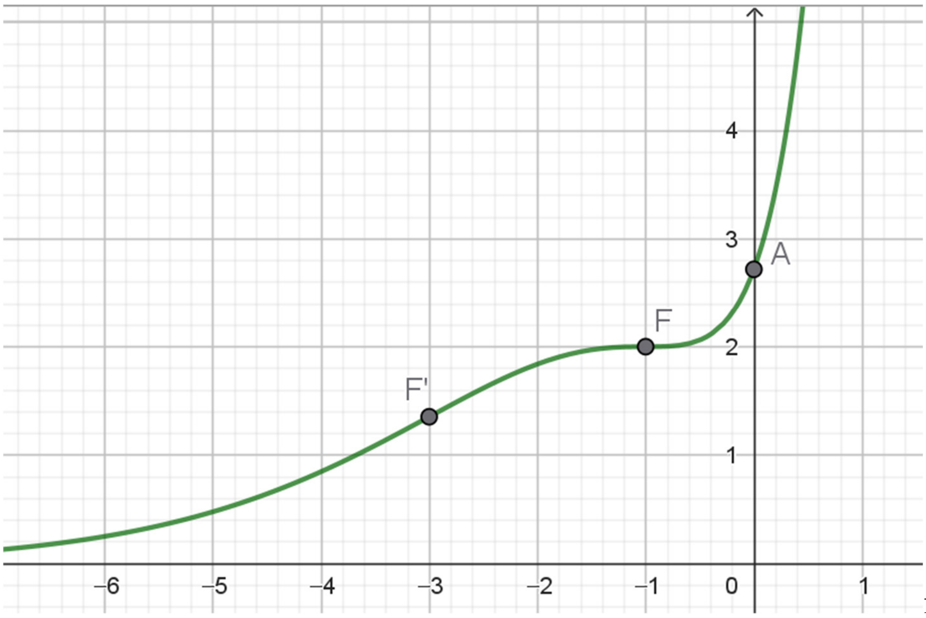

figura 5

La funzione $f_1(x)$ è invertibile perché è monotona crescente (in senso stretto) in tutto il dominio. La sua inversa $g(x)$ è quindi monotona crescente (in senso stretto) ed ha come dominio l'insieme dei numeri reali positivi (immagine del dominio di $f_1(x)$) e come codominio l'insieme dei numeri reali (figura 6).
Poiché

$$f_1'(0) = e$$

si ha (per il teorema della derivata della funzione inversa):

$$g'(e) = \frac{1}{f_1'(0)} = \frac{1}{e}.$$

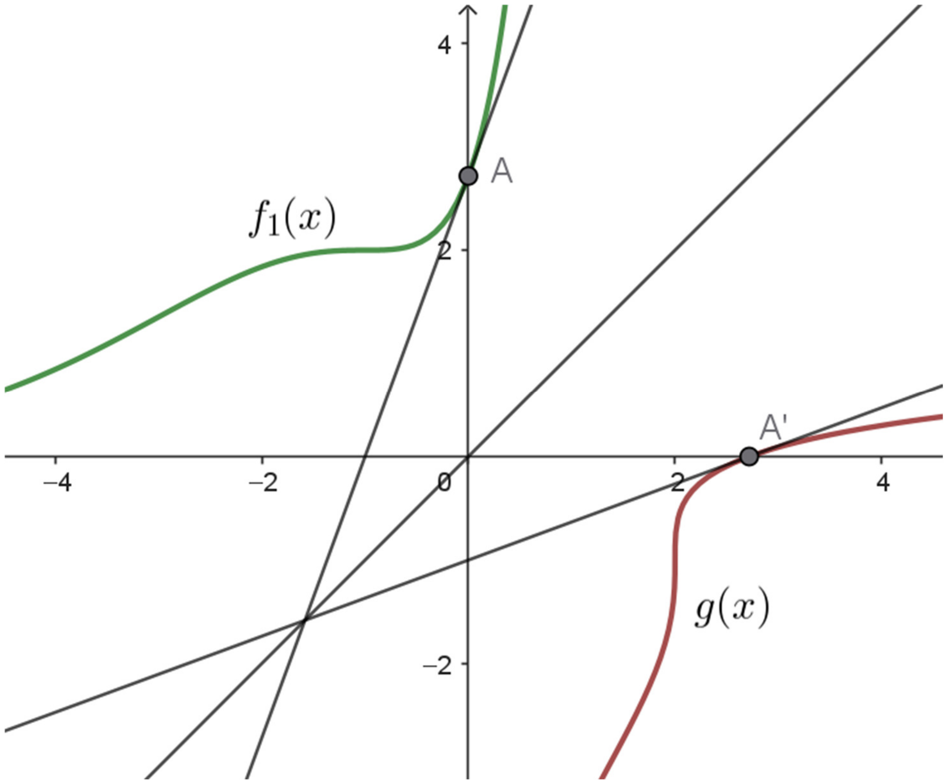

figura 6

Punto c)

c) Si consideri la funzione $F(t) = \int_t^0 f_1(x)dx$, con $t \leq 0$. Fornire il significato geometrico della funzione $F(t)$ e verificare che $\lim_{t\to-\infty} F(t) = 3e$.

Consideriamo la funzione integrale

$$F(t) = \int_t^0 (x^2+1)e^{x+1}dx \qquad \text{con } t \leq 0$$

Poiché $t \leq 0$ ed $f(x)$ è positiva, la funzione $F(t)$ rappresenta l'area sotto la curva compresa tra la retta di equazione $x = t$ e l'asse y.

Calcoliamo dapprima l'integrale indefinito (per parti, applicato due volte):

$$\int (x^2+1)e^{x+1}dx = (x^2+1)e^{x+1} - 2\int xe^{x+1}dx =$$

$$= (x^2+1)e^{x+1} - 2\left(xe^{x+1} - \int e^{x+1}dx\right) =$$

$$= (x^2+1)e^{x+1} - 2xe^{x+1} + 2e^{x+1} + c =$$

$$= (x^2-2x+3)e^{x+1} + c.$$

Pertanto, si ha

$$F(t) = \int_t^0 (x^2+1)e^{x+1}dx = [(x^2-2x+3)e^{x+1}]_t^0 =$$

$$3e - (t^2-2t+3)e^{t+1}.$$

Quindi si ottiene:

$$\lim_{t\to-\infty} F(t) = \lim_{t\to-\infty} (3e - (t^2-2t+3)e^{t+1}).$$

Calcoliamo dapprima il limite ausiliario:

$$\lim_{t\to-\infty} (t^2-2t+3)e^{t+1} = \text{forma indet.} \infty \cdot 0\,.$$

Riscrivendolo nella forma indeterminata $\frac{\infty}{\infty}$, possiamo applicare la seconda regola di De L'Hospital un paio di volte:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{t^2-2t+3}{e^{-t-1}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2t-2}{-e^{-t-1}}==\lim_{x\to-\infty}\frac{2}{e^{-t-1}}=0\,.$$

Pertanto si ottiene:

$$\lim_{t\to-\infty}F(t)=\lim_{t\to-\infty}(3e-(t^2-2t+3)e^{t+1})=3e\,,$$

come si doveva verificare.

Punto d)

d) Sia P_a un punto sulla curva γ_a, di ascissa $x<0$, nonché Q_a ed R_a le sue proiezioni sugli assi coordinati. Determinare, se esiste, il valore del parametro a in corrispondenza del quale l'area del rettangolo $P_aQ_aOR_a$ assume valore massimo se $x=-2$.

Consideriamo il rettangolo della figura 7.

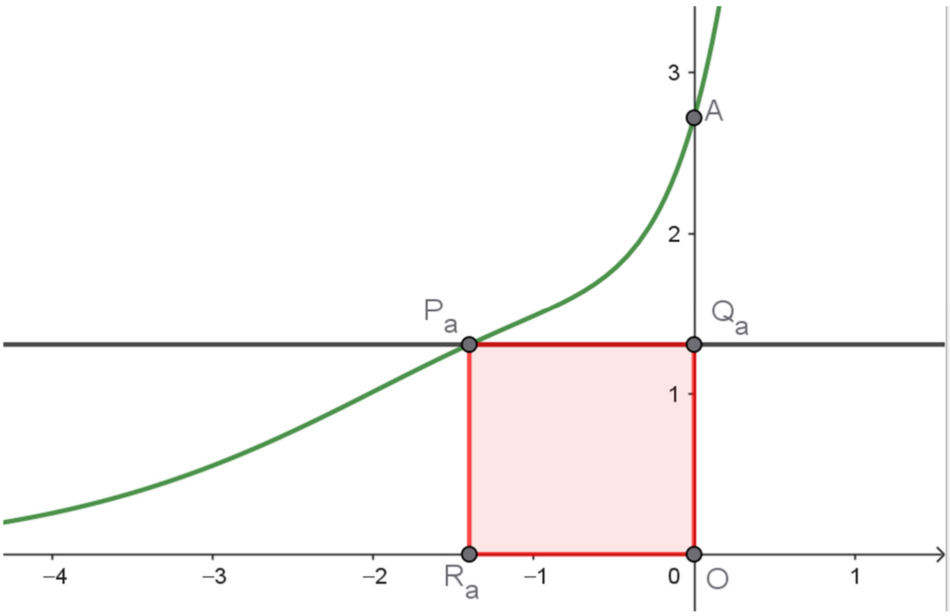

figura 7

La base misura $R_aO=|x|=-x$ perché $x<0$ per ipotesi.

L'altezza del rettangolo è $OQ_a=f(x)=(x^2+1)e^{x+1}$.

L'area del rettangolo è pertanto

$$S_a(x)=-x(x^2+1)e^{ax+1}\qquad(x\le 0).$$

La derivata prima è pertanto

$$S_a'(x)=(-3x^2-1)e^{ax+1}+(-x^3-1)ae^{ax+1}$$

$$S_a'(x)=-e^{ax+1}(ax^3+3x^2+ax+1).$$

Se l'area ha un massimo per $x=-2$, tale derivata deve annullarsi per questo valore, ossia deve essere

$$S_a{}'(-2) = 0$$

che fornisce $-8a + 12 - 2a + 1 = 0$, ossia $10a - 13 = 0$, da cui si ottiene

$$a = \frac{13}{10}.$$

Controlliamo ora se per $a = \frac{13}{10}$ il punto $x = -2$ è effettivamente un punto di massimo per l'area del rettangolo. Si ha

$$S'(x) = -e^{\frac{13}{10}x+1}\left(\frac{13}{10}x^3 + 3x^2 + \frac{13}{10}x + 1\right)$$

$$S'(x) = -\frac{1}{10}e^{\frac{13}{10}x+1}(13x^3 + 30x^2 + 13x + 10)$$

Il polinomio $13x^3 + 30x^2 + 13x + 10$ ha come zero $x = -2$; pertanto questo polinomio si scompone in $(x + 2)(13x^2 + 4x + 5)$, con il fattore $13x^2 + 4x + 5$ irriducibile nei reali (e quindi positivo per ogni x).

Ne segue che $S'(x) \geq 0$ se e solo se $x \leq -2$. Il punto $x = -2$ è pertanto un punto di massimo relativo (e assoluto) per l'area del rettangolo e il massimo dell'area è:

$$S(-2) = 10e^{\frac{13}{10}(-2)+1} = 10e^{-\frac{8}{5}} = \frac{10}{\sqrt[5]{e^8}} \approx 2{,}019.$$

Tabella di analisi/commento del problema

Livello di difficoltà stimato	☐ Basso	☐ Medio	☐ Alto	☒ Molto alto	
Formulazione del problema	☐ Scorretta	☐ Ambigua	☐ Poco chiara	☒ Corretta	☐ Molto chiara
Si tratta di un problema contestualizzato	☒ No	☐ Parzialmente	☐ In modo accettabile	☐ Ben contestualizzato	
L'argomento è presente nelle Indicazioni Nazionali	☒ Sì	☐ No	☐ Non è esplicitato / Non è chiaro		
L'argomento è presente nel QdR di Matematica?	☒ Sì	☐ No	☐ Non è esplicitato / Non è chiaro		
Di solito, viene svolto nella pratica didattica usuale?	☒ Sì	☐ No	☐ Non sempre		
È un argomento presente nei libri di testo di Matematica?	☐ No	☐ Non sempre	☒ Sempre		
Verifica conoscenze / abilità/ competenze fondamentali?	☒ Sì	☐ Solo parzialmente	☐ No		
Per la risoluzione del problema è utile una calcolatrice grafica?	☒ Sì	☐ No	☐ Parzialmente		